Б. Т. Билалов, Ю. К. Юсифалиев, Базисные свойства собственных функций некоторых несамосопряженных дифференциальных операторов,
Дифференц. уравнения, 1994, том 30, номер 1, 20–25

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.927.25

Б. Т. БИЛАЛОВ, Ю. К. ЮСИФАЛИЕВ

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

При исследовании некоторых задач математической физики и механики важно знать базисные свойства (полноту, минимальность, базисность и т. д.) некоторой части собственных функций соответствующего несамосопряженного дифференциального оператора. Например, рассматривая задачу

$$y''(t)+2By'(t)+c\lambda^2y(t)=0,$$

$$y'(0)+a\lambda y(0)=0, \quad y'(1)+a\lambda y(1)=0,$$

где B, c, a — постоянные числа, причем $B^2-c<0$, λ — параметр, получим соответствующие собственные функции

$$y_k(t)=Ae^{\alpha kt}+e^{\bar{\alpha}kt}, \quad k=0, \pm 1, \dots, \tag{1}$$

где $A=(B-a+i\sqrt{c-B^2})/(a-B+i\sqrt{c-B^2})$, $\alpha=\pi(-B/\sqrt{c-B^2}+i)$.

Еще в 1964 г. в работе [1] была доказана полнота системы $\{y_k(t)\}$, $k=0, -1, -2, \dots$, в $L_2(0, 1)$. Затем в работе [2] найдено необходимое и достаточное условие полноты системы вида

$$\{a(t)\varphi^n(t)+b(t)\bar{\varphi}^n(t)\}_0^\infty, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $\varphi(t)$ — комплекснозначные гёльдеровы функции на некотором отрезке $[a, b]$.

Впервые в компактной форме необходимое и достаточное условие базисности системы синусов $\{\sin[(n+\beta)t+\gamma]\}_1^\infty$ получено в работах [3, 4]. Затем аналогичный вопрос рассматривался и в работах [5—9].

Необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы (2), когда $a(t)$ и $b(t)$ — кусочно-непрерывные функции на $[a, b]$, получено в работах [10, 11]. В случае $\varphi(t)=e^{it}$ необходимое и достаточное условие базисности системы (2) получено в работе [12] при кусочно-непрерывных коэффициентах. Таким образом, базисные свойства системы (1), при $B=0$ даже базисность в L_p, $p\in(1, +\infty)$, исследованы окончательно.

Отметим, что при решении некоторых задач теории управления и задачи на собственные функции возникает вопрос об исследовании базисных свойств систем $e^{ibnt}\sin n\cdot v(t)$, $n=1, 2, \dots$, где b — вещественный параметр, $v(t)$ — заданная действительная функция. Ясно, что системы вида (2) не охватывают такие случаи. Поэтому приходится отдельно исследовать базисные свойства систем вида

$$v_n^\pm(t)\equiv a(t)\varphi^n(t)\pm b(t)\psi^n(t), \quad n=0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

В работах [13—15] находится целое число N, когда система $\{v_n(t)\}_N^{+\infty}$ полна и минимальна в $L_2(a, b)$, при конкретных условиях на функции $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Например, в работе [14] предполагается, что $\varphi, \psi\in C^2[a, b]$; $a(t), b(t)\in C[a, b]$; $\varphi'(t)\psi'(t)a(t)b(t)\neq 0$ $\forall t\in[a, b]$. В этих работах полнота и минимальность системы (3) исследуется с помощью краевых задач со сдвигом Карлемана теории аналитичных функций. При этом полнота эквивалентна тривиально разрешимости однородной задачи, минимальность эквивалентна разрешимости неоднородной задачи специального вида. И эти задачи отдельно до конца исследуются.

В настоящей работе предлагается другой способ исследования базисных свойств системы вида (3) в пространстве L_p, $p \in (1, +\infty)$, при меньших ограничениях на функции $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. При этом разрывной случай тоже допускается. В случае $|\varphi(t)| \equiv |\psi(t)| \equiv c$ рассматривается базисность системы (3) в L_p, $p \in (1, +\infty)$, которая раньше не была исследована, где c — постоянная.

Для этого сначала исследуются базисные свойства системы

$$\{A(t)w^n(t);\ B(t)w^n(-t)\}_0^\infty. \tag{4}$$

Отметим, что системы вида (4) рассматриваются впервые.

I. Рассмотрим систему (4). Относительно функций $A(t)$, $B(t)$ и $w(t)$ сделаем следующие предположения: $A(t) = |A(t)|e^{i\alpha(t)}$, $B(t) = |B(t)|e^{i\beta(t)}$ и $w(t)$ — комплекснозначные функции на отрезке $[-a, a]$.

1) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[-a, a]$, причем могут иметь бесконечное число точек разрывов первого рода на $(-a, a)$. Пусть $\{t_k\}_1^\infty$ и $\{\tau_k\}_1^\infty$ — соответственно точки разрыва этих функций на $(-a, a)$. Обозначим $\{\tilde{s}_k\}_1^\infty = \{t_k\} \cup \{\tau_k\}$. Множество $\{\tilde{s}_k\}_1^\infty$ имеет единственную предельную точку $s_0 \in (-a, a)$ и функция $\theta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ в точке s_0 имеет справа и слева конечные пределы.

2) $\sum_i |\tilde{h}_i| < +\infty$, $\tilde{h}_i \neq 2\pi/p + 2\pi k$, $i = \overline{1, \infty}$, для $\forall k \in Z$, где $\tilde{h}_i = \theta(\tilde{s}_i + 0) - \theta(\tilde{s}_i - 0)$, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел.

3) $\Gamma = w\{[-a, a]\}$ — замкнутая, простая кривая Ляпунова. Не ограничивая общности, будем считать, что Γ имеет положительное направление. Пусть $w'(-a+0) = w'(a-0)$.

На самом деле условие 3) существенно можно ослабить. Для простоты доказательства пока на $w(t)$ налагаем сильные ограничения.

4) $|A(t)|$, $|B(t)|$ измеримые на $(-a, a)$, причем $\operatorname{supvrai}_t\{|A(t)|^{\pm 1}; |B(t)|^{\pm 1}; |w'(t)|^{\pm 1}\} \leqslant M < +\infty$.

Определим следующие величины. Обозначим через r номер, после которого выполняется условие

$$-2\pi/q < \tilde{h}_k < 2\pi/p, \quad 1/p + 1/q = 1;\ k = \overline{r, \infty}. \tag{5}$$

Перенумеруем элементы множества $\{\tilde{s}_i\}_1^r$ по возрастанию и обозначим $\{s_i\}_1^r$. Перенумеруем соответствующие им скачки $\{\tilde{h}_i\}_1^r$ и обозначим $\{h_i\}_1^r$. Отметим, что в зависимости от того, принадлежит ли число $h_0 = \theta(s_0 + 0) - \theta(s_0 - 0)$ интервалу $(-2\pi/q, 2\pi/p)$, точка s_0 и число h_0 могут быть включены соответственно в множества $\{\tilde{s}_i\}_1^r$ и $\{\tilde{h}_i\}_1^r$.

Определим целые числа n_i, $i = \overline{1, r}$, из следующих условий:

$$-1/q < h_i/2\pi + n_{i-1} - n_i < 1/p, \quad i = \overline{1, r};\ n_0 = 0. \tag{6}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть комплекснозначные функции $A(t)$, $B(t)$ и $w(t)$ на $[-a, a]$ удовлетворяют условиям 1)—4). Определим целое число n_r из условий (5), (6). Пусть при этом $\omega \neq 1/p + k$ для $\forall k \in \mathbf{Z}$, где* $\omega = \frac{1}{2\pi}[\beta(-a+0) - \beta(a-0) + \alpha(a-0) - \alpha(-a+0)] + n_r$.

Система (4) полна в $L_p(-a, a)$, $p \in (1, +\infty)$, тогда и только тогда, когда $\omega < 1 + 1/p$; минимальна в $L_p(-a, a)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \operatorname{int} \Gamma$ и $\omega > 1/p$.

На доказательстве этой теоремы не будем останавливаться. Лишь отметим, что сначала доказывается, что полнота системы (4) эквивалентна некоторой однородной задаче со сдвигом в классе $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$ теории аналитических функций. Затем с помощью конформного склеивания и использования результатов работы [16] доказывается необходимое и достаточное условие полноты системы (4) в $L_p(-a, a)$. Используя эти условия, устанавливаем минимальность этой системы.

II. Установим связь между системами (3), (4). Не ограничивая общности, будем считать, что система (3) определена на некотором отрезке $[0, a]$.

Введем функции:

$$A_0(t)=\begin{cases} a(t), & t\in(0,a), \\ b(-t), & t\in(-a,0), \end{cases} \qquad w_0(t)=\begin{cases} \varphi(t), & t\in(0,a), \\ \psi(-t), & t\in(-a,0) \end{cases}$$

и рассмотрим систему $\{\Phi_n(t)\}\equiv\{A_0(t)w_0^n(t);\ A_0(-t)w_0^n(-t)\}$, $n=\overline{1,\infty}$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Система $\{\Phi_n(t)\}_1^\infty$ полна, минимальна и образует базис в $L_p(-a,a)$, $p\in(1,+\infty)$, тогда и только тогда, когда системы $\{v_n^+\}_1^\infty$ и $\{v_n^-(t)\}_1^\infty$ соответственно полны, минимальны и образуют базисы в $L_p(0,a)$ одновременно.*

Теорема 3. *Система $1\cup\{\Phi_n(t)\}_1^\infty$ полна, минимальна и образует базис в $L_p(-a,a)$, $p\in(1,+\infty)$, тогда и только тогда, когда системы $1\cup\{v_n^+\}_1^\infty$ и $\{v_n^-\}_1^\infty$ соответственно полны, минимальны и образуют базисы в $L_p(0,a)$ одновременно.*

Теорема 4. *Система $A_0(t)\cup\{\Phi_n(t)\}_1^\infty$ полна, минимальна в $L_p(-a,a)$ тогда и только тогда, когда система $1\cup\{\Phi_n(t)\}_1^\infty$ полна, минимальна в $L_p(-a,a)$, где функция $A_0(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.*

Будем доказывать теорему 4. Из теоремы 1 легко получаем необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы

$$\{A(t);A(t)w^n(t);\ B(t)w^n(-t)\}_1^\infty. \tag{7}$$

И, значит, при $\omega\in(-1/q,1/p)$, $0\in\operatorname{int}\Gamma$ получаем, что система (7) полна и минимальна. Биортогональную систему к (7) обозначим через $\{h_0^+(t);\ h_n^+(t);\ h_n^-(t)\}_1^\infty$. Ясно, что в этом случае система

$$\{\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot A(t);\ \operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot A(t)w^n(t);\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot B(t)w^n(-t)\}_1^\infty$$

тоже полна и минимальна. Биортогональная система имеет вид

$$\{|h_0^+(t)|;\ \operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot h_n^+(t);\ \operatorname{sign} h_0^+(t)\, h_n^-(t)\}_1^\infty.$$

Обозначим $c_0=\int\limits_{-a}^{a}|h_0^+(t)|dt$, $c_n^\pm=\int\limits_{-a}^{a}\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot h_n^\pm(t)dt$, $n=\overline{1,\infty}$.

Ясно, что $c_0\neq0$. Определим $b_n^\pm=c_n^\pm/c_0$, $n=\overline{1,\infty}$. Введем следующую систему:

$$H_0^+(t)=c_0^{-1}|h_0^+(t)|,$$

$$H_n^\pm(t)=\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot h_n^\pm(t)-b_n^\pm|h_0^+(t)|,\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Покажем, что эта система биортогонально сопряжена к системе

$$\{1;\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot A(t)w^n(t);\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot B(t)w^n(-t)\}_1^\infty. \tag{8}$$

На самом деле

$$\int\limits_{-a}^{a}H_0^+(t)\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot A(t)w^n(t)dt=$$

$$= \int_{-a}^{a} H_0^+(t)\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot B(t)\,w^n(-t)\,dt=0, \quad n=\overline{1,\infty}$$

$$\int_{-a}^{a} H_n^{\pm}(t)\,dt=c_n^{\pm}-b_n^{\pm}c_0=0, \quad n=\overline{1,\infty},$$

$$\int_{-a}^{a} H_n^+(t)\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot A(t)\,w^k(t)\,dt=$$

$$= \int_{-a}^{a} H_n^-(t)\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot B(t)\,w^k(-t)\,dt=\delta_{nk},$$

$$\int_{-a}^{a} H_n^+(t)\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot B(t)\,w^k(-t)\,dt=$$

$$= \int_{-a}^{a} H_n^-(t)\operatorname{sign} h_0^+(t)\cdot A(t)\,w^k(t)\,dt=0, \ n, k=\overline{1,\infty}.$$

Итак, получили, что при $\omega\in(-1/q, 1/p)$ и $0\in \operatorname{int}\Gamma$ система (8) минимальна. Опять применяя теорему 1 к системе $\{A(t)w^n(t); B(t)w^n(-t)\}_1^\infty$, получаем, что эта система минимальна, но не полна, и, следовательно, система (8) полна и минимальна в $L_p(-a, a)$. А теперь, если обратить внимание на то, что $\operatorname{sign} h_0^+(t)$ не влияет на полноту и минимальность системы (8), получаем, что при $\omega\in(-1/q, 1/p)$, $0\in \operatorname{int}\Gamma$ система $1\cup\{A(t)w^n(t); B(t)w^n(-t)\}_1^\infty$ полна и минимальна в $L_p(-a, a)$. Остальные случаи следуют непосредственно из теоремы 1. Теорема 4 доказана.

III. Переходим к исследованию базисных свойств системы (3). Пусть $\arg a(t)$ и $\arg b(t)$ — кусочно-непрерывные функции на отрезке $[0, l]$. Обозначим через $\{s_i\}_1^r$, $0<s_i<s_2<\ldots<s_r<l$, точки разрыва первого рода этих функций на $(0, l)$.

Пусть при некотором целом n_0 выполняется $-1/q<(\arg a(0)-\arg b(0))/\pi-n_0<1/p$. Определим целые числа n_i, $i=\overline{1,r}$, из следующих условий:

$$-1/q<h_i/2\pi+n_{i-1}-n_i<1/p, \ i=\overline{1,r}, \tag{9}$$

где $h_i=\theta(s_i+0)-\theta(s_i-0)$, $\theta(t)=\arg a(t)-\arg b(t)$.

Из теорем 1—3 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть: функции $A_0(t)$ и $B_0(t)=A_0(-t)$ удовлетворяют условиям 2), 4); $\Gamma=\varphi\{[0,l]\}\cup\psi\{[0,l]\}$ — простая, замкнутая кривая Ляпунова, $\varphi(0)=\psi(0)$, $\varphi(l)=\psi(l)$, $\varphi'(t)\psi'(t)\neq 0$ $\forall t\in[0,l]$, $\varphi'(0)=\psi'(0)$, $\varphi'(l)=\psi'(l)$ и, более того, $\arg a(l)-\arg b(l)\neq\pi/p+k\pi$ для $\forall k\in\mathbf{Z}$; целое число n_r определяется из условий (9). Система $\{v_n^-(t)\}_1^\infty$ полна в $L_p(0,l)$, $p\in(1,+\infty)$, тогда и только тогда, когда $\arg a(l)-\arg b(l)<\pi/p+n_r\pi$; минимальна в $L_p(0,l)$ тогда и только тогда, когда $0\in\operatorname{int}\Gamma$ и $\arg a(l)-\arg b(l)>(-2+1/p)\pi+n_r\pi$.*

Сначала доказывается, что при $0\in\operatorname{int}\Gamma$ и $\omega(l)=\arg a(l)-\arg b(l)\in((-2+1/p)\pi+n_r\pi, \pi/p+n_r\pi)$ система $\{v_n^-\}_1^\infty$ полна и минимальна в $L_p(0,l)$. На самом деле при $\omega(l)\in(-\pi/q+n_r\pi, \pi/p+n_r\pi)$ это следует из теорем 1, 2. Если $\omega(l)\in((-2+1/p)\pi+n_r\pi, -\pi/q+n_r\pi)$, то это следует из теорем 1, 3.

Остальные случаи доказываются аналогично теореме 1.

Как видно из следствия 1, длина интервала изменения величины $\omega(0)=\arg a(0)-\arg b(0)$ равна π, а длина интервала изменения величины $\omega(l)$ равна 2π. Чтобы расширить длину интервала изменения величины $\omega(0)$, рассмотрим базисные свойства следующих систем $\{A(t)w^n(t); B(t)w^n(2l-t)\}_1^\infty$.

Для этой системы, определенной на отрезке $[0, 2l]$, справедлива теорема, аналогичная теореме 1, в $L_p(0, 2l)$, $p \in (1, +\infty)$. Не будем здесь эту теорему формулировать.

Определим функции

$$A_1(t) = \begin{cases} a(t), & t \in (0, l), \\ b(2l-t), & t \in (l, 2l), \end{cases} \quad w_1(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (0, l); \\ \psi(2l-t), & t \in (l, 2l) \end{cases}$$

и рассмотрим систему

$$\{F_n(t)\} \equiv \{A_1(t) w_1^n(t);\ A_1(2l-t) w_1^n(2l-t)\}, \quad n = \overline{1, \infty}. \qquad (10)$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. *Система $\{F_n(t)\}_1^\infty$ полна, минимальна и образует базис в $L_p(0, 2l)$ тогда и только тогда, когда системы $\{v_n^+\}_1^\infty$ и $\{v_n^-\}_1^\infty$ соответственно полны, минимальны и образуют базисы в $L_p(0, l)$ одновременно.*

Теорема 6. *Система $1 \cup \{F_n(t)\}_1^\infty$ полна, минимальна и образует базис в $L_p(0, 2l)$ тогда и только тогда, когда системы $1 \cup \{v_n^+\}_1^\infty$ и $\{v_n^-\}_1^\infty$ соответственно полны, минимальны и образуют базисы в $L_p(0, l)$ одновременно.*

Различие составления систем $\{\Phi_n(t)\}$ и $\{F_n(t)\}$ в том, что точка $t=0$ во втором случае является начальной для отрезка $[0, 2l]$.

Применяя теорему о полноте и минимальности системы (10) и используя теоремы 5, 6, получаем, что при выполнении условий следствия 1, если $\omega(l) \in (-\pi/q + n_r\pi, \pi/p + n_r\pi)$ и $\omega(0) \in ((-2 + 1/p)\pi + n_r\pi, \pi/p + n_r\pi)$, система $\{v_n^-\}_1^\infty$ полна и минимальна в $L_p(0, l)$.

А теперь рассмотрим случай, когда $\omega(0) \in ((-2 + 1/p)\pi + n_r\pi, -\pi/q + n_r\pi)$ и $\omega(l) \in ((-2 + 1/p)\pi + n_r\pi, -\pi/q + n_r\pi)$. Докажем, что и в этом случае система $\{v_n^-\}_1^\infty$ полна и минимальна в $L_p(0, l)$. Опять, применяя теорему 1, получаем, что в этом случае система $\{A_0(t) w_0^{n+1}(t);\ A_0(-t) w_0^n(-t)\}_1^\infty$ полна и минимальна в $L_p(-l, l)$. С другой стороны, применяя следствие 1 к системе $\{v_n^+\}_2^\infty$, имеем, что она тоже полна и минимальна в $L_p(0, l)$. Из следствия 1 следует, что в этом случае система $\{v_n^-\}_1^\infty$ полна. Пусть она не минимальна в $L_p(0, l)$. С другой стороны, так как система $\{A_0(t) w_0^n(t); A_0(-t) w_0^n(-t)\}_2^\infty$ минимальна, то из теоремы 2 следует, что система $\{v_n^-\}_2^\infty$ минимальна. В результате получаем, что система $\{v_n^-\}_2^\infty$ полна и минимальна. Так как и система $\{v_n^+\}_2^\infty$ тоже полна и минимальна, то из теоремы 2 следует, что система $\{A_0(t) w_0^n(t); A_0(-t) w_0^n(-t)\}_2^\infty$ полна и минимальна в $L_p(-l, l)$. Получили противоречие, так как система $\{A_0(t) w_0^n(t); A_0(-t) w_0^n(-t)\}_2^\infty$ минимальна, но не полна. Итак, доказана следующая

Теорема 7. *Пусть относительно функций $a(t)$, $b(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ выполняются все условия следствия 1. Пусть при некотором целом n_0 имеет место*

$$-2 + 1/p < (\arg a(0) - \arg b(0))/\pi - n_0 < 1/p$$

и целое число n_r определяется из условий (9). Система $\{v_n^-\}_1^\infty$ полна в $L_p(0, l)$, $p \in (1, +\infty)$, тогда и только тогда, когда $\omega(l) < \pi/p + n_r\pi$; минимальна в $L_p(0, l)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \operatorname{int} \Gamma$ и $\omega(l) > (-2 + 1/p)\pi + n_r\pi$, где $\omega(l) = \arg a(l) - \arg b(l)$.

IV. В одном частном случае рассмотрим базисность системы

$$\{a(t) e^{i\nu(t)n} - b(t) e^{-int}\}_1^\infty \qquad (11)$$

в $L_p(0, \pi)$, $p \in (1, +\infty)$. Аналогично теореме 7 с использованием результатов работы [16] доказывается

Теорема 8. *Пусть: функция $\nu(t)$ диффеоморфно отображает отрезок $[0, \pi]$ на себя, $\nu'(t) \in C[0, \pi]$, $\nu'(t) \neq 0$ $\forall t \in [0, \pi]$, причем $\nu(0) =$*

$=0$, $\nu(\pi)=\pi$, $\nu'(0)=\nu'(\pi)=1$; *функции* $a(t)$ *и* $b(t)$ *удовлетворяют всем условиям теоремы 7; целые числа* n_0, n_r *определены из теоремы 7. Система (11) образует базис в* $L_p(0,\pi)$ *(при* $p=2$ *базис Рисса) тогда и только тогда, когда* $\omega(l)\in((-2+1/p)\pi+n_r\pi,\ \pi/p+n_r\pi)$.

Автор выражает глубокую благодарность Е. И. Моисееву за внимание к работе.

Литература

1. Джавадов М. Г.// Докл. АН СССР. 1964. Т. 159, № 4. С. 723—725.
2. Барменков А. Н. Об аппроксимативных свойствах некоторых систем функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1983.
3. Моисеев Е. И. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794—798.
4. Моисеев Е. И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177—179.
5. Седлецкий А. М.// Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1053—1056.
6. Седлецкий А. М.// Упорядоченные пространства и операторные уравнения: Межвуз. сб. науч. тр. Сыктывкар, 1990. С. 92—97.
7. Девдариани Г. Г. Базисность некоторых специальных систем собственных функций несамосопряженных дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1986.
8. Шкаликов А. А. // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 6. С. 855—860.
9. Шкаликов А. А.// Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1100—1106.
10. Билалов Б. Т.// Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 158—161.
11. Билалов Б. Т., Исмаилов Н. А.// Алгебра и математический анализ. Новосибирск, 1990. С. 130—137.
12. Билалов Б. Т.// Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 163—164.
13. Любарский Д. И., Ткаченко В. А. Полнота и минимальность специальных систем функций на множествах в комплексной плоскости. Харьков, 1985. (Препринт / Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР: 33).
14. Любарский Ю. И.// Теория функций, функц. анализ и его приложения. Харьков, 1988. № 49. С. 77—86.
15. Любарский Ю. И.// Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 6. С. 1—69.
16. Билалов Б. Т.// Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 1. С. 15—19.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17 августа 1993 г.