Н. С. Уртенов, Оценки снизу для субгармонических функций конечного порядка,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 85–87

Н. С. Уртенов

УДК 517.53

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Пусть U — субгармоническая функция в C конечного порядка $\rho>0$; μ — мера, ассоциированная по Риссу с U. Введем обозначения:

$$A_U(r)=\inf_{|z|=r} U(z),\quad B_U(r)=\max_{|z|=r} U(z),$$

$$n(t)=n((0,\,t])=\mu(\{z:|z|\leqslant t\}),\quad N(t)=\int_0^t \frac{n(\tau)}{\tau}\,d\tau,$$

$$\overline{\sigma}=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{n(t)}{t^\rho},\quad \underline{\sigma}=\varliminf_{t\to\infty}\frac{n(t)}{t^\rho},$$

$$\overline{\gamma}=\varlimsup_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t^\rho},\quad \underline{\gamma}=\varliminf_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t^\rho}.$$

В данной заметке строятся оценки снизу (по возможности лучшие и на более массивном множестве $A\subset R^+=(0,\,\infty)$) для $A_U(r)$ в терминах $B_U(r)$, $\overline{\sigma}$, $\underline{\sigma}$, $\overline{\gamma}$, $\underline{\gamma}$, $\overline{\sigma}-\underline{\sigma}$, $\overline{\gamma}-\underline{\gamma}$.

В литературе известны два подхода к получению таких оценок. Один подход связан с оценкой А. Картана [1] для многочленов и Л. Альфорса [2] для логарифмических потенциалов конечной меры. Другой подход связан с так называемой $\cos\pi\rho$-теоремой. Различные варианты этой теоремы дают оценку массивности множества $\{r: A_U(r)\geqslant(\cos\pi\rho-o(1))\,B_U(r)\}$. Наиболее точный результат был получен П. Д. Барри [3], [4]: нижняя (верхняя) логарифмическая плотность множества $\{r: A_U(r)\geqslant\cos\pi\rho' B_U(r)\}$, $\rho<\rho'<1$ $(\lambda<\rho'<1)$ не меньше $1-(\rho/\rho')\,(1-\lambda/\rho')$, где λ — нижний порядок роста функции U. Достаточно подробный обзор вклада различных авторов в эту область можно найти в статье П. Д. Барри [5]. Также заметим, что указанные выше результаты получены в самое последнее время А. А. Гольдбергом и О. П. Соколовской в [6]. Они вошли в состав комплекса оценок, объединенных единым методом исследования и дающих информацию о размерах множеств, на которых выполняются соотношения, связывающие те или иные характеристики роста субгармонических функций.

В отличие от ранее известных результатов в наших оценках учитывается регулярность в поведении меры μ, а также связь между расположением множества A, на котором выполняются оценки, и распределением масс меры μ.

1. *Оценки снизу.* Пусть $\nu(t)$ — неубывающая абсолютно непрерывная функция, $t>0$. Эта функция определяет ν-меру на R^+ по правилу: $\nu-\operatorname{mes} e=\int_e \nu'(t)\,dt$, где e — произвольное борелевское множество в R^+. Верхняя и нижняя ν-плотности измеримого множества $E\subset R^+$ определяются соответственно по правилам:

$$\nu-\overline{\operatorname{dens}}\,E=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\nu-\operatorname{mes} E_r}{\nu(r)},\quad \nu-\underline{\operatorname{dens}}\,E=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\nu-\operatorname{mes} E_r}{\nu(r)}.$$

Здесь $E_r=E\cap(0,\,r]$. В случае $\nu(t)=t$ соответствующие плотности называются линейными и обозначаются через $\overline{\operatorname{dens}}\,E$, $\underline{\operatorname{dens}}\,E$. В случае $\nu(t)=\ln t$ соответствующие плотности называются логарифмическими и обозначаются через $\ln\overline{\operatorname{dens}}\,E$, $\ln\underline{\operatorname{dens}}\,E$. Обозначим

$$n_x(t)=n\{[x(1-t),\,x(1+t)]\},\quad \nu_x(t)=\nu\{[x(1-t),\,x(1+t)]\},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Зафиксируем числа ε $(0<\varepsilon<1)$, M $(\overline{\sigma}<M<\infty)$. Точку $x\in R^+$ назовем нормальной, если

$$n_x(t)\leqslant 6\cdot 2^\rho M\,\nu_x(t) \tag{1}$$

при всех $0<t<\varepsilon$. Если при некотором t, $0<t<\varepsilon$, неравенство (1) нарушается, то x называется ненормальной.

Прежде чем сформулируем основную теорему, отметим, что в качестве E выступает некоторое исключительное множество, представленное в виде счетного объединения интервалов.

Теорема 1. *Пусть субгармоническая функция U имеет конечный порядок роста ρ, гармонична в окрестности $z = 0$ и $u(0) = 0$. Тогда для числа M $(\overline{\sigma} < M < \infty)$ и любого целого числа m, большего $[\rho]$, существует исключительное множество $E \subset R^+$ со свойствами:*

$$A_U(r) \geqslant -(m-1)B_U(r) - \left\{\frac{m(\overline{\sigma} - \underline{\sigma})}{\rho} \ln e^2 \left(2 + \frac{M\rho C(\rho)}{m(\overline{\sigma} - \underline{\sigma})}\right) - \pi\overline{\sigma}\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho}{m} + o(1)\right\} r^\rho, \tag{2}$$

$$A_U(r) \geqslant -(m-1)B_U(r) - \left\{4m(\overline{\gamma} - \underline{\gamma})^{1/2}\left(\overline{\gamma} + \frac{C(\rho)M}{2m}\right)^{1/2} - \pi\rho\overline{\gamma}\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho}{m} + o(1)\right\} r^\rho \tag{3}$$

при $r \to \infty$, $r \overline{\in} E$, где

$$\nu - \overline{\text{dens}}\, E \leqslant \overline{\sigma}/M, \tag{4}$$

$\nu(t) = t^\rho$, $C(\rho) = 6 \cdot \rho \cdot 4^\rho$.

Схема доказательства теоремы 1. Нетрудно показать, что

$$U(z) = -\sum_{j=1}^{m-1} U(z\omega^j) + V_m(z), \tag{5}$$

где $m > [\rho]$, $\omega = \exp\left\{\frac{2\pi i}{m}\right\}$, $V_m(z) = \int\limits_C \ln|1 - (z/\xi)^m|\, d\mu_\xi$. Теперь для получения соотношений (2) и (3) достаточно оценить функции $U(z\omega^j)$ сверху величиной $B_U(r)$, а функцию $V_m(z)$ оценивать снизу непосредственно вне исключительного множества E. Для получения соотношения (4) используется понятие ненормальной точки и модификация одномерного аналога леммы о покрытии шарами Н. С. Ландкофа ([7], с. 246).

Приведем некоторые следствия теоремы 1.

Следствие 1. Если U — субгармоническая функция порядка $\rho < 1$ и $h_U(\varphi) = \varlimsup\limits_{r\to\infty} \frac{U(re^{i\varphi})}{r^\rho}$, то

$$h_U(\varphi) \geqslant \pi\overline{\sigma}\operatorname{ctg}\pi\rho - \frac{\overline{\sigma} - \underline{\sigma}}{\rho} \ln e^2 \left(2 + \frac{\rho C(\rho)\overline{\sigma}}{\overline{\sigma} - \underline{\sigma}}\right).$$

В частности, если $\overline{\sigma} = \underline{\sigma}$, то $h_U(\varphi) \geqslant \pi\overline{\sigma}\operatorname{ctg}\pi\rho$.

Следствие 2. Пусть U — субгармоническая функция конечного порядка ρ, для которой $\overline{\sigma} = \underline{\sigma}$. Тогда для любого целого $m > [\rho]$ существует исключительное множество $E \subset R^+$ такое, что при $r = |z| \to \infty$, $r \overline{\in} E$

$$U(z) \geqslant -(m-1)B_U(r) + \pi\overline{\sigma}\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho}{m} + o(r^\rho),$$

где $\nu - \overline{\text{dens}}\, E = 0$, $\nu(t) = t^\rho$.

Замечание. Если выполнено (4) с $\nu(t) = t^\rho$, то

$$\ln\overline{\text{dens}}\, E \leqslant \overline{\sigma}/M, \quad \overline{\text{dens}}\, E \leqslant \begin{cases} \overline{\sigma}/(M\rho), & \rho \leqslant 1; \\ \overline{\sigma}/M, & \rho > 1. \end{cases}$$

При доказательстве используется известная лемма П. Д. Барри [5].

2. *Оценки на асимптотических множествах.* Неограниченное множество $A \subset (0, \infty)$ называется асимптотическим (относительно меры μ), если при $r \to \infty$, $r \in A$ выполняется соотношение

$$N(r) = (\overline{\gamma} + o(1))\, r^\rho. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть U — субгармоническая функция порядка ρ, $\rho > 0$; μ — мера, ассоциированная с U. Для любой невозрастающей функции $\delta(r) \downarrow 0$, $r \to \infty$, и целого числа $m > [\rho]$ существует асимптотическое множество A и исключительное множество E нулевой линейной плотности такие, что*

$$U(z) \geqslant -(m-1) B_U(r) + \pi\rho\bar{\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m} \cdot r^\rho + o(r^\rho), \qquad (7)$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{(A \setminus E) \cap (0, r]\}}{r\delta(r)} = \infty \text{ для всех } r \to \infty,\ r \in A \setminus E.$$

При доказательстве теоремы 2 также используется тождество (5), где $V_m(z)$ оценивается снизу на асимптотическом множестве A.

Следствие 3. Если в условиях теоремы 2 $\rho < 1$, то

$$U(z) = (\cos \pi\rho - o(1)) B_U(r),\ z \to \infty,\ |z| \in A \setminus E,$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\operatorname{mes}\{(A \setminus E) \cap (0, r]\}}{r\delta(r)} = \infty.$$

Этот результат дополняет коллекцию $\cos \pi\rho$-теорем, известных в литературе. В нем содержится дополнительная информация относительно множества, на котором справедлива теорема. Это асимптотическое множество A (множество, где выполняется соотношение (6)), из которого выброшено редкое множество E.

Выражаю искреннюю признательность проф. И. Ф. Красичкову-Терновскому за неоценимую помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan H. Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variètès linèaires lacunaires et leurs applications // Ann. Ec. Norm. Sup.—1928.— V. 45.— P. 255—346.

2. Ahlfors L. Ein Satz von H. Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen // Comment. phys.-math. Soc. scient. fenica.— 1931.— T. 5.— № 16.—P. 1—45.

3. Barry P. D. On a theorem of Besicovitch // Quart. J. Math.— 1963.— V. 2.—№ 14—. P. 293—302.

4. Barry P. D. On a theorem of Kjellberg // Quart. J. Math.— 1964.— V. 2.— № 15.— P. 179—191.

5. Barry P. D. The minimum modulus of small integral and subharmonic functions // Proc. London Math. Soc.— 1962.— V. 3.— № 12.— P. 445—495.

6. Гольдберг А. А., Соколовская О. П. О росте по лучу субгармонической функции с массой, распределенной на отрицательной полуоси // Теория функций, функц. анализ и их прилож.— 1988.— № 50.— С. 30—38.

7. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.— 515 с.

г. Карачаевск

Поступили
первый вариант 01.03.1990
окончательный вариант 16.10.1990