



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Е. Ильинский, Геометрооптическая модель многомодового Эрмито-Гауссова пучка,  
*Компьютерная оптика*, 2023, том 47, выпуск 4, 541–547

<https://www.mathnet.ru/co1153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

26 апреля 2025 г., 07:26:26



# Геометрооптическая модель многомодового Эрмито–Гауссового пучка

Р.Е. Ильинский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> АО «Лыткаринский завод оптического стекла»,  
140061, Россия, г. Лыткарино Московской области

## Аннотация

Предлагается математическая модель пространственного распределения потока излучения в многомодовом Эрмито–Гауссовом пучке. В этой модели пространственное распределение потока излучения описывают лучи с нанизанными на них потоками излучения. Особенностью предлагаемой модели является то, что нанизанные на лучи потоки излучения складываются алгебраически.

**Ключевые слова:** Эрмито–Гауссов пучок, геометрическая оптика, компьютерное моделирование, расчет траекторий лучей.

**Цитирование:** Ильинский, Р.Е. Геометрооптическая модель многомодового Эрмито–Гауссового пучка / Р.Е. Ильинский // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 4. – С. 541–547. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1239.

**Citation:** Ilinsky RE. Geometric-optical model of a multimode Hermite–Gaussian beam. Computer Optics 2023; 47(4): 541–547. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1239.

## Введение

В фотометрических расчетах при моделировании оптико-механических устройств в трехмерной компьютерной графике распространение оптического излучения достаточно часто моделируется набором лучей [1, 2, 3].

При этом луч интерпретируется как геометрическая линия (площадь поперечного сечения которой строго равна нулю). На каждый такой луч нанизана (терминология из [1]) определенная доля потока излучения. Лучами с нанизанными на них потоками излучения хорошо моделируется отражение излучения от гладких и шероховатых поверхностей, рассеяние и поглощение света в средах, преломление на границе сред и т.д. При данном способе моделирования поток излучения, который падает на заданный участок поверхности, почти всегда принимается равным алгебраической сумме потоков излучений, нанизанных на те лучи, траектории которых пересекают этот участок поверхности. Однако условие алгебраического сложения потоков излучений является препятствием для моделирования дифракционных и других явлений, которые обусловлены волновой природой света. На основе классической волновой теории света [4] долгое время было принято считать, что это препятствие непреодолимо. Однако за последние десятилетия найдены способы моделирования дифракционных явлений, в которых осуществляется алгебраическое сложение нанизанных на лучи потоков излучений [5, 6, 7, 8, 9].

Достаточно часто лазерное излучение, собственные типы колебаний (моды) открытых резонаторов и оптических волноводов представляют узкие пучки, в которых электромагнитное излучение сконцентрировано около одной линии (оси пучка) и быстро спадает до нуля в поперечных направлениях [10, 11]. Распро-

странение подобных пучков первоначально описывалось с использованием математического аппарата волновой оптики [12], а не традиционной геометрической оптики лучей. Это связано с тем, что геометрическая оптика первоначально была ориентирована на описание квазиплоских волн [4]. В работе [13] указано, что если определить лучи как семейство нормалей к поверхностям волнового фронта лазерного пучка, совпадающих по направлению с усредненным вектором Пойнтинга, то такие лучи оказываются искривленными в изотропном пространстве. Траектории этих лучей не подчиняются уравнению эйконала, принципу Ферма и другим законам геометрической оптики. История разработки методов, которые позволили использовать традиционный (или в той или иной степени адаптированный [14, 15, 16]) математический аппарат геометрической оптики лучей для моделирования лазерных и подобных им узких пучков, заслуживает отдельного исследования. Краткие сведения об этих методах изложены в работе [13]. В работах [17, 18, 19] была показана возможность создания такой математической модели Гауссового пучка (нулевая мода Эрмито–Гауссового пучка), в которой нанизанные на лучи потоки излучения складываются алгебраически. Построенная на подобных принципах модель была использована при расчете потерь в соединителе одномодовых волокон [20]. В работе [21] представлена математическая модель одиночной моды Эрмито–Гауссового пучка. В этой модели нанизанные на лучи потоки излучения также складываются алгебраически. В настоящей статье будет представлена аналогичная модель для многомодового Эрмито–Гауссового пучка.

## 1. Многомодовый Эрмито–Гауссов пучок

Если электромагнитное излучение пучка сконцентрировано около одной линии (оси пучка) и быстро

спадает до нуля в поперечных направлениях, то такое электромагнитное излучение наиболее просто и достаточно полно описывают Эрмито–Гауссовы пучки [10,11]. Пусть в плоскости  $OXY$  комплексная амплитуда многомодового Эрмито–Гауссова пучка описывается выражением [10, 11]:

$$W(x, y, z) = \sum_{m_x=0}^{K_x} \sum_{m_y=0}^{K_y} c_{m_x, m_y} \Psi_{m_x, m_y}(x, y, z), \quad (1)$$

где функция

$$\begin{aligned} \Psi_{m_x, m_y}(x, y, z) = & \frac{\tilde{z}}{\sqrt{z^2 + \tilde{z}^2}} \left( \frac{\tilde{z} - iz}{\sqrt{\tilde{z}^2 + z^2}} \right)^{m_y + m_x + 1} \times \\ & \times H_{m_x} \left( \frac{\sqrt{2}\tilde{z}x}{w\sqrt{z^2 + \tilde{z}^2}} \right) H_{m_y} \left( \frac{\sqrt{2}\tilde{z}y}{w\sqrt{z^2 + \tilde{z}^2}} \right) \times \\ & \times \exp \left[ \frac{i(x^2 + y^2)\tilde{z}z}{w^2(z^2 + \tilde{z}^2)} - \frac{(x^2 + y^2)\tilde{z}^2}{w^2(z^2 + \tilde{z}^2)} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

описывает (с точностью до постоянного множителя) одиночную моду Эрмито–Гауссова пучка;  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\tilde{z} = \pi w^2 / \lambda$ ,  $\lambda = \lambda_{vak} / n$ ,  $\lambda_{vak}$  – длина волны излучения в вакууме;  $n$  – показатель преломления среды, в которой распространяется излучение;  $w$ ,  $c_{m_x, m_y}$  – постоянные коэффициенты,  $K_x$ ,  $K_y$  – целые числа,  $H_i(\cdot)$  – полином Эрмита (см. приложение 1). Интенсивность Эрмито–Гауссова пучка определим как:

$$\begin{aligned} I(x, y, z) = & |W(x, y, z)|^2 = W(x, y, z)W^*(x, y, z) = \\ = & \sum_{m_x=0}^{K_x} \sum_{m_y=0}^{K_y} \sum_{m'_x=0}^{K_x} \sum_{m'_y=0}^{K_y} c_{m_x, m_y} c_{m'_x, m'_y}^* \Psi_{m_x, m_y}(x, y, z) \times \\ & \times \Psi_{m'_x, m'_y}^*(x, y, z), \end{aligned} \quad (3)$$

где индексом \* обозначены комплексно сопряженные величины.

## 2. Геометрооптическая модель многомодового Эрмито–Гауссова пучка

Будем считать, что весь исходящий от плоскости  $z=0$  поток излучения распределен по бесконечному числу световых трубок бесконечно малых поперечных размеров. Каждая из этих световых трубок представляет заполненную лучами область пространства. Траектории лучей, которые заполняют световую трубку, описывают уравнения

$$y = \eta + \dot{\eta}z, \quad x = \xi + \dot{\xi}z \quad (4)$$

при

$$\begin{aligned} |\xi - u| \leq & \frac{1}{2} \Delta u, \quad |\eta - v| \leq \frac{1}{2} \Delta v, \\ |\dot{\xi} - \dot{u}| \leq & \frac{1}{2} \Delta \dot{u}, \quad |\dot{\eta} - \dot{v}| \leq \frac{1}{2} \Delta \dot{v}. \end{aligned}$$

Параметры  $u, v$  являются координатами центра прямоугольника, по которому световая трубка пересека-

ет плоскость  $z=0$ ; стороны этого прямоугольника равны  $\Delta u$  и  $\Delta v$ . Параметры  $\Delta \dot{u}$  и  $\Delta \dot{v}$  характеризуют расходимость световой трубки. Центральным лучом световой трубки является луч  $\mathcal{R}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ , который описывают уравнения

$$y = v + \dot{v}z, \quad x = u + \dot{u}z. \quad (5)$$

Так как поперечные размеры световой трубки предполагаются малыми, то выполняются условия  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$ ,  $\Delta \dot{u} \rightarrow 0$ ,  $\Delta \dot{v} \rightarrow 0$ . Если эти условия выполнены, то при отсутствии поглощения и рассеяния переносимый внутри лучевой трубки поток  $\Delta\Phi$  равен

$$\Delta\Phi = G(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \Delta \dot{u} \Delta \dot{v} \Delta u \Delta v, \quad (6)$$

где  $G(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  – удельная  $\tan$  – сила света [22] в точке с координатами  $x=u, y=v, z=0$  в направлении вектора, чьи координаты равны  $x=\dot{u}, y=\dot{v}, z=1$ . Так как поперечные размеры световой трубки малые, то можно считать, что поток  $\Delta\Phi$  нанизан на центральный луч  $\mathcal{R}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  световой трубки.

Пусть в плоскости  $z=\zeta$  прямоугольная область  $\mathcal{E}$  описывается неравенствами

$$|x - x_c| \leq \frac{1}{2} \Delta x_c, \quad |y - y_c| \leq \frac{1}{2} \Delta y_c,$$

где  $x_c, y_c$  являются координатами центра прямоугольника, а стороны этого прямоугольника равны  $\Delta x_c$  и  $\Delta y_c$ . Если точка пересечения луча  $\mathcal{R}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  с плоскостью  $z=\zeta$  лежит внутри прямоугольной области  $\mathcal{E}$ , то должны быть выполнены условия

$$|v + \dot{v}\zeta - y_c| \leq \frac{1}{2} \Delta y_c, \quad |u + \dot{u}\zeta - x_c| \leq \frac{1}{2} \Delta x_c. \quad (7)$$

Падающий на прямоугольную область  $\mathcal{E}$  поток излучения  $\Phi_\epsilon$  равен

$$\Phi_\epsilon = \sum \Delta\Phi_{\mathcal{R}} \vartheta(u, v, \dot{u}, \dot{v}), \quad (8)$$

где суммирование ведется по всем лучам, которые исходят от плоскости  $z=0$ ,  $\Phi_{\mathcal{R}} = G(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \Delta \dot{u} \Delta \dot{v} \Delta u \Delta v$  – нанизанный на луч  $\mathcal{R}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  поток излучения,  $\vartheta(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  – весовой коэффициент. Если луч  $\mathcal{R}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  пересекает плоскость  $z=\zeta$  внутри прямоугольной области  $\mathcal{E}$ , то  $\vartheta(u, v, \dot{u}, \dot{v})=1$ , а во всех остальных случаях  $\vartheta(u, v, \dot{u}, \dot{v})=0$ . Из неравенств (7) следует

$$\vartheta(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \text{rect} \left( \frac{v + \dot{v}\zeta - y_c}{\Delta y_c} \right) \text{rect} \left( \frac{u + \dot{u}\zeta - x_c}{\Delta x_c} \right), \quad (9)$$

где

$$\text{rect}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\xi| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

После перехода от суммирования к интегрированию формула (8) примет вид

$$\Phi_\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \operatorname{rect}\left(\frac{v + \dot{v}\zeta - y_C}{\Delta y_C}\right) \times \operatorname{rect}\left(\frac{u + \dot{u}\zeta - x_C}{\Delta x_C}\right) du \dot{u} dv \dot{v} dv. \quad (10)$$

Средняя освещенность  $E_\epsilon$  прямоугольной области  $\mathcal{C}$  равна

$$E_\epsilon = \frac{\Phi_\epsilon}{\Delta y_C \Delta x_C}. \quad (11)$$

При  $\Delta y_C \rightarrow 0, \Delta x_C \rightarrow 0$  средняя освещенность  $E_\epsilon$  стремится к освещенности  $E(x_C, y_C, z = \zeta)$  в точке плоскости  $z = \zeta$  с координатами  $x = x_C, y = y_C$ :

$$E(x_C, y_C, z = \zeta) = \lim_{\Delta y_C \rightarrow 0, \Delta x_C \rightarrow 0} \frac{\Phi_C}{\Delta y_C \Delta x_C} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \times \delta(v + \dot{v}\zeta - y_C, u + \dot{u}\zeta - x_C) du \dot{u} dv \dot{v} dv, \quad (12)$$

где  $\delta(x, y)$  – двумерная дельта-функция Дирака.

В результате интегрирования формулы (12) получается выражение, которое описывает освещенность в плоскости  $z = \zeta$ :

$$E(x, y, z = \zeta) = \frac{1}{\zeta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(u, v, \frac{x-u}{\zeta}, \frac{y-v}{\zeta}\right) du dv. \quad (13)$$

В приложении 2 доказано, что если удельная  $\operatorname{tap}$  – сила света  $G(x, y, \dot{u}, \dot{v})$  описывается выражением

$$G(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sum_{\mu_x=0}^{K_x} \sum_{\mu_y=0}^{K_y} \sum_{\mu'_x=0}^{K_x} \sum_{\mu'_y=0}^{K_y} \frac{2\bar{z}^2}{\pi w^2} c_{\mu_x, \mu_y} c_{\mu'_x, \mu'_y}^* \times \mathfrak{G}(\mu_x, \mu'_x, x, \dot{x}) \mathfrak{G}(\mu_y, \mu'_y, y, \dot{y}), \quad (14)$$

где

$$\mathfrak{G}(\mu, \mu', g, \dot{g}) = (-1)^\mu \exp\left(-\frac{2g^2}{w^2}\right) \exp\left(-\frac{2\bar{z}^2 \dot{g}^2}{w^2}\right) \times \sum_{p=0}^{\mu} \sum_{p'=0}^{\mu'} \frac{\mu! (-i)^{\mu-p} \mu'! (-i)^{p'-p'}}{p! (\mu-p)! p'! (\mu'-p')!} \times H_{p+p'}\left(\frac{\sqrt{2}g}{w}\right) H_{\mu-p}\left(\frac{\sqrt{2}\bar{z}\dot{g}}{w}\right) H_{\mu'-p'}\left(\frac{\sqrt{2}\bar{z}\dot{g}}{w}\right), \quad (15)$$

то будет иметь место формальное равенство

$$I(x, y, z) = W(x, y, z) W^*(x, y, z) = E(x, y, z = \zeta).$$

Следовательно, многомодовый Эрмито–Гауссов пучок, комплексная амплитуда которого описывается выражением (1), формирует в пространстве такое же распределение излучения, как и источник, удельная  $\operatorname{tap}$ -сила света которого описывается выражением (14). А для математического моделирования исходящего излучения от источника с известной удельной  $\operatorname{tap}$ -силой света (следовательно, и для математического моделирования многомодового Эрмито–Гауссова пучка) можно использовать хорошо из-

вестные в вычислительной оптике и компьютерной графике методы на основе расчета лучей с нанизанными на эти лучи потоками излучения. В этих методах поток излучения, который падает на заданный участок поверхности, принимается равным алгебраической сумме потоков излучений, нанизанных на те лучи, траектории которых пересекают этот участок поверхности.

Необходимо отметить, что функция (14) при некоторых наборах значений  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  может принимать отрицательные значения. А так как нанизанный на центральный луч световой трубки поток излучения рассчитывается по формуле (6), то нанизанные на некоторые лучи потоки излучения могут быть отрицательными. Этот факт обсуждался в работах [7, 9].

### 3. Перенос излучения через оптическую систему

Из параграфа 2 следует, что задача моделирования прохождения многомодового Эрмито–Гауссова пучка через оптическую систему может быть сведена к стандартной задаче вычислительной оптики:

Перед оптической системой в плоскости  $\Omega_A$  расположен источник излучения, удельная  $\operatorname{tap}$ -сила света которого описывается выражением (14). После прохождения оптической системы излучение от этого источника падает на плоскость  $\Omega$ . Требуется найти значения освещенности в точках плоскости  $\Omega_B$ .

В настоящей статье будут рассмотрены решения этой задачи в параксиальном приближении и на основе расчета реальных лучей.

#### 3.1. Параксиальное приближение

Пусть ось  $OZ$  совпадает с осью симметрии вращательно-симметричной оптической системы; плоскость  $\Omega_A$  является плоскостью  $z = z_A$ , а плоскость  $\Omega_B$  является плоскостью  $z = z_B$ .

Если участок траектории луча  $\mathcal{R}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  до прохождения вращательно-симметричной оптической системы описывают уравнения

$$y = v + \dot{v}(z - z_A), \quad x = u + \dot{u}(z - z_A), \quad (16)$$

а участок траектории этого же луча после прохождения этой оптической системы описывают уравнения

$$y = \eta_B + \dot{\eta}_B(z - z_B), \quad x = \xi_B + \dot{\xi}_B(z - z_B), \quad (17)$$

то в параксиальном приближении параметры  $v, u, \dot{v}, \dot{u}, \eta_B, \xi_B, \dot{\eta}_B, \dot{\xi}_B$  этих участков траекторий луча связаны соотношениями [23]

$$\eta_B = Av + B\dot{v}, \quad (18)$$

$$n' \dot{\eta}_B = Cv + D\dot{v}, \quad (19)$$

$$\xi_B = Au + B\dot{u}, \quad (20)$$

$$n' \dot{\xi}_B = Cu + D\dot{u}, \quad (21)$$

где  $n, n'$  – показатели преломления пространства предметов и пространства изображений соответственно, коэффициенты  $A, B, C, D$  зависят только от конструктивных параметров оптической системы и координат  $z_A, z_B$ , но не зависят от параметров  $v, u, \dot{v}, \dot{u}$ . Следует отметить, что коэффициенты  $A, B, C, D$  удовлетворяют условию  $AD - BC = 1$ .

Пусть в плоскости  $z = z_B$  задана прямоугольная область  $S$ . Эта область описывается неравенствами

$$|x - x_C| \leq \frac{1}{2} \Delta x_C, \quad |y - y_C| \leq \frac{1}{2} \Delta y_C,$$

где  $x_C, y_C$  являются координатами центра прямоугольника, а стороны этого прямоугольника равны  $\Delta x_C$  и  $\Delta y_C$ . Если точка пересечения луча  $\mathcal{R}(u, v, \dot{u}, \dot{v})$  с плоскостью  $z = z_B$  лежит внутри прямоугольной области  $S$ , то должны быть выполнены условия

$$\begin{aligned} |Av + Bn\dot{v} - y_C| &\leq \frac{1}{2} \Delta y_C, \\ |Au + Bn\dot{u} - x_C| &\leq \frac{1}{2} \Delta x_C. \end{aligned} \quad (22)$$

Освещенность в плоскости  $z = z_B$  может быть найдена способом, который весьма схож с описанным в параграфе 3. Основное отличие состоит в том, что неравенства (7) заменяются на (22). В соответствии с этим выражение, которое описывает освещенность в плоскости  $z = z_B$ , примет вид [сравните с формулой (12)]:

$$\begin{aligned} E_B(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \times \\ &\times \delta(Av + Bn\dot{v} - y, Au + Bn\dot{u} - x) d\dot{u}d\dot{v}du dv = \\ &= \frac{1}{B^2 n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G\left(u, v, \frac{x - Au}{Bn}, \frac{y - Av}{Bn}\right) du dv, \end{aligned} \quad (23)$$

где функция  $G(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  задана выражением (14). Используя формулу (A2.10), можно доказать, что

$$\begin{aligned} E_B(x, y) &= n^2 \tilde{z}^2 \sum_{\mu_x=0}^{K_x} \sum_{\mu_y=0}^{K_y} \sum_{\mu'_x=0}^{K_x} \sum_{\mu'_y=0}^{K_y} c_{\mu_x, \mu_y} c_{\mu'_x, \mu'_y}^* \times \\ &\times \frac{(\tilde{z}A - iBn)^{\mu_x} (\tilde{z}A + iBn)^{\mu'_x}}{\mathfrak{G}^{\mu'_x + \mu_x + 1}} \exp\left(\frac{-2\tilde{z}^2 x^2}{w^2 \mathfrak{G}^2}\right) \times \\ &\times H_{\mu_x} \left(\frac{x\sqrt{2\tilde{z}}}{w\mathfrak{G}}\right) H_{\mu'_x} \left(\frac{x\sqrt{2\tilde{z}}}{w\mathfrak{G}}\right) \times \\ &\times \frac{(\tilde{z}A - iBn)^{\mu_y} (\tilde{z}A + iBn)^{\mu'_y}}{\mathfrak{G}^{\mu'_y + \mu_y + 1}} \exp\left(\frac{-2\tilde{z}^2 y^2}{w^2 \mathfrak{G}^2}\right) \times \\ &\times H_{\mu_y} \left(\frac{y\sqrt{2\tilde{z}}}{w\mathfrak{G}}\right) H_{\mu'_y} \left(\frac{y\sqrt{2\tilde{z}}}{w\mathfrak{G}}\right), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\tilde{z} = \pi w^2 n / \lambda_{vak}$ ,  $\mathfrak{G} = \sqrt{B^2 n^2 + \tilde{z}^2 A^2}$ .

Если для определения комплексной амплитуды  $W_B(x, y)$  прошедшей через оптическую систему волны в плоскости  $z = z_B$  использовать интеграл Коллинса

[24], то после выполнения всех необходимых преобразований получается равенство

$$E_B(x, y) = W_B(x, y) W_B^*(x, y). \quad (25)$$

### 3.2. Расчет реальных лучей

При численном моделировании прохождения многомодового Эрмито-Гауссового пучка через оптическую систему (которая может как обладать вращательной симметрией, так и не обладать этим свойством) число световых трубок должно быть конечным, а поперечные размеры этих световых трубок должны иметь конечные размеры. В простейшем случае для численного моделирования можно использовать набор лучей  $\mathcal{R}(x_{ix}, y_{ix}, \dot{x}_{jx}, \dot{y}_{jy})$ , где

$$x_{ix} = \left(i_x - \frac{N-1}{2}\right) \Delta x, \quad y_{iy} = \left(i_y - \frac{N-1}{2}\right) \Delta y, \quad (26)$$

$$\dot{x}_{jx} = \left(j_x - \frac{M-1}{2}\right) \Delta \dot{x}, \quad \dot{y}_{jy} = \left(j_y - \frac{M-1}{2}\right) \Delta \dot{y}, \quad (27)$$

$i_x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $i_y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,  $j_x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ,  $j_y = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ,  $N, M$  – целые числа,  $\Delta x, \Delta y, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}$  – размеры прямоугольных ячеек. Согласно формуле (6) наннзанный на луч  $\mathcal{R}(x_{ix}, y_{ix}, \dot{x}_{jx}, \dot{y}_{jy})$  поток излучения равен

$$G(x_{ix}, y_{ix}, \dot{x}_{jx}, \dot{y}_{jy}) \Delta \dot{y} \Delta \dot{x} \Delta y \Delta x. \quad (28)$$

Разделим плоскость  $\Omega_B$  на сеть из прямоугольных ячеек. Поток излучения, который падает на ячейку в плоскости  $\Omega_B$ , равен

$$\sum G(x_{ix}, y_{ix}, \dot{x}_{jx}, \dot{y}_{jy}) \Delta \dot{y} \Delta \dot{x} \Delta y \Delta x, \quad (29)$$

где суммирование ведется по всем лучам, которые попадают в данную ячейку. По потоку, который падает на заданную ячейку в плоскости  $\Omega_B$ , находится среднее значение освещенности в ячейке [см. формулу (11)]. Средние значения освещенности в ячейках, соотнесенные с центрами ячеек, аппроксимируют значения освещенности в плоскости  $\Omega_B$ .

### 4. Численный пример

Рассмотрим преобразование пучка линзой. Конструктивные параметры линзы приведены в табл. 1. Плоскость  $\Omega_A$  перпендикулярна оси линзы и расположена перед линзой; расстояние от плоскости  $\Omega_A$  до вершины первой поверхности линзы – 2000 мм. Плоскость  $\Omega_B$  перпендикулярна оси линзы и расположена на расстоянии 102 мм от второй поверхности линзы. Для этого случая  $A = -0,06290$ ,  $B = -19,51815$ ,  $C = -0,01$ ,  $D = -19,0$ .

Комплексная амплитуда в плоскости  $\Omega_A$  описывается выражением

$$W_A(x, y) = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - 2 \frac{y^2 + x^2}{w^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (30)$$

Табл. 1. Конструктивные параметры линзы

Радиус	Толщина	Показатель преломления	Световой диаметр
		1	
51,5 мм			50 мм
	6,5 мм	1,515	
∞			50 мм
		1	

где  $w=0,05$  мм. Длина волны излучения  $\lambda_{vak}=0,532$  мкм. Отметим, что выражение (30) соответствует моде Лагерро–Гауссового пучка [10].

Можно показать, что комплексная амплитуда (30) описывается функцией (1) при

$$K_x = K_y = 2, \quad c_{2,0} = c_{0,2} = -\frac{\sqrt{80}}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{B_T}}{\text{мм}},$$

$$c_{0,0} = 0, \quad c_{0,1} = c_{1,0} = 0, \quad c_{1,1} = c_{2,2} = 0, \quad c_{2,1} = c_{1,2} = 0.$$

На рис. 1 представлены результаты расчета освещенности в плоскости  $\Omega_B$  геометрооптическим методом (параксиальное приближение и расчет на основе построения хода реальных лучей) и по программе Fresnel 4.1 Pro [25, 26]. При расчете на основе построения хода реальных лучей было принято  $\Delta x = \Delta y = 0,002$ ,  $\Delta \dot{x} = \Delta \dot{y} = 0,002 / \dot{z}$ ,  $N = M = 128$ .

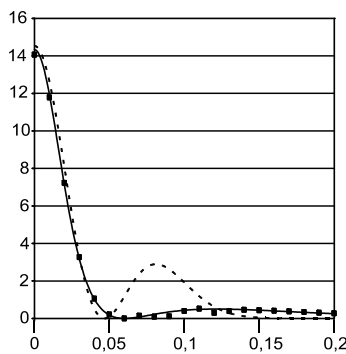


Рис. 1. Результаты расчета освещенности в плоскости  $\Omega_B$ : ---- параксиальное приближение; — расчет по программе Fresnel 4.1 Pro; ■ — расчет на основе построения хода реальных лучей

**Заключение**

Предлагаемая математическая модель пространственного распределения потока излучения в многомодовом Эрмито–Гауссовом пучке основана на том, что источник, удельная тап-сила света которого описывается выражением (14), формирует в свободном пространстве такое же распределение излучения, как и многомодовый Эрмито–Гауссов пучок с комплексной амплитудой (1). Благодаря этому становится возможным использовать для моделирования пространственного распределения потока излучения в многомодовом Эрмито–Гауссовом пучке набор лучей с нанизанными на эти лучи потоками излучения. При этом поток излучения, который падает на заданный участок поверхности, принимается равным алгебраической сумме потоков излучений, нанизанных на те

лучи, траектории которых пересекают этот участок поверхности. Описанный в параграфе 2 набор лучей позволяет использовать для моделирования прохождения через оптическую систему многомодового Эрмито–Гауссового пучка стандартные методы вычислительной оптики.

**References**

- [1] Gershun A. The light field. Journal of Mathematics and Physics 1939; 18(1-4): 51-151.
- [2] Glassner AS, ed. An introduction to ray tracing. New York: Academic Press; 1989.
- [3] Welford WT. Aberrations of optical systems. Taylor & Francis; 1986.
- [4] Born M, Wolf E. Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 6th ed. Oxford: Pergamon Press; 1980.
- [5] Freniere ER, Gregory GG, Hassler RA. Edge diffraction in Monte Carlo ray tracing. Proc SPIE 1999; 3780: 151-157.
- [6] Cuypers T, Horstmeyer R, Oh SB, Bekaert P, Raskar R. Validity of the wigner distribution function for ray-based imaging. 2011 IEEE Int Conf on Computational Photography (ICCP) 2011: 1-9.
- [7] Oh SB, Kashyap S, Garg R, Chandran S, Raskar R. Rendering wave effects with augmented light field. Comput Graph Forum 2010; 29: 507-516.
- [8] Mout M, Wick M, Bociort F, Petschulat J, Urbach P. Ray tracing the Wigner distribution function for optical simulations. Opt Eng 2018, 57(1): 014106.
- [9] Mout BM, Wick M, Bociort F, Urbach HP. A Wigner-based ray-tracing method for imaging simulations. Proc SPIE 2015; 9630: 96300Z.
- [10] Anan'ev YuA. Optical resonators and laser beams [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publishers; 1990.
- [11] Siegman AE. Lasers. Mill Valley, CA: University Science Books; 1986.
- [12] Fox AG, Li T. Resonant modes in a maser interferometer. Bell Syst Tech J 1961; 40(2): 453-488.
- [13] Pakhomov II, Tsubulya AB. Design of optical system and laser instruments [Russian]. Moscow: "Radio i Svyaz" Publisher; 1986.
- [14] Kravtsov YuA. Complex rays and complex caustics. Radiophysics and Quantum Electronics 1967; 10(9-10): 719-730.
- [15] Keller JB, Streifer W. Complex rays with an application to Gaussian beams. J Opt Soc Am 1971; 61(1): 40-43.
- [16] Egorchenkov RA, Kravtsov YuA. Numerical implementation of complex geometrical optics. Radiophysics and Quantum Electronics 2000; 43(7): 569-575.
- [17] Rodionov SA, Chzhu VD, Chzhun MS. The optics of nonhomocentric light beams. J Opt Technol 1997; 64(8): 722-724.
- [18] Joo WD. General conception of a Gaussian light beam. Proc SPIE 1996; 2778: 27780Y.
- [19] Joo W-D, Jung M-S, Rodionov SA. Geometrical concept of the propagation of general Gaussian beams. Opt Commun 2002; 206(4-6): 319-326.
- [20] Ilinsky RE. Use of the geometrical-optics analogy in calculation of losses in a connector of two single-mode fibers. Optics and Spectroscopy 2003; 97(1): 149-154.
- [21] Ilinsky RE. A geometrical-optics analogue of a single mode Hermite-Gaussian beam. Journal of Radio Electronics [Online] 2013; 4.
- [22] Gitin AV. Radiometry. A complex approach. J Opt Technol 1998; 65(2): 132-140.

<p>[23] Gauss CF. Dioptrische Untersuchungen. Göttingen: Druck und Verlag der Dieterichschen Buchhandlung; 1841.</p> <p>[24] Collins SA. Lens-system diffraction integral written terms of matrix optics. J Opt Soc Am 1970; 60: 1168-1177.</p> <p>[25] Epatko IV, Serov RV. Advantage of Fast Fourier Interpolation for laser modeling. Journal de Physique IV 2006; 133(1): 679-682.</p>	<p>[26] Solov'ev DA, Serov RV. Calculation of the spherical aberration of a lens in the problems of propagation of laser radiation in optical systems. Optics and Spectroscopy 2001; 91(2): 317-323.</p> <p>[27] Jahnke E, Emde F, Lösch F. Tables of higher functions. New York: McGraw-Hill Book Co; 1960.</p> <p>[28] Abramowitz M, Stegun IA. Handbook of mathematical functions. New York: Dover; 1965.</p>
--	--

**Приложение 1**

Полиномы Эрмита  $H_m$  описываются выражением [27, 28]:

$$H_m(x) = (-1)^m \exp(x^2) \frac{d^m \exp(-x^2)}{dx^m}, \tag{A1.1}$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Из формулы (A1.1) следует

$$H_{m+j}(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,j)} \frac{(-1)^k 2^k j! m!}{(j-k)! k! (m-k)!} H_{m-k}(x) H_{j-k}(x). \tag{A1.2}$$

На действительной оси полиномы Эрмита удовлетворяют отношению ортогональности [27, 28]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_k(x) \exp(-x^2) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq k, \\ 2^m m! \sqrt{\pi} & \text{при } m = k. \end{cases} \tag{A1.3}$$

Теорема сложения для полиномов Эрмита [27]

$$\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^m}}{m!} H_m\left(\frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \sum_{k=0}^m \frac{a^k b^{m-k}}{k!(m-k)!} H_k(x) H_{m-k}(y). \tag{A1.4}$$

Полиномы Эрмита могут быть представлены как коэффициенты разложения [27]

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} H_r(x), \quad |t| < \infty. \tag{A1.5}$$

Из формулы (A1.5) следует

$$\exp(2xt - t^2) \exp(2xs - s^2) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{t^r s^{r'}}{r! r'!} H_r(x) H_{r'}(x) = \exp(2x(t+s) - (t+s)^2) \exp(2ts) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j t^j s^j}{j!} \right) \sum_{r'=0}^{\infty} \frac{(t+s)^{r'}}{r'!} H_{r'}(x). \tag{A1.6}$$

Если сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  и  $s$  в выражении (A1.6), то можно получить следующую формулу

$$H_r(x) H_{r'}(x) = \sum_{j=0}^{\min(r,r')} \frac{r! r'! 2^j}{j!(r-j)!(r'-j)!} H_{r+r'-2j}(x). \tag{A1.7}$$

**Приложение 2**

Найдем значение

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}\left(\mu, \mu', \eta, \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right) d\eta, \tag{A2.1}$$

где функция  $\mathfrak{G}(\mu, \mu', g, \dot{g})$  задана формулой (15),  $\alpha$  – действительное число,  $\beta$  – ненулевое действительное число.

На основании формулы (A1.7) можно записать

$$H_{\mu-p}\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right) H_{\mu'-p'}\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right) = \sum_{\ell=0}^{\min(\mu-p, \mu'-p')} \frac{(\mu-p)!(\mu'-p')! 2^\ell}{\ell!(\mu-p-\ell)!(\mu'-p'-\ell)!} H_{\mu'-p'+\mu-p-2\ell}\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right). \tag{A2.2}$$

После подстановки выражения (A2.2) в формулу (15) и перемены порядка суммирования получим

$$\mathfrak{G}(\mu, \mu', \xi, \eta) = (-1)^{\mu'} \exp\left(-\frac{2\eta^2}{w^2}\right) \exp\left[-\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right)^2\right] \times \sum_{\ell=0}^{\ell \leq \mu} \left\{ \sum_{p=0}^{\mu-\ell} \frac{(-i)^{\mu-p}}{p!(\mu-p-\ell)!} \right\} \left\{ \sum_{p'=0}^{\mu'-\ell} \frac{(-1)^{p'}(-i)^{\mu'-p'}}{p'!(\mu'-p'-\ell)!} \right\} \times \times \frac{2^\ell \mu! \mu'}{\ell!} H_{p+p'}\left(\frac{\eta\sqrt{2}}{w}\right) H_{\mu'-p'+\mu-p-2\ell}\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right). \tag{A2.3}$$

Для упрощения преобразований обозначим

$$\xi = \frac{w\hat{\xi}s}{\sqrt{2}\tilde{z}}, \quad \eta = \frac{w(\hat{\eta}\beta + \hat{\xi}\tilde{z}\alpha)}{\sqrt{2}s}, \tag{A2.4}$$

где  $s = \sqrt{\beta^2 + \tilde{z}^2\alpha^2}$ .

Из формул (A2.4), (A1.4) следует

$$\exp\left(-\frac{2\eta^2}{w^2}\right) \exp\left[-\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right)^2\right] = \exp(-\hat{\eta}^2) \exp(-\hat{\xi}^2), \tag{A2.5}$$

$$H_{p+p'}\left(\frac{\eta\sqrt{2}}{w}\right) = \sum_{k=0}^{p+p'} \frac{(p+p')!}{k!(p+p'-k)!} H_{p+p'-k}(\hat{\xi}) H_k(\hat{\eta}) \frac{\beta^k (\tilde{z}\alpha)^{p+p'-k}}{s^{p+p'}}, \tag{A2.6}$$

$$H_{\mu'-p'+\mu-p-2\ell}\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right) = \sum_{k'=0}^{\mu'-p'+\mu-p-2\ell} \frac{(\mu'-p'+\mu-p-2\ell)!}{k'!(\mu'-p'+\mu-p-2\ell-k')!} \times \frac{(-\tilde{z}\alpha)^{k'} (\beta)^{\mu'-p'+\mu-p-2\ell-k'}}{s^{\mu'-p'+\mu-p-2\ell}} H_{\mu'-p'+\mu-p-2\ell-k'}(\hat{\xi}) H_{k'}(\hat{\eta}). \tag{A2.7}$$

На основании свойства ортогональности (A1.3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_{p+p'}\left(\frac{\eta\sqrt{2}}{w}\right) H_{\mu'-p'+\mu-p-2\ell}\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{2\eta^2}{w^2}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{2}}{w} \cdot \frac{\xi - \alpha\eta}{\beta}\right)^2\right] d\eta = = \frac{\beta^{\mu'-p'+\mu-p-2\ell} \tilde{z}^{p+p'} \sqrt{\pi w} |\beta|}{\sqrt{2} (\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 \tilde{z}^2})^{\mu'+\mu-2\ell+1}} \times \sum_{k'=0}^{k' \leq \mu'-p'+\mu-p-2\ell} \frac{(p+p')!}{(p+p'-k')!} (-1)^{k'} 2^{k'} \frac{(\mu'-p'+\mu-p-2\ell)!}{k'!(\mu'-p'+\mu-p-2\ell-k')!} \times \times H_{\mu'-p'+\mu-p-2\ell-k'}(\hat{\xi}) H_{p+p'-k'}(\hat{\xi}). \tag{A2.8}$$

Так как в соответствии с формулой (A1.2)

$$H_{\mu'+\mu-2\ell}(\hat{\xi}) = \sum_{k'=0}^{k' \leq \mu'-p'+\mu-p-2\ell} \frac{(p+p')!}{(p+p'-k')!} (-1)^{k'} 2^{k'} \times \frac{(\mu'-p'+\mu-p-2\ell)!}{k'!(\mu'-p'+\mu-p-2\ell-k')!} H_{\mu'-p'+\mu-p-2\ell-k'}(\hat{\xi}) H_{p+p'-k'}(\hat{\xi}), \tag{A2.9}$$

то

$$\mathcal{J} = (-1)^\mu \sum_{\ell=0}^{\ell \leq \mu} \frac{2^\ell \mu! \mu' \sqrt{\pi w} |\beta|}{\ell! \sqrt{2} s^{\mu'+\mu-2\ell+1}} \times H_{\mu'+\mu-2\ell}(\hat{\xi}) \exp(-\hat{\xi}^2) \left\{ \sum_{p=0}^{\mu-\ell} \frac{(-i)^{\mu-p}}{p!(\mu-p-\ell)!} \beta^{\mu-p-\ell} (\tilde{z}\alpha)^p \right\} \times \times \left\{ \sum_{p'=0}^{\mu'-\ell} \frac{(-1)^{p'}(-i)^{\mu'-p'}}{p'!(\mu'-p'-\ell)!} \beta^{\mu'-p'-\ell} (\tilde{z}\alpha)^{p'} \right\} = \frac{\sqrt{\pi w} |\beta|}{s^{\mu'+\mu+1}} (\tilde{z}\alpha - i\beta)^\mu (\tilde{z}\alpha + i\beta)^{\mu'} \times \exp\left(\frac{-2\tilde{z}^2\xi^2}{w^2 s^2}\right) H_\mu\left(\frac{\xi\sqrt{2}\tilde{z}}{ws}\right) H_{\mu'}\left(\frac{\xi\sqrt{2}\tilde{z}}{ws}\right). \tag{A2.10}$$

**Сведения об авторе**

**Ильинский Р.Е.**, в 1994 году окончил МГТУ им. Н. Э. Баумана по специальности 05.11.07 «Оптические и оптико-электронные приборы». Кандидат технических наук (1999 год, МГТУ им. Н. Э. Баумана). Работает инженером в АО «Лыткаринский завод оптического стекла». Область научных интересов: расчет оптических систем. E-mail: [ilinsky\\_r@mail.ru](mailto:ilinsky_r@mail.ru).

ГРНТИ: 29.31.29

Поступила в редакцию 17 октября 2022 г. Окончательный вариант – 8 января 2023 г.



---

# Geometric-optical model of a multimode Hermite-Gaussian beam

R.E. Ilinsky<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 'Lytkarino Optical Glass Factory', JSC,  
140061, Lytkarino, Moscow region, Russia

## *Abstract*

A mathematical model of the spatial distribution of the radiation flux in a multimode Hermite-Gaussian beam is proposed. In this model, the spatial distribution of the radiation flux is described by rays with radiation fluxes strung on them. A feature of the proposed model is that the radiation fluxes strung on the beams are added algebraically.

*Keywords:* Hermite-Gaussian beam, geometrical optics, computer simulations, ray tracing.

*Citation:* Ilinsky R. Geometric-optical model of a multimode Hermite-Gaussian beam. *Computer Optics* 2023; 47(4): 541-547. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1239.

---

## *Author's information*

**Roman Ilinsky**, graduated from Bauman Moscow State Technical University (BMSTU) in 1994, and received his PhD (Eng.) in 1999. Currently he works as the engineer at the JSC "Lytkarino Optical Glass Factory,,. Research interests are design of optical system. E-mail: [ilinsky\\_r@mail.ru](mailto:ilinsky_r@mail.ru).

---

*Received October 17, 2022. The final version – January 8, 2023.*

---