Г. А. Бакай, Большие уклонения момента достижения далекого нижнего уровня случайным блужданием в случайной среде, *Дискрет. матем.*, 2023, том 35, выпуск 4, 3–17

DOI: 10.4213/dm1794

Дискретная математика

том 35 выпуск 4 * 2023

УДК 519.217.31 DOI https://doi.org/10.4213/dm1794

Большие уклонения момента достижения далекого нижнего уровня случайным блужданием в случайной среде

© 2023 г. Г. А. Бакай*

Доказаны локальные теоремы о больших уклонениях для момента T_{-n} достижения уровня $-n$, $n \in \mathbb{N}$, случайным блужданием в случайной среде. Получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(T_{-n} = k)$, равномерные по таким $k \in \mathbb{N}$, что $(n-k)$ четно и отношение $k/n = k(n)/n$ принадлежит некоторому компакту.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/, в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Ключевые слова: локальные теоремы, большие уклонения, случайные блуждания в случайной среде, несобственная регенерация

1. Введение

Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены независимые и одинаково распределенные (н.о.р.) случайные величины p_i, $i \in \mathbb{Z}$, со значениями в интервале $(0,1)$. Положим $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $q_i := 1 - p_i$. Пусть на том же вероятностном пространстве определены случайные величины S_n, $n = 0, 1, 2\ldots$, $S_0 = 0$:

$$\mathbf{P}(S_{j+1} = i+1 \mid S_0, \ldots, S_{j-1},\, S_j = i,\, \mathbf{p}) = p_i,$$
$$\mathbf{P}(S_{j+1} = i-1 \mid S_0, \ldots, S_{j-1},\, S_j = i,\, \mathbf{p}) = q_i, \qquad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Последовательность случайных величин $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *случайным блужданием в случайной среде* (*СБСС*), а случайный элемент $\mathbf{p}$ называют *случайной средой*.

Первые шаги по исследованию СБСС были сделаны в [1], где были получены критерии возвратности и транзиентности блуждания. Если справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(\exists\, n \in \mathbb{N} \colon S_n = 0) = 1,$$

то блуждание называется возвратным, в противном случае — транзиентным.

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: gavrik_lur_bakay@mail.ru

Предельные теоремы для $\{S_n, n \geqslant 0\}$ были получены в [2]. Принцип больших уклонений (ПБУ) для СБСС впервые получен в [5]. Отметим также работу [6], в которой содержатся интересные уточнения результатов [5].

Дальнейшее обобщение ПБУ для СБСС содержится в [3]. В указанной работе рассмотрен случай, когда среда не является последовательностью н.о.р. величин, в котором получены ПБУ при фиксации среды и без, а также функциональный ПБУ.

Положим

$$\gamma := \mathbf{E} \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right)$$

и введем последовательность, вообще говоря, несобственных случайных величин

$$T_0 := 0, \quad T_{-n} := \min\{k \in \mathbb{N}\colon S_k = -n\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Из результатов [1] вытекает, что в случае $\gamma < 0$ величины T_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, с положительной вероятностью принимают значение $+\infty$, а именно:

$$\mathbf{P}(T_{-1} = +\infty) = \mathbf{P}(S_i \geqslant 0, i \geqslant 0) > 0.$$

Однако вероятность события $\{T_{-n} = k\}$ положительна (при таких натуральных k, n, что $k \geqslant n$ и $n - k$ четно) и поддается исследованию.

В работе автора [12] исследовались локальные вероятности больших уклонений для момента T_n, т. е. далекого высокого уровня.

Здесь получены точные асимптотики вероятностей больших уклонений для величин T_{-i}, а именно, доказано соотношение

$$\mathbf{P}(T_{-n} = k) \sim \frac{F(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\left(-L\left(\frac{k}{n}\right)n\right), \quad n \to \infty, \tag{2}$$

которое выполняется равномерно по $k \in \mathbb{N}\colon k/n \in K' \subset B'$ и $n-k$ четно. Здесь K' — произвольный компакт открытого множества B'. Множество B', а также функции F и L будут введены ниже.

Мы покажем, что последовательность величин $T_{-k}, k \in \mathbb{N}$, обладает регенерационной структурой (см. раздел 2), причем регенерация является несобственной.

Это позволяет при исследовании точных асимптотик вероятностей больших уклонений $\mathbf{P}(T_{-n} = k)$ использовать результаты [13]. Настоящая работа дополняет результаты [7] в случае несобственной регенерации. В [13] получено соотношение (2), однако необходимое условие Крамера, а также функции F и L выражены в терминах распределения случайного вектора, который в разделе 2 мы назовем циклом регенерации.

Для альтернативного выражения функций F и L в соотношении (2) и проверки условия Крамера мы воспользуемся результатом [8].

Работа организована следующим образом. Регенерационная структура последовательности величин $\{T_{-n}\}_{n\geqslant 0}$ исследуется в разделе 2. В разделе 3 содержатся предварительные сведения и введены основные обозначения. Основная теорема и ее доказательство содержатся в разделе 4. В разделе 5 доказаны вспомогательные утверждения.

2. Регенерационная структура величин T_{-n}

Определение. Будем говорить, что последовательность величин $T_{-n}, n \in \mathbb{N}$, *обладает регенерационной структурой*, если существует такое вероятностное пространство $(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}})$, на котором заданы:

1) последовательность н.о.р. случайных векторов (ξ_i, η_i), $i \in \mathbb{N}$;
2) такая последовательность с.в. $\widehat{T}_{-n}, n \in \mathbb{N}$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ распределения случайных величин T_{-n} и $\widehat{T}_{-n}$ совпадают, причем величины $\widehat{T}_{-n}$ имеют вид

$$\widehat{T}_{-n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i + \zeta_n, \quad N_n := \max\Big\{k \in \mathbb{N}\colon \sum_{j=1}^{k} \eta_j \leqslant n\Big\}, \tag{3}$$

где максимум пустого множества полагаем равным нулю, а $\{\zeta_n\}_{n\geqslant 0}$ — такая последовательность случайных величин, что при каждом натуральном l выполнено соотношение

$$\widehat{\mathbf{P}}\Big(\zeta_n = r \;\Big|\; (\xi_i, \eta_i) = (x_i, y_i),\, i \leqslant l,\, \sum_{j=1}^{l} \eta_j = n-k,\, \eta_{l+1} > k\Big) =: P_\zeta(r,k),$$

т. е. при каждом натуральном n и каждом натуральном l распределение величины ζ_n при условии события

$$\Big\{(\xi_i, \eta_i) = (x_i, y_i),\, i \leqslant l,\, \sum_{j=1}^{l} \eta_j = n-k,\, \eta_{l+1} > k\Big\}, \quad l \in \mathbb{N},$$

зависит только от k, но не от значений (x_i, y_i), $i \leqslant n-k$.

Определение 1. Регенерацию назовем *несобственной*, если η_1 — несобственная случайная величина, а именно,

$$\widehat{\mathbf{P}}(\eta_1 < +\infty) \in (0,1).$$

Определение 2. *Распределением цикла регенерации* назовем распределение случайного вектора (ξ_1, η_1).

Покажем, что последовательность величин $T_{-n}, n \in \mathbb{N}$, определенных соотношением (1), обладает несобственной регенерацией.

Пусть на пространстве $(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}})$ задана такая последовательность н.о.р. случайных величин

$$\widehat{\mathbf{p}} = \{\widehat{p}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad \widehat{q}_k := 1 - \widehat{p}_k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

что $\widehat{p}_0$ совпадает по распределению со случайной величиной p_0, которая была определена в разделе 1.

Пусть на пространстве $(\widehat{\mathbf{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}})$ задан случайный процесс $\{Z_k, k \geqslant 0\}$, который является ветвящимся процессом в случайной среде с иммиграцией по одной частице, а именно,

$$Z_0 := 0, \quad Z_{k+1} := \sum_{j=1}^{1+Z_k} \varkappa_{k,j}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Здесь случайные величины $\varkappa_{k,j}$, $k, j \geqslant 0$, при фиксации среды $\widehat{\mathbf{p}}$ независимы и имеют геометрическое распределение

$$\widehat{\mathbf{P}}(\varkappa_{k,j} = l \mid \widehat{\mathbf{p}}) := (\widehat{p}_k)^l \widehat{q}_k, \quad l \in \{0, 1, 2 \ldots\}.$$

Заметим, что процесс $\{Z_k, k \geqslant 0\}$ является однородной цепью Маркова с пространством состояний $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Введем на пространстве $(\widehat{\boldsymbol{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}})$ последовательность н.о.р. случайных векторов (ξ_i, η_i), $i \in \mathbb{N}$. Положим

$$\begin{aligned} &\tau_0 := 0, \quad \tau_i := \min\{k > \tau_{i-1} \colon Z_k = 0\}, \qquad i \in \mathbb{N}, \\ &\eta_i := \tau_i - \tau_{i-1}, \quad \xi_i := \eta_i + 2 \sum_{j=\tau_{i-1}}^{\tau_i} Z_j. \end{aligned} \tag{5}$$

Замечание 1. Марковская цепь $\{Z_n, n \geqslant 0\}$ является невозвратной при $\gamma < 0$. Величина γ была определена ранее:

$$\gamma = \mathbf{E} \ln \frac{q_0}{p_0} = \widehat{\mathbf{E}} \ln \frac{\widehat{q}_0}{\widehat{p}_0}.$$

Для определения на пространстве $(\widehat{\boldsymbol{\Omega}}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbf{P}})$ величин $\widehat{T}_{-n}$ нам потребуются дополнительные обозначения. Положим при каждом натуральном n

$$Z_k(n) := Z_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \qquad Z_{k+1}(n) := \sum_{j=2}^{1+Z_k} \varkappa_{k,j}, \quad k > n.$$

При каждом натуральном n процесс $\{Z_i(n), i \geqslant 0\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде с иммиграцией по одной частице в первых n поколениях.

Положим

$$\widehat{T}_{-n} := n + 2 \sum_{i=0}^{+\infty} Z_i(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В силу невозвратности цепи $\{Z_n, n \geqslant 0\}$ величины $\widehat{T}_{-n}$ с положительной вероятностью равны $+\infty$. Однако конечные значения также принимаются с ненулевой вероятностью, например,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{P}}\big(\widehat{T}_{-n} = n\big) = \widehat{\mathbf{P}}(Z_1 = 0, \ldots, Z_n = 0) = \widehat{\mathbf{E}}\big(\widehat{\mathbf{P}}_{\widehat{\mathbf{p}}}(Z_1 = 0, \ldots, Z_n = 0)\big) \\ = \widehat{\mathbf{E}} \prod_{k=1}^{n} \widehat{q}_k = \big(\widehat{\mathbf{E}}\widehat{q}_0\big)^n > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что величины $\widehat{T}_{-n}$ допускают представление

$$\widehat{T}_{-n} = \sum_{j=1}^{N_n} \xi_j + \zeta_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где в силу марковского свойства цепи $\{Z_n, n \geqslant 0\}$ при каждом натуральном l выполнено

$$\widehat{\mathbf{P}}(\zeta_n = r \mid (\xi_i, \eta_i) = (x_i, y_i), i \leqslant l, \tau_l = n - k, \eta_{l+1} > k) \\ = P_\zeta(r, k) = \widehat{\mathbf{P}}\big(\widehat{T}_{-k} = r \mid k < \eta_1 < +\infty\big).$$

Для доказательства наличия регенерационной структуры в последовательности величин T_{-n} остается показать, что при каждом n распределения величин T_{-n} и $\widehat{T}_{-n}$ совпадают. Справедливо следующее утверждение (см., например, [4]).

Лемма 1. *При любых $n, k \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}(T_{-n} = k) = \widehat{\mathbf{P}}\big(\widehat{T}_{-n} = k\big).$$

Таким образом, наличие регенерационной структуры для последовательности величин $T_{-n}, n \in \mathbb{N}$, доказано. Отметим, что регенерация является несобственной, так как цепь $\{Z_n, n \geqslant 0\}$ является невозвратной.

3. Предварительные сведения

Сформулируем известные результаты об асимптотике вероятностей больших уклонений для величин, обладающих несобственной регенерационной структурой.

Ниже мы приведем элементы общей теории (используя обозначения, введенные в разделе 2), которые в дальнейшем применим к частной задаче, поставленной в разделе 1.

Пусть последовательность величин $\widehat{T}_{-n}$ обладает несобственной регенерационной структурой вида (3). Положим

$$R(h,t) := \mathbf{E}(\exp(h\xi_1 + t\eta_1); \eta_1 < +\infty) = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(tk)\mathbf{E}(\exp(h\xi_1); \eta_1 = k),$$

$$\widehat{r}_k(h) := \sum_r \exp(hr) P_\zeta(r,k), \quad \widehat{R}(h,t) := \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(tk)\widehat{r}_k(h)\mathbf{P}(k < \eta_1 < +\infty).$$

Введем множество

$$B := \operatorname{int}\{h \in \mathbb{R} \colon \exists\, t\ 1 < R(h,t) < +\infty\}.$$

На множестве B зададим неявную функцию $t_0(h)$ соотношением

$$t_0(h) \colon R(h, t_0(h)) = 1, \quad h \in B,$$

и положим

$$\widehat{G}(h) := \widehat{R}(h, t_0(h)).$$

Пусть

$$\widehat{B} := \operatorname{int}\{h \in B \colon \widehat{G}(h) < +\infty\}, \quad \widehat{B}' := \{-t_0'(h) \colon h \in \widehat{B}\}.$$

Помимо условий на функции $R(h,t)$ и $\widehat{R}(h,t)$ в [13] накладываются условия на носитель распределения вектора (ξ_1, η_1).

Определение 3. Несобственное распределение вектора (ξ_1, η_1) назовем сильно арифметическим, если выполнены следующие условия.

1) Распределение невырождено, т. е. для произвольных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ случайная величина $c_1\xi_1 + c_2\eta_1$ не является константой.
2) Распределение вектора сильно решетчато, т. е. существуют такие матрица S и вектор b, что
$$\mathbf{P}((\xi_1, \eta_1) \in b + S\mathbb{Z}^2 \mid \eta_1 < +\infty) = 1.$$
Будем считать, что b и S выбираются таким образом, что S имеет наибольший возможный определитель.
3) Решетка распределения (ξ_1, η_1) «вертикальна», т. е. матрица S может быть выбрана такой, что $S_{1,2} = S_{2,1} = 0$. Элемент $S_{2,2}$ равен единице, иными словами, условное распределение величины η_1 при условии события $\{\eta_1 < +\infty\}$ является арифметическим. Величину $S_{1,1}$ будем обозначать d_ξ и называть *показателем решетчатости.*
4) Величину b в 2) можно выбрать равной 0.
5) Для произвольного $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнено следующее соотношение: если $P_\zeta(r, k) > 0$, то $r \in d_\xi\mathbb{Z}$.

Замечание 2. В [13] в определении сильно арифметического распределения не было условия 5), так как не рассматривались более общие регенерационные структуры. Аналогом этого условия является условие LC3) в [8].

Дополнительно отметим, что условие 3) в [13] вводится более общо, нет требования $S_{2,2} = 1$ (в многомерном случае $S_{d+1,d+1} = 1$, где d — размерность вектора ξ_1).

Теорема 1 ([13, теорема 1, часть 2])**.** *Пусть последовательность величин $\widehat{T}_{-n}$ обладает регенерационной структурой вида* (3)*, причем вектор* (ξ_1, η_1) *имеет сильно арифметическое распределение с показателем решетчатости d_ξ. Пусть множество $\widehat{B}'$ непусто. Тогда*

$$\mathbf{P}\big(\widehat{T}_{-n} = k\big) \sim \frac{F(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\biggl(-L\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)n\biggr), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Для любого компакта $K' \subset \widehat{B}'$ соотношение выполняется равномерно по таким $k = k(n) \in \mathbb{N}$, что $k/n \in K'$ и $k - n$ четно.

Здесь

$$L(\theta) := \theta h_\theta + t_0(h_\theta), \quad F(\theta) := d_\xi G(h_\theta), \quad h_\theta\colon -t_0'(h_\theta) = \theta, \qquad \theta \in \widehat{B}',$$
$$G(h) := \frac{\alpha(h)\widehat{G}(h)}{\sqrt{2\pi(-t_0''(h))}}, \quad \alpha(h) := (R_t'(h,t)|_{h,t_0(h)})^{-1}, \qquad h \in \widehat{B}.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема, полученная в [8]. Чтобы избежать дополнительных обозначений, сформулируем ее в терминах настоящей статьи. Введем события

$$C_n := \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \{\eta_1 + \dots + \eta_j = n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть последовательность случайных величин $\widehat{T}_{-n}$ обладает регенерационной структурой вида* (3), *причем вектор* (ξ_1, η_1) *имеет арифметическое распределение с показателем решетчатости* d_ξ. *Пусть* $H \subset \mathbb{R}$ — *некоторое открытое множество и* $K \subset H$ — *такой компакт, что при некотором* $\delta = \delta(K) \in (0,1)$ *выполнены следующие соотношения*:

$$\mathbf{E}\big(\exp\big(h\widehat{T}_{-n}\big); C_n\big) = \rho^n(h)(\rho_0(h) + \delta^n o(1)), \tag{8}$$

$$\widehat{r}_n(h)\mathbf{P}(n < \eta_1 < +\infty) = \rho^n(h)(\delta^n o(1)), \quad n \to \infty, \tag{9}$$

где $o(1)$ *равномерно мало по* $h \in K$, *функция* $\rho(h)$ *положительна и непрерывна на* H, *а функция* $\rho_0(h)$ *положительна, ограничена и отделена от нуля на* K. *Тогда множество* $\widehat{B}$ *непусто*, $H \subset \widehat{B}$, *справедливо соотношение* (7) *и*

$$\rho(h) = \exp(-t_0(h)), \quad \alpha(h) = \rho_0(h).$$

Замечание 3. В [13] рассматривался более частный случай несобственной регенерации, а именно, $P_\zeta(0,k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, или $\widehat{r}_k(h) = 1$. По сравнению с этим частным случаем асимптотика вероятностей $\mathbf{P}\big(\widehat{T}_{-n} = k\big)$ незначительно изменяется: изменятся функция $D_2(\theta)$ (заданная в [13] соотношением (3.7)), которая приобретет вид

$$d_\xi \sqrt{2\pi(-t_0''(h_\theta))}\alpha(h_\theta)\widehat{G}(h_\theta, t_0(h_\theta)),$$

и зона уклонений, а именно, множество допустимых значений $\theta = k/n$. В [13] таковым является множество

$$\operatorname{int}\{-t_0'(h)\colon t_0(h) < 0,\, h \in B\},$$

т. е. множество таких θ, при которых функция $D_2(\theta) < +\infty$. В более общем случае этому множеству соответствует

$$\operatorname{int}\big\{-t_0'(h)\colon \widehat{G}(h, t_0(h)) < +\infty, h \in B\big\} = \widehat{B}'.$$

Замечание 4. Отметим, что введенные в разделе 2 случайный вектор (ξ_1, η_1) и распределения $\{P_\zeta(r,k), r \in \mathbb{Z}\}$, $k \geqslant 0$, не удовлетворяют определению сильной арифметичности. Однако, переходя от величин $\widehat{T}_{-n}$ к $\widehat{T}_{-n} - n$, нетрудно показать, что последовательность величин $\widehat{T}_{-n} - n$ обладает регенерационной структурой, т. е. справедливо представление

$$\widehat{T}_{-n} - n = \sum_{i=1}^{N_n} \widetilde{\xi}_i + \widetilde{\zeta}_n, \quad N_n = \max\bigg\{k \in \mathbb{N}\colon \sum_{j=1}^{k} \eta_j \leqslant n\bigg\}.$$

Здесь для произвольного $i \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\widetilde{\xi}_i = \xi_i - \eta_i = 2\sum_{j=\eta_{i-1}}^{\eta_i} Z_j, \quad P_{\widetilde{\zeta}}(r,k) = P_\zeta(k+r,k) = \widehat{P}\big(\widehat{T}_{-k} - k = r \mid k < \eta_1 < +\infty\big).$$

Случайный вектор $\big(\widetilde{\xi}_1, \eta_1\big)$ и набор распределений $P_{\widetilde{\zeta}}(r,k)$ удовлетворяют определению сильной арифметичности, и показатель решетчатости равен 2, поэтому при доказательстве соотношения (2) и отыскании фигурирующих в нем функций F и L можно использовать теоремы 1 и 2.

Таким образом, доказательство основного соотношения (2) сводится к проверке условий теоремы 2, так как наличие несобственной регенерационной структуры величин $\{T_{-n}\}_{n\geqslant 0}$ уже доказано в разделе 2.

4. Основная теорема

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть последовательность случайных величин* $\{T_{-n}\}_{n\geqslant 0}$ *задана соотношением* (1) *и* $\mathbf{E}\ln(q_0/p_0) < 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(T_{-n} = k) \sim \frac{F(k/n)}{\sqrt{n}} \exp\biggl(-L\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)n\biggr), \tag{10}$$

соотношение выполнено равномерно по таким k, *что* $n-k$ *четно и отношение* k/n *принадлежит некоторому компакту* $K' \subset B'$. *Здесь, как и прежде,*

$$L(\theta) = \theta h_\theta - \ln\rho(h_\theta), \quad h_\theta\colon (\ln\rho)'(h_\theta) = \theta, \qquad \theta \in B',$$

$$B' := \{(\ln\rho)'(h)\colon h < 0\}, \quad F(\theta) = \frac{2G(h_\theta)}{\sqrt{2\pi((\ln\rho)''(h_\theta))}},$$

$$G(h) = \rho_0(h)\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^{-k}(h)\widehat{\mathbf{E}}\exp\bigl(h\widehat{T}_{-k}; k < \eta_1 < +\infty\bigr).$$

Функции $\rho(h)$ *и* $\rho_0(h)$ *определены соотношением* (19), *фигурирующие в нем функция* $\lambda(h)$ *и элементы* ψ_h *и* f_h *определены соотношением* (17).

Замечание 5. Отметим, что выражения для функций уклонений $L(\theta)$ могут быть получены из теоремы 2 работы [5].

Доказательство основной теоремы 3. Для доказательства теоремы достаточно получить точные асимптотики вероятностей больших уклонений для величин $\widehat{T}_{-n}$, введенных в разделе 2, а именно,

$$\widehat{\mathbf{P}}\bigl(\widehat{T}_{-n} = k\bigr).$$

Действительно, в силу леммы 1 вероятности $\widehat{\mathbf{P}}\bigl(\widehat{T}_{-n} = k\bigr)$ и $\mathbf{P}(T_{-n} = k)$ совпадают при всех натуральных k.

Мы покажем, что из условий теоремы 3 вытекает выполнение условий теоремы 2. Наличие несобственной регенерационной структуры величин $T_{-n}, n \geqslant 0$, напомним, уже было показано в разделе 2.

Выберем в качестве множества H луч $(-\infty, 0)$ и докажем справедливость соотношения (8). Заметим, что в силу определения величин $\eta_i, i \geqslant 1$ (соотношение (5)), событие C_n может быть представлено следующим образом:

$$C_n = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}\{\eta_1 + \cdots + \eta_k = n\} = \{Z_n = 0\}.$$

Ввиду (6) выражение в левой части соотношения (8) можно представить в виде

$$\widehat{\mathbf{E}}\big(\exp\big(h\widehat{T}_{-n}\big); C_n\big) = \widehat{\mathbf{E}}\Big(\exp\Big(h\Big(n + 2\sum_{i=0}^{n} Z_i\Big)\Big); Z_n = 0\Big), \quad h < 0. \tag{11}$$

Покажем, что правую часть тождества (11) можно вычислить как действие n-й степени некоторого оператора на некоторые вектор и ковектор.

Введем на пространстве

$$l^1 := \Big\{x = (x_0, x_1, \dots)\colon \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| < \infty\Big\}, \quad \|x\| := \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|,$$

следующие операторы:

$$\begin{aligned} &P_{\mathrm{tr}}\colon l^1 \to l^1, \quad (xP_{\mathrm{tr}})_j := \sum_{i=0}^{+\infty} x_i (P_{\mathrm{tr}})_{i,j}, \quad (P_{\mathrm{tr}})_{i,j} := \widehat{\mathbf{P}}(Z_2 = j \mid Z_1 = i),\\ &e^{hG}\colon l^1 \to l^1, \quad \big(xe^{hG}\big)_j := x_j \exp(h(1+2j)), \qquad i, j \geqslant 0,\\ &Q(h) := P_{\mathrm{tr}} e^{hG}, \quad Q(h)\colon l^1 \to l^1, \quad xQ(h) := (xP_{\mathrm{tr}})e^{hG}, \qquad x \in l^1. \end{aligned} \tag{12}$$

Оператор P_{tr} есть переходный оператор цепи $\{Z_i, i \geqslant 0\}$, оператор $\exp(hG)$ является диагональным. Отметим, что оператор $Q(h)$ действует на пространстве l_1 следующим образом:

$$(xQ(h))_j = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \widehat{\mathbf{E}}(\exp(h(1+2Z_1)) I(Z_1 = j) \mid Z_0 = i),$$

а сопряженный к $Q(h)$ оператор действует на пространстве l^∞ по формуле

$$Q(h)[f](i) = \widehat{\mathbf{E}}(\exp(h(1+2Z_1)) f(Z_1) \mid Z_0 = i), \quad f \in l^\infty.$$

Здесь и далее во избежание дополнительных обозначений для сопряженных операторов действие $Q(h)$ на пространстве l^1 будем записывать формулой $xQ(h)$, т. е. умножать на «строку» x слева. А действие сопряженного к $Q(h)$ оператора на пространстве l^∞ будем записывать $Q(h)f$, т. е. умножать на «столбец» f справа.

Воспользуемся введенными операторами для вычисления правой части соотношения (11). Имеем

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{E}}\Big(\exp\Big(h\Big(n + 2\sum_{i=0}^{n} Z_i\Big)\Big); Z_n = 0\Big) = \langle \pi_0 Q^n(h), e_0\rangle,\\ &\pi_0 = (1, 0, 0\dots) \in l_1, \quad e_0 = (1, 0, 0\dots) \in l^\infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Покажем, что левую часть соотношения (9) можно представить в виде действия n-й степени оператора на некоторые вектор и ковектор. Введем события

$$B_Z(n) := \{Z_1 > 0, \dots, Z_n > 0\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что при всех натуральных n и $h < 0$ выполнено

$$\begin{aligned} \widehat{r}_n(h)\widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) &= \widehat{\mathbf{E}}\bigl(\exp\bigl(h\widehat{T}_{-n}\bigr); B_Z(n), \eta_1 < +\infty\bigr) \\ &= \widehat{\mathbf{E}}\bigl(\exp\bigl(h\widehat{T}_{-n}\bigr); B_Z(n)\bigr) \leqslant \widehat{\mathbf{E}}\Bigl(\exp\Bigl(h\Bigl(n + 2\sum_{i=0}^{n} Z_i\Bigr)\Bigr); B_Z(n)\Bigr), \end{aligned} \tag{14}$$

так как величина $\widehat{T}_{-n}$ равна $+\infty$ на событии $\{\eta_1 = +\infty\}$.

Покажем, что правую часть соотношения (14) также можно представить как действие n-й степени некоторого оператора на некоторые вектор и ковектор. Введем на пространстве l^1 оператор

$$\begin{aligned} &\widehat{P}_{\mathrm{tr},0}\colon l^1 \to l^1, \quad \bigl(x\widehat{P}_{\mathrm{tr},0}\bigr)_j := \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \bigl(\widehat{P}_{\mathrm{tr},0}\bigr)_{i,j}, \\ &\bigl(\widehat{P}_{\mathrm{tr},0}\bigr)_{i,0} := 0, \quad \bigl(\widehat{P}_{\mathrm{tr},0}\bigr)_{i,j} := (P_{\mathrm{tr}})_{i,j}, \qquad i \geqslant 0, \quad j \in \mathbb{N}, \\ &\widehat{Q}_0(h) := \widehat{P}_{\mathrm{tr},0} e^{hG}, \quad x\widehat{Q}_0(h) = \bigl(x\widehat{P}_{\mathrm{tr},0}\bigr)e^{hG}, \qquad x \in l^1. \end{aligned} \tag{15}$$

Сопряженный к $\widehat{Q}_0(h)$ оператор на пространстве l^∞ действует следующим образом:

$$\widehat{Q}_0(h)[f](i) = \widehat{\mathbf{E}}(\exp(h(1 + 2Z_1))I(Z_1 > 0)f(Z_1) \mid Z_0 = i), \quad f \in l^\infty.$$

Тогда правая часть соотношения (14) принимает следующий вид:

$$\widehat{\mathbf{E}}\Bigl(\exp\Bigl(h\Bigl(n + 2\sum_{i=0}^{n} Z_i\Bigr)\Bigr); B_Z(n)\Bigr) = \langle \pi_0 \widehat{Q}_0^n(h), e_1 \rangle, \quad e_1 := (1, 1, 1, \dots). \tag{16}$$

Мы показали, что левая часть соотношения (8) совпадает с правой частью соотношения (13), а левая часть соотношения (9) оценивается сверху правой частью соотношения (16).

Положим

$$\begin{aligned} K_+ &:= \{x \in l^1 \colon x_i \geqslant 0, i \geqslant 0\}, \quad K_+^0 := \{x \in l^1 \colon x_i > 0, i \geqslant 0\}, \\ K_+^* &:= \{y \in l^\infty \colon y_i \geqslant 0, i \geqslant 0\}, \quad \bigl(K_+^0\bigr)^* := \{y \in l^\infty \colon y_i > 0, i \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\lambda(h) := \max\{|z| \colon z \in \operatorname{spec}(Q(h))\}, \quad \lambda_0(h) := \max\bigl\{|z| \colon z \in \operatorname{spec}\bigl(\widehat{Q}_0(h)\bigr)\bigr\}.$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется лемма, доказательство которой проведем позднее.

Лемма 2. *Пусть на пространстве l^1 при $h \in H$ заданы семейства операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ со следующими свойствами.*

(1) *Операторы $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ непрерывно зависят от h.*

(2) *При каждом $h \in H$ оператор $Q(h)$ компактен.*

(3) *При каждом $h \in H$ для произвольного $x \in K_+$ выполнены соотношения*

$$xQ(h) \in K_+, \quad x\big(Q(h) - \widehat{Q}_0(h)\big) \in K_+$$

и существует такой $x_0 \in K_+ \backslash \{0\}$, что $x_0 Q(h) \neq x_0 \widehat{Q}_0(h)$.

(4) *При каждом $h \in H$ существует такое $\lambda\colon \lambda > \lambda(h)$, что для произвольного ненулевого $x \in K_+$ и $d \in \mathbb{N}$*

$$x \sum_{n=1}^{+\infty} Q^{dn}(h) \lambda^{-dn} \in K_+^0.$$

(5) *При каждом $h \in H$ существуют такие $x_0(h) \in K_+$ и $\varepsilon(h) > 0$, что выполнено соотношение*

$$(x_0(h)Q(h) - \varepsilon(h)x_0(h)) \in K_+^0.$$

Тогда

a) *при каждом $h \in H$ величина $\lambda(h)$ положительна и существуют такие $\psi_h \in K_+^0$ и $f_h \in \big(K_+^0\big)^*$, что выполнены соотношения*

$$\psi_h Q(h) = \lambda(h)\psi_h, \quad Q(h)f_h = \lambda(h)f_h, \quad \langle \psi_h, f_h \rangle = 1, \quad \lambda(h) > \lambda_0(h); \tag{17}$$

b) *размерность корневого подпространства оператора $Q(h)$, соответствующего собственному значению $\lambda(h)$, равна 1, $\lambda(h)$ непрерывно зависит от h;*

c) *проектор $\psi_h\langle \cdot, f_h\rangle$ непрерывно зависит от h, в частности, для произвольных $x \in l^1$ и $y \in l^\infty$ функция*

$$\langle x, f_h\rangle\langle \psi_h, y\rangle$$

непрерывна по h;

d) *для любого компактного подмножества $K \subset H$ существует такое $\delta_0 = \delta_0(K) \in (0,1)$, что при $h \in K$ выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} &\lambda_0(h) < \delta_0 \lambda(h), \quad \lambda_J(h) < \delta_0\lambda(h), \quad \lambda_J(h) := \max\{|z|\colon z \in \operatorname{spec}(J(h))\}, \\ &J(h)\colon l^1 \to l^1, \quad xJ(h) := xQ(h) - \lambda(h)\psi_h\langle x, f_h\rangle, \qquad x \in l^1. \end{aligned} \tag{18}$$

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого мы проведем позднее.

Лемма 3. *Пусть семейства операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ определены соотношениями (12) и (15) при $h \in (-\infty, 0)$. Тогда данные операторы удовлетворяют условиям леммы 2.*

В силу определения оператора $J(h)$ имеем

$$xQ^n(h) = xJ^n(h) + \lambda^n(h)\psi_h\langle x, f_h\rangle, \qquad x \in l^1, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда

$$\langle \pi_0 Q^n(h), e_0 \rangle = \lambda^n(h) \langle \pi_0, f_h \rangle \langle \psi_h, e_0 \rangle + \langle \pi_0 J^n(h), e_0 \rangle.$$

Таким образом, в силу соотношения (18) при $h \in K$ при некотором $\delta \in (\delta_0, 1)$ справедливо соотношение

$$\langle \pi_0 Q^n(h), e_0 \rangle = \lambda^n(h)(\langle \pi_0, f_h \rangle \langle \psi_h, e_0 \rangle + \delta^n o(1)),$$

где $o(1)$ равномерно мало при $h \in K$.

Для доказательства соотношения (8) остается положить

$$\rho(h) := \lambda(h), \quad \rho_0(h) := \langle \pi_0, f_h \rangle \langle \psi_h, e_0 \rangle = f_h(0) \psi_h(0). \tag{19}$$

Здесь, как и прежде, $\pi_0 = (1, 0, 0, \dots) \in l^1$ и $e_0 = (1, 0, 0, \dots) \in l^\infty$.

Функции $\rho(h)$ и $\rho_0(h)$ положительны и непрерывны на H.

Остается доказать справедливость соотношения (9). В силу соотношений (14) и (16) имеем

$$\widehat{r}_n(h) \widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) \leqslant \big\langle \pi_0 \widehat{Q}_0^n(h), e_1 \big\rangle,$$

откуда, в силу соотношения (18), следует, что справедливо соотношение

$$\widehat{r}_n(h) \widehat{\mathbf{P}}(n < \eta_1 < +\infty) = \lambda^n(h) \delta^n o(1), \qquad n \to \infty, \quad h \in K,$$

при некотором $\delta \in (\delta_0, 1)$, где $o(1)$ равномерно мало по $h \in K$.

Таким образом, доказано, что в условиях теоремы 3 выполнены условия теоремы 2, откуда вытекает справедливость соотношения (10). □

5. Доказательства вспомогательных утверждений

Доказательство леммы 2. Данное утверждение является собранными воедино леммами 2–5 работы [12].

В силу условия 2 при каждом $h \in H$ оператор $Q(h)$ компактен, соответственно, ненулевые значения спектра являются собственными значениями конечной кратности. Условие 3 влечет неотрицательность оператора, из которой вытекает, что величина

$$\lambda(h) = \max\{|z| \colon z \in \operatorname{spec}(Q(h))\}$$

принадлежит спектру ([9, предложение 1]). Условие 5 гарантирует положительность величины $\lambda(h)$ в силу предложения 3 работы [9]. Таким образом, при каждом $h \in H$ величина $\lambda(h)$ принадлежит спектру компактного оператора $Q(h)$ и является положительной, поэтому $\lambda(h)$ является собственным значением оператора $Q(h)$.

Условие 4 означает неразложимость («quazi-interior» в терминологии [9]) любой степени оператора $Q(h)$, в частности, первой степени. Отсюда вытекает, что применима теорема 2 работы [9], которая гарантирует существование элементов f_h и ψ_h с положительными координатами и простоту собственного значения $\lambda(h)$ оператора $Q(h)$. Таким образом, доказана первая часть леммы.

Для любого натурального d, применяя ту же теорему к оператору $Q^d(h)$, получаем, что $\lambda^d(h)$ является его простым собственным значением, т. е. имеет геометрическую кратность 1 и, разумеется, те же собственные векторы ψ_h и f_h.

Покажем, что простота $\lambda^d(h)$ как собственного значения оператора $Q^d(h)$ при каждом $h \in H$ и произвольном натуральном d означает, что у оператора $Q(h)$ нет собственных значений вида $\exp(2i\pi\alpha)\lambda(h)$ при $\alpha \in \mathbb{Q}$, где i — мнимая единица. Действительно, предположим противное: пусть есть такое рациональное число $\alpha = m/l$, $l \in \mathbb{N}$, что $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ лежит в спектре $Q(h)$. Тогда существует такой $x_\alpha \in l^1$, что

$$x_\alpha Q(h) = \exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)x_\alpha.$$

Тогда

$$x_\alpha Q^l(h) = \exp(2\pi i\alpha l)\lambda^l(h)x_\alpha = \exp(2\pi i m)\lambda^l(h)x_\alpha = \lambda^l(h)x_\alpha, \quad x_\alpha \neq 0.$$

Таким образом, вектор x_α является собственным для оператора $Q^l(h)$ с собственным значением $\lambda^l(h)$, что противоречит простоте этого собственного значения.

Для доказательства того, что оператор $Q(h)$ не имеет собственных значений вида $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ при иррациональных α, воспользуемся результатом работы [14], а именно теоремой 1 и ее следствием. Сформулируем ее в терминах данной работы.

Теорема 4. *Пусть на пространстве l^1 задан неотрицательный оператор Y со спектральным радиусом* 1. *Здесь неотрицательность означает, что выполнено соотношение*

$$\forall\, x \in K_+ \quad xY \in K_+.$$

Предположим также, что существует такой $u \in (K_+^0)^*$, что $(u - Yu) \in (K_+)^*$, или, что то же самое, $(Yu)_j \leqslant u_j$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда если число $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, является собственным для оператора Y, а именно, существует такой элемент $0 \neq x \in l^1$, что

$$xY = \beta x, x = (x_0, x_1, \dots),$$

то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ значение β^n также является собственным, и более того,

$$|x|g^nY = \beta^n|x|g^n, \quad |x| = (|x_0|, |x_1|, \dots), \quad |x|g^n = (|x_0|g_0^n, |x_1|g_1^n, \dots) \in l^1.$$

Здесь g — такой вектор из l^∞, что выполнено соотношение $|g_i| = 1$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Применим теорему 4 для доказательства того, что оператор $Q(h)$ не имеет собственных значений вида $\exp(2\pi i\alpha)\lambda(h)$ при иррациональных α. Предположим противное. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\exp((2\pi i\alpha)n) \in \operatorname{spec}\bigl\{\lambda^{-1}(h)Q(h)\bigr\}.$$

Множество $\{\exp((2\pi i\alpha)n), n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно на окружности радиуса 1, но тогда спектр $\lambda^{-1}(h)Q(h)$, будучи компактным подмножеством $\mathbb{C}$, обязан содержать всю окружность. А это противоречит компактности оператора $Q(h)$.

Таким образом, условия 1, 2, 4, 5 леммы 2 гарантируют, что на окружности

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \lambda(h)\}$$

оператор $Q(h)$ имеет единственное и простое собственное значение $\lambda(h)$.

Утверждение теоремы 2 о том, что $\lambda_0(h)$ меньше $\lambda(h)$, где, как и прежде,

$$\lambda_0(h) = \max\bigl\{|z|\colon z \in \operatorname{spec}\bigl(\widehat{Q}_0(h)\bigr)\bigr\},$$

есть следствие теоремы 4.3 работы [11].

Утверждения леммы о непрерывности $\lambda(h)$ и проектора на корневое подпространство, существование такого $\delta_0 \in (0,1)$, что при всех $h \in K$ выполнено соотношение

$$\max(\lambda_0(h), \lambda_J(h)) < \delta_0 \lambda(h),$$

есть следствие результатов, приведенных в [10, глава 3, с. 264–271]. Отметим, что в работе автора [12] этот вывод был проделан. □

Доказательство леммы 3. Проверим, что операторы $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ удовлетворяют условиям леммы 2.

Покажем, что оператор $Q(h)$ сходится по операторной норме к $Q(h_0)$ при $h \to h_0$. На пространстве l^1 норма оператора Y определяется соотношением

$$\|Y\| := \sup_{i \geqslant 0}\biggl(\sum_{j=0}^{+\infty} |Y_{ij}|\biggr), \quad (xT)_j = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i Y_{ij}, x \in l^1.$$

В силу определений операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ (соотношения (12) и (15))

$$Q(h) = P_{\mathrm{tr}} e^{hG}, \quad \widehat{Q}_0(h) = \widehat{P}_{\mathrm{tr},0} e^{hG}, \qquad h < 0,$$

таким образом, для доказательства непрерывной зависимости семейств операторов $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ достаточно доказать сходимость e^{hG} к $e^{h_0 G}$. Имеем:

$$\|e^{hG} - e^{h_0 G}\| = \sup_{i \geqslant 0}\biggl(\sum_{j=0}^{+\infty} \bigl|(e^{hG})_{ij} - (e^{h_0 G})_{ij}\bigr|\biggr) = \sup_{i \geqslant 0}\bigl|e^{h(1+2i)} - e^{h_0(1+2i)}\bigr|.$$

Величина в правой части последнего соотношения стремится к нулю, так как $h \to h_0 < 0$. Непрерывная зависимость семейства $\widehat{Q}_0(h)$ проверяется аналогично.

Докажем компактность $Q(h)$ при каждом $h < 0$. Оператор $Q(h)$ является композицией непрерывного оператора P_{tr} и компактного e^{hG}. Компактность последнего следует из того, что его можно приблизить конечномерными. Действительно, положим

$$e^{hG_n}\colon l^1 \to l^1, \quad \bigl(xe^{hG_n}\bigr)_i := x_i e^{h(1+2i)}, \quad i < n, \qquad \bigl(xe^{hG_n}\bigr)_i := 0, \quad i \geqslant n.$$

Тогда

$$\bigl\|e^{hG} - e^{h_0 G_n}\bigr\| = \sup_{i \geqslant n}\bigl|e^{h(1+2i)}\bigr| \to 0, \quad h < 0.$$

Условие 3 леммы 2, очевидно, выполнено.

Выполнение условия 4 вытекает из строгой положительности оператора $Q(h)$, а именно из соотношения

$$(Q(h))_{i,j} = (P_{\mathrm{tr}})_{i,j} e^{h(1+2j)} > 0, \quad i, j \geqslant 0.$$

Остается проверить условие 5. Положим

$$x_0(h) := e_0 = (1, 0, 0, \dots).$$

Тогда для доказательства выполнения условия 5 достаточно показать, что нулевая координата вектора $e_0 Q(h)$ положительна. Действительно,

$$(e_0 Q(h))_0 = \mathbf{E}\big(e^{h(1+2Z_1)} I(Z_1 = 0)\big) = e^h \mathbf{E} q_0 =: \varepsilon(h)$$

в силу определения процесса $\{Z_k, k \geqslant 0\}$ (см. соотношение (4)). Таким образом, $(x_0(h)Q(h) - \varepsilon(h)x_0(h)) \in K_+$, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что семейства $Q(h)$ и $\widehat{Q}_0(h)$ удовлеторяют условиям леммы 2. $\square$

Список литературы

1. Solomon F., "Random walks in a random environment", *Ann. Probab.*, **3**:1 (1975), 1–31.
2. Kesten H., Kozlov M. V., Spitzer F., "A limit law for random walk in a random environment", *Compos. Math.*, **30**:2 (1975), 145–168.
3. Comets F., Gantert N., Zeitouni O., "Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment", *Probab. Theory Relat. Fields*, **118**:1 (2000), 65–114.
4. Афанасьев В. И., "Двуграничная задача для случайного блуждания в случайной среде", *Теория вероятн. и ее примен.*, **63**:3 (2018), 417–430.
5. Greven A., den Hollander F., "Large deviations for a random walk in random environment", *Ann. Probab.*, **22**:3 (1994), 1381–1428.
6. Dembo A., Peres Y., Zeitouni O., "Tail estimates for one-dimensional random walk in random environment", *Comm. Math. Physics*, **181**:3 (1996), 667–683.
7. Могульский А. А., "Локальные теоремы для арифметических обобщенных процессов восстановления при выполнении условия Крамера", *Сиб. электр. матем. изв.*, **16** (2019), 21–41.
8. Бакай Г. А., "О характеризации вероятностей больших уклонений для регенерирующих последовательностей", *Труды МИАН*, **316** (2022), 47–63.
9. Schaefer H. H., "Some spectral properties of positive linear operators", *Pacific J. Math.*, **10**:3 (1960), 1009–1019.
10. Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, М.: Мир, 1972, 740 с.
11. Marek I., "Frobenius theory of positive operators: comparison theorems and applications", *SIAM J. Appl. Math.*, **19**:3 (1970), 607–628.
12. Бакай Г. А., "О больших уклонениях момента достижения далекого уровня случайным блужданием в случайной среде", *Дискретная математика*, **34**:4 (2022), 3–13.
13. Бакай Г. А., "Большие уклонения для обрывающегося обобщенного процесса восстановления", *Теория вероятн. и ее примен.*, **66**:2 (2021), 261–283.
14. Schaefer H. H., "On the point spectrum of positive operators", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:1 (1964), 56–60.

Статья поступила 06.09.2023.