С. И. Коняев, Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 4, 629–634

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 4 (1979)

КВАДРАТУРЫ ТИПА ГАУССА ДЛЯ СФЕРЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ИКОСАЭДРА С ИНВЕРСИЕЙ

С. И. Коняев

1. В работах [1—7] получен ряд квадратур для сферы в трехмерном пространстве, инвариантных относительно или группы икосаэдра G_{XX} или группы икосаэдра с инверсией G^*_{XX}. Построенные в этих работах квадратуры точно интегрируют все многочлены до заданного порядка n включительно, и некоторые из них, с учетом требования инвариантности, являются квадратурами типа Гаусса.

Получение квадратур типа Гаусса высоких порядков наталкивалось на трудности составления и решения нелинейных систем уравнений с большим числом переменных. За последние годы В. И. Лебедевым [8—10] получена серия квадратур до 29 порядка, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией C^*_{VIII}. Методами, близкими к методам в [6—10], в этой работе удается получить квадратуры 19 и 29 порядков, инвариантных относительно G^*_{XX}.

Зададим икосаэдр, вписанный в единичную сферу S_2, сферическими координатами:

$$\vartheta = 0;\ \vartheta = \pi;$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg} 2;\ \varphi = 0;\ 2\pi/5;\ 4\pi/5;\ 6\pi/5;\ 8\pi/5;$$

$$\vartheta = \pi - \operatorname{arctg} 2;\ \varphi = \pi/5;\ 3\pi/5;\ \pi;\ 7\pi/5;\ 9\pi/5.$$

Квадратурную формулу, инвариантную относительно G^*_{XX} и точно интегрирующую все многочлены до порядка n, запишем в виде

$$I(f) = 1/(4\pi) \int_{S_2} f(s)\, ds \approx S_n(f) = a \sum_{i=1}^{12} f(A_i) +$$
$$+ b \sum_{i=1}^{30} f(B_i) + c \sum_{i=1}^{20} f(C_i) + \sum_{j=1}^{k} d_j \sum_{i=1}^{60} f(D_{ji}), \qquad (1)$$

где узлы A_i — вершины вписанного в сферу S_2 икосаэдра, узлы B_i — проекции на S_2 середин ребер икосаэдра, узлы C_i — проекции на S_2 центров граней икосаэдра, узлы $D_{ji} \in S_2$ и проекции узлов D_{ji} на икосаэдр находятся либо на ребрах икосаэдра, либо на медианах треугольников, являющихся гранями икосаэдра; наконец, числа a, b, c, d_j — веса, соответствующие узлам A_i, B_i, C_i, D_{ji}.

В силу теоремы 1 С. Л. Соболева [2], квадратурная формула (1), точно интегрирующая все инвариантные относительно G^*_{XX} многочлены до порядка n, будет точно интегрировать и все многочлены до порядка n.

Все инвариантные относительно G^*_{XX} многочлены до 29 порядка являются линейными комбинациями многочленов 1, α, β, α^2, $\alpha\beta$, α^3, β^2, $\alpha^2\beta$, α^4, $\alpha\beta^2$, $\alpha^3\beta$, где

$$\alpha = 5x^4z^2 + 5y^4z^2 + z^6 + 10x^2y^2z^2 - 5x^2z^4 - 5y^2z^4 +$$
$$+ 2x^5z + 10xy^4z - 20x^3y^2z, \qquad (2)$$

и

$$\beta = (4x^2 - 6xz + z^2)(x^4 + 5y^4 + z^4 + 2x^3z - 2xz^3 -$$
$$- 10x^2y^2 - x^2z^2 - 30xy^2z - 25y^2z^2)(x^4 + 5y^4 + z^4 -$$
$$- 8x^3z + 8xz^3 - 10x^2y^2 + 14x^2z^2 - 10y^2z^2) \qquad (3)$$

— инвариантные относительно G^*_{XX} многочлены 6 и 10 порядка соответственно [2].

Для получения квадратур мы перейдем к сферическим координатам (ϑ, φ), считая $r = 1$.

Нам надо найти в (1) значения весов a, b, c, d_j и координаты узлов D_{ji}; достаточно знать координаты для каждого j только одного из узлов D_{ji}, который мы обозначим через D_j. Для квадратур вида (1) узел D_j удобно взять с координатами $(\vartheta_j; 0)$. Если ввести переменную

$$t = 2 \sin\vartheta \cos\vartheta - \sin^2\vartheta, \qquad (4)$$

то многочлены α, β при $\varphi = 0$ перейдут в многочлены

$$\alpha(t) = 1 - 2t^2 - t^3, \tag{5}$$

$$\beta(t) = 1 - 10t^2 - 5t^3 + 20t^4 + 12t^5. \tag{6}$$

Можно показать, что

$$a = -(5/2^8)\sum\nolimits_{j=1}^{k}(t_j^2 + t_j - 1)(3t_j + 4)^2(65t_j^2 + 8t_j - 16)\,d_j, \tag{7}$$

$$b = -(2/25)\sum\nolimits_{j=1}^{k} t_j^2(3t_j + 4)^2(13t_j^2 + 8t_j - 8)\,d_j, \tag{8}$$

$$c = -(3^7(2^8\cdot 5^2))\sum\nolimits_{j=1}^{k} t_j^2(t_j^2 + t_j - 1)(13t_j^2 + 48t_j + 32)\,d_j. \tag{9}$$

Таким образом, для получения квадратурной формулы (1) нам надо найти t_j, d_j, $j = 1, \ldots, k$. Считая, что (1) точно для всех инвариантных многочленов до порядка n, приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно t_j, d_j, $j = 1, \ldots, k$.

2. Система уравнений для получения квадратуры 29 порядка имеет следующий вид:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{4}\bar{d}_j t_j^k = c_k, \qquad k = 0, 2, 3, \ldots, 8, \tag{10}$$

где

$$\bar{d}_j = 9009/160 \cdot t_j^2 \cdot (t_j^2 + t_j - 1)\cdot(3t_j + 4)^2 d_j,$$

$$c_0 = 1,\quad c_2 = 8/17;\quad c_3 = -96/323;\quad c_4 = 128/323,$$

$$c_5 = -3072/7429;\quad c_6 = 4096/7429;$$

$$c_7 = -16384/22287;\quad c_8 = 229376/215441.$$

Решение системы уравнений (10) сводится к решению одного из двух уравнений 4-й степени [7]:

$$t^4 + 2(27 - \sqrt{69})/29t^3 - 32\sqrt{69}/261t^2 - (64/87)t + 256\sqrt{69}/6003 = 0, \tag{11}$$

$$t^4 + (2(27 + \sqrt{69})/29)t^3 + (32\sqrt{69}/261)t^2 - (64/87)t - 256\sqrt{69}/6003 = 0. \tag{12}$$

Численно решив уравнение (11), получим квадратуру с весами:

$a = 0{,}0029641943984640 04$; $b = -0{,}001904672204695065$;
$c = 0{,}003861884571290004$; $d_1 = 0{,}004634703943700789$;
$d_2 = 0{,}003779820989879175$; $d_3 = 0{,}003546078083588158$;
$d_4 = 0{,}003778266015056609$.

Приведем еще координату z_j узлов $D_j = (\sqrt{1 - z_j^2}; 0; z_j)$:

$$z_1 = -0{,}6112537383570408; \qquad z_2 = -0{,}9091923316244851;$$
$$z_3 = -0{,}9785124301222476; \qquad z_4 = 0{,}9358105831263126.$$

Решение уравнения (12) не дает нам квадратуры с узлами, лежащими на сфере S_2.

Итак, удается получить одну квадратурную формулу 29 порядка с 302 узлами, инвариантную относительно G^*_{XX}.

3. В случае квадратур 19 порядка есть три уравнения для определения t_1, t_2, d_1, d_2, соответствующие полиномам α^2, $\alpha\beta$, α^3. Еще одно уравнение получим, если положим один из весов, например вес b, равным нулю. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{j=1}^{2} (t_j^2 + t_j - 1)\, t_j^k \overline{d}_j = c_k, \qquad k = 0, 2, 3, \\ &\sum\nolimits_{j=1}^{2} (13t_j^2 + 8t_j - 8)\, \overline{d}_j = 0; \end{aligned} \tag{13}$$

здесь $\overline{d}_j = (9009/160) t_j^2 (3t_j + 4)^2 d_j$ и $c_0 = 1$, $c_2 = 8/17$, $c_3 = -96/323$.

Эта система сводится к системе двух уравнений в симметричных функциях ($\sigma_1 = t_1 + t_2$; $\sigma_2 = t_1 t_2$):

$$152\sigma_1^2 + 96\sigma_1 - 323\sigma_2^3 - 152\sigma_2 = 0, \tag{14}$$
$$323\sigma_2^2 + 323\sigma_1\sigma_2 - 228\sigma_1^2 + 874\sigma_2 - 168\sigma_1 + 228 = 0,$$

решение которой проводится стандартным методом и приводит к уравнению 4-й степени

$$5946753\sigma_2^4 + 7511688\sigma_2^3 - 6211936\sigma_2^2 - 9805824\sigma_2 - 2654208 = 0 \tag{15}$$

Численно решив это уравнение, получим две квадратуры со 152 узлами:

1 квадратура	2 квадратура
$a = 0{,}0071832689107291355$,	$a = 0{,}0060257571531834738$,
$c = 0{,}0084548699947574088$,	$c = -0{,}0330031861720944218$,
$d_1 = 0{,}0077804336033250811$,	$d_1 = 0{,}0185624195313372718$,
$d_2 = 0{,}0046312892829432888$,	$d_2 = 0{,}0079001577620575074$,
$z_1 = -0{,}9500659379814119924$,	$z_1 = -0{,}7237480223210415 16$,
$z_2 = 0{,}8801342767336557085$,	$z_2 = 0{,}9543133626271589147$.

Узлы D_j в обеих квадратурах имеют координаты

$$D_j = (\sqrt{1 - z_j^2};\ 0;\ z_j).$$

Аналогично, считая, что вес $c = 0$, приходим к уравнению

$$73343287\sigma_2^4 - 53416448\sigma_2^3 - 80041984\sigma_2^2 + \\ + 37433344\sigma_2 + 24854528 = 0 \qquad (16)$$

и получаем еще две квадратуры со 162 узлами:

1 квадратура	2 квадратура
$a = 0,0044277158666139429$,	$a = 0,0065592056855728819$,
$b = 0,0064886923808814116$,	$b = -0,0410614184224049457$,
$d_1 = 0,0059559636769652427$,	$d_1 = 0,0275974467576534596$,
$d_2 = 0,0065808136259379296$,	$d_2 = 0,0082880879831011035$,
$z_1 = 0,9657305352810767 54$,	$z_1 = -0,5986217920058734193$,
$z_2 = -0,8893521615592300583$,	$z_2 = 0,9512262767002591579$.

Здесь, как и ранее, $D_j = (\sqrt{1 - z_j^2};\ 0;\ z_j)$.

Наконец, если $a = 0$, то задача нахождения квадратуры сводится к решению уравнения

$$29733765\sigma_2^8 + 20031168\sigma_2^7 + 6615040\sigma_2^6 + \\ + 1245184\sigma_2^5 + 212992\sigma_2^4 = 0. \qquad (17)$$

Так как уравнение (17) не имеет нетривиальных действительных решений, то квадратур с 170 узлами, инвариантных относительно G^*_{XX}, нет.

Итак, удалось получить четыре новые квадратуры 19 порядка и одну квадратуру 29 порядка, инвариантные относительно группы G^*_{XX}.

Автор благодарит В. И. Лебедева за интерес к работе и неоднократное обсуждение результатов.

Институт атомной
энергии им. И. В. Курчатова

Поступило
6.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Люстерник Л. А., Диткин В. А., Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере, Сб., Вычислительная математика и вычислительная техника, № 1 (1953), 3—31.

[2] Соболев С. Л., О формулах механических кубатур на сфере, Сиб. матем. ж., 3, № 5 (1962), 769—796.

[3] Stroid A. H., Approximate calculation of multiple integrals, 1971, Englewood Cliffs, XIII.

[4] Mc Laren D. A., Optimal numerical integralion on a sphere, Math. Comp., 83 (1963), 361—383.

[5] Салихов Г. Н., Об одном способе повышения эффективности кубатурных формул С. Л. Соболева на сфере, Сб.,

Вопросы вычислительной и прикладной математики, Тр. ин-та кибернетики АН Уз. ССР, № 8 (1971), 3—9.
[6] Коняев С. И., Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра, Препринт ИАЭ-2516, М., 1975.
[7] Коняев С. И., Инвариантные формулы интегрирования на сфере, Препринт ИАЭ-2553, М., 1975.
[8] Лебедев В. И., Значения узлов и весов квадратурных формул типа Гаусса — Маркова для сферы от 9-го до 17-го порядка точности, инвариантных относительно группы октаэдра, Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 15, № 1 (1975).
[9] Лебедев В. И., Об одном способе интерполяции в n-мерном пространстве по произвольным узлам и некоторых квадратурных формулах, ВЦ СОАН СССР, препринт, вып. 10, 1975.
[10] Лебедев В. И., О квадратурах на сфере, Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 16, № 2 (1976).
[11] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, М., Физматгиз, 1962.