В. И. Денисов, В. Г. Турышев, Расширение параметризованного постньютоновского формализма на случай квазилоренцевской системы отсчета,
ТМФ, 1989, том 81, номер 2, 301–314

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 81, № 2
ноябрь, 1989

РАСШИРЕНИЕ ПАРАМЕТРИЗОВАННОГО ПОСТНЬЮТОНОВСКОГО ФОРМАЛИЗМА НА СЛУЧАЙ КВАЗИЛОРЕНЦЕВСКОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Денисов В. И., Турышев В. Г.

Показано, что использование постньютоновской метрики в канонической системе отсчета в ряде случаев является физически неоправданным. Рассмотрены основные соотношения постньютоновского формализма для метрических теорий гравитации в квазилоренцевской системе отсчета с введением нового параметра. Получены условия существования законов сохранения.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время для теоретического исследования различных гравитационных эффектов, происходящих в гравитационном поле Солнечной системы, стал чаще привлекаться параметризованный постньютоновский формализм [1, 2], который позволяет с единых позиций описать приближение слабого поля для целого ряда метрических теорий гравитации. В этом формализме метрика эффективного риманова пространства-времени, создаваемая некоторым телом, представляется в виде суммы различных обобщенных гравитационных потенциалов с произвольными коэффициентами, называемыми постньютоновскими параметрами. Традиционно эту метрику принято записывать в так называемой канонической калибровке, в которой пространственная часть метрического тензора диагональна ($g_{12}=g_{13}=g_{23}=0$) и, кроме того, компонента g_{00} не содержит членов вида $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho_0(y,t)\,|x-y|\,dy$:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & g_{00}=1-2U+2\beta U^2-(2\gamma+2+\alpha_3+\xi_1)\Phi_1+\xi_1 A+2\xi_w\Phi_w-\\
&-2\left[(3\gamma+1-2\beta+\xi_2)\Phi_2+(1+\xi_3)\Phi_3+3(\gamma+\xi_4)\Phi_4\right]-\\
&-(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w_\nu w^\nu U+\alpha_2 w^\beta w^\nu U_{\beta\nu}+(\alpha_1-2\alpha_2)w^\nu V_\nu+O(\varepsilon^6),\\
& g_{0\alpha}={}^1/_2(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\xi_1)V_\alpha+{}^1/_2(1+\alpha_2-\xi_1)W_\alpha-\\
&-{}^1/_2(\alpha_1-2\alpha_2)w_\alpha U+\alpha_2 w^\beta U_{\alpha\beta}+O(\varepsilon^5),\\
& g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(1+2\gamma U)+O(\varepsilon^4),
\end{aligned}
$$

где w^α — пространственные компоненты скорости канонической системы отсчета относительно некоторой универсальной системы покоя, γ_{mn} — галилеевский метрический тензор с сигнатурой $(+,-,-,-)$. Обобщенные гравитационные потенциалы, входящие в это выражение, имеют вид

$$
(2)\qquad U=\int\frac{\rho_0\,dy}{|x-y|},\qquad \Phi=-\int\frac{\rho_0 v^\nu v_\nu}{|x-y|}dy,
$$

$$\Phi_2=\int\frac{\rho_0 U\,dy}{|x-y|},\quad \Phi_3=\int\frac{\rho_0\Pi}{|x-y|}dy,$$
$$\Phi_4=\int\frac{p\,dy}{|x-y|},\quad V^\alpha=-\int\frac{\rho_0 v^\alpha\,dy}{|x-y|},$$
$$W^\alpha=\int\frac{\rho_0 v_\beta(x^\alpha-y^\alpha)(x^\beta-y^\beta)}{|x-y|^3}dy,$$
$$A=\int\frac{\rho_0[v_\beta(x^\beta-y^\beta)]^2}{|x-y|^3}dy,\quad U^{\alpha\beta}=\int\rho_0\frac{(x^\alpha-y^\alpha)(x^\beta-y^\beta)}{|x-y|^3}dy,$$
$$\Phi_w=\int\rho_0(y,t)\rho_0(z,t)\frac{x^\beta-y^\beta}{|x-y|^3}\left\{\frac{x_\beta-z_\beta}{|y-z|}-\frac{y_\beta-z_\beta}{|x-z|}\right\}dy\,dz,$$

где ρ_0 — инвариантная плотность массы идеальной жидкости, v^α — компоненты ее трехмерной скорости, p — изотропное давление, $\rho_0\Pi$ — плотность внутренней энергии.

Однако уже первый опыт построения постньютоновских разложений метрических теорий гравитации показал, что существуют теории, у которых в исходной системе отсчета, как правило, неподвижной относительно далеких звезд, либо компоненты пространственной части метрического тензора не равны нулю, либо компоненты g_{00} содержат член вида $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\rho_0(y,t)\cdot$ $\cdot|x-y|dy$. В этом случае авторами формализма [1] было рекомендовано после построения постньютоновского разложения осуществлять координатное преобразование

(3) $\qquad x'^n=x^n+\xi^n(x^k),$

выбирая $\xi^n(x^k)$ так, чтобы в новой координатной системе метрика этой теории имела канонический вид (1). Следует отметить, что выбор стандартной калибровки был продиктован лишь соображениями удобства [2], какого-либо физического смысла ему не придавалось. Однако использование канонической системы координат не всегда является оправданным. Дело здесь заключается в том, что согласно хроногеометрической классификации [3] координатное преобразование (3) с вектором $\xi^\alpha(\mathbf{r},t)\sim O(\varepsilon^2)$ в общем случае не оставляет нас в первоначальной системе отсчета, а переводит в другую, наблюдатели которой движутся неинерциальным образом относительно первоначальной системы. Следовательно, эти две системы отсчета в общем случае не являются физически эквивалентными для определения сохраняющихся величин и исследования различных гравитационных эффектов. Поэтому возникает необходимость специально изучить те новые элементы, которые привносят в формулировку постньютоновского формализма учет этого обстоятельства.

1. МЕТРИКА И ПОСТНЬЮТОНОВСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим некоторую обобщенную метрическую теорию гравитации, постньютоновское разложение метрики которой в канонической системе отсчета имеет вид (1). Предположим теперь, что каноническая система отсчета для данной теории является неинерциональной и связана с неподвижной относительно далеких звезд квазилоренцевской системой отсчета преобразованием

$$(4)\qquad x_{\text{с}}^{\alpha}=x_{\text{н}}^{\alpha}+\xi^{\alpha}(x_{\text{н}}^{\beta},\, t_{\text{н}}),\quad \xi^{\alpha}=-\tau\chi^{,\alpha}(x^{\beta},\, t),$$

где $\chi(x,\, t)=\int\rho_0(y,\, t)\,|x-y|\,dy$, а τ — некоторый новый параметр.

Преобразование (4) изменяет пространственную часть метрического тензора по следующему закону:

$$g_{mn}{}^{\text{н}}(x_{\text{н}}^{k})=g_{mn}{}^{\text{с}}(x_{\text{н}}^{k})-\xi_{m;\,n}-\xi_{n;\,m}.$$

Учитывая явный вид 4-вектора $\xi^{k}(x^{\beta},\, t)=(0,\, \xi^{\alpha}(x^{\beta},\, t))$, для метрики в квазилоренцевской системе отсчета с постньютоновской степенью точности будем иметь

$$(5)\qquad \begin{aligned} &g_{00}{}^{\text{н}}(x_{\text{н}}^{k})=g_{00}{}^{\text{с}}(x_{\text{н}}^{k})+2\tau\Gamma_{00}^{\alpha}\chi_{,\alpha}+O(\varepsilon^{6}),\\ &g_{0\alpha}{}^{\text{н}}(x_{\text{н}}^{k})=g_{0\alpha}{}^{\text{с}}(x_{\text{н}}^{k})-\tau\chi_{,0\alpha}+O(\varepsilon^{5}),\\ &g_{\alpha\beta}{}^{\text{н}}(x_{\text{н}}^{k})=g_{\alpha\beta}{}^{\text{с}}(x_{\text{н}}^{k})-2\tau\chi_{,\alpha\beta}+O(\varepsilon^{4}). \end{aligned}$$

Символ Кристоффеля Γ_{00}^{α} в рассматриваемом приближении равен $U^{,\alpha}$. Для окончательной записи нам необходимо еще представить все обобщенные потенциалы как функции переменных квазилоренцевской системы отсчета, поскольку в новой координатной системе должна отсутствовать информация о старой системе отсчета. Так как нам необходимо получить все выражения лишь с постньютоновской точностью, то легко убедиться, что нетривиальный вклад в метрику может дать только ньютоновская часть компоненты g_{00} — потенциал U. Так как плотность массы покоя, измеренная в сопутствующей локально лоренцевской системе отсчета $\rho(x_{\text{н}}^{\beta},\, t_{\text{н}})$ является инвариантом, а величина $(-g)^{1/2}u^{0}dx$ представляет собой инвариантный собственный элемент объема, где u^{n} — 4-скорость материи, то можно записать

$$\rho_0(x_{\text{с}}^{\beta}, t_{\text{с}})\,dx_{\text{с}}=\rho_0(x_{\text{н}}^{\beta}, t_{\text{н}})\sqrt{\frac{g(x_{\text{н}}^{\beta}, t_{\text{н}})}{g(x_{\text{с}}^{\beta}, t_{\text{с}})}\,\frac{u_{\text{н}}^{0}}{u_{\text{с}}^{0}}}\,dx_{\text{н}}[1+O(\varepsilon^{4})].$$

Учитывая явный вид преобразования (4), отсюда будем иметь

$$\rho_0(x_{\text{с}}^{\beta},\, t_{\text{с}})\,dx_{\text{с}}=\rho_0(x_{\text{н}}^{\beta},\, t_{\text{н}})\,dx_{\text{н}}[1+2\tau U(x_{\text{н}}^{\beta},\, t_{\text{н}})+O(\varepsilon^{4})].$$

Легко убедиться, что

$$\frac{1}{|x_{\text{с}}-y_{\text{с}}|}=\frac{1}{|x_{\text{н}}-y_{\text{н}}|}+\tau\frac{(x_{\beta}{}^{\text{н}}-y_{\beta}{}^{\text{н}})}{|x_{\text{н}}-y_{\text{н}}|^{3}}\chi^{,\beta}(x_{\text{н}}^{\nu}, t_{\text{н}}).$$

Используя последние два выражения, а также полезное соотношение

$$\Phi_{w}=-U^{2}-\Phi_{2}+U_{,\varepsilon}\chi^{,\varepsilon}-\int\rho_0\frac{(x_{\beta}-y_{\beta})}{|x-y|^{3}}\chi^{,\beta}\,dy$$

и опуская в этих выражениях значок «н», получим

$$U(x_{\text{с}}^{\alpha},\, t_{\text{с}})=U+\tau\{\Phi_{2}-\Phi_{w}-U^{2}+U_{,\varepsilon}\chi^{,\varepsilon}\},$$

где в правой части стоят потенциалы, записанные уже в новой системе отсчета.

В итоге метрический тензор эффективного риманова пространства-времени (5) в квазилоренцевской системе отсчета будет иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & g_{00}=1-2U+2(\beta+\tau)U^2-(2\gamma+2+\alpha_3+\xi_1)\Phi_1+\\
&+\xi_1 A+2(\xi_w+\tau)\Phi_w-2[(3\gamma+1-2\beta+\tau+\\
&+\xi_2)\Phi_2+(1+\xi_3)\Phi_3+2(\gamma+\xi_4)\Phi_4]-(\alpha_1-\alpha_2-\\
&-\alpha_3)w_\nu w^\nu U+\alpha_2 w^\beta w^\nu U_{\beta\nu}+(\alpha_1-2\alpha_3)w^\nu V_\nu+O(\varepsilon^6),\\
& g_{0\alpha}={}^1/_2(4\gamma+2\tau+3+\alpha_1-\alpha_2+\xi_1)V_\alpha+\\
&+{}^1/_2(1-2\tau+\alpha_2-\xi_1)W_\alpha-{}^1/_2(\alpha_1-2\alpha_2)w_\alpha U+\alpha_2 w^\beta U_{\alpha\beta}+O(\varepsilon^5),\\
& g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(1+2(\gamma+\tau))U+2\tau U_{\alpha\beta}+O(\varepsilon^4).
\end{aligned}
$$

Таким образом, при описании движения вещества с постньютоновской степенью точности различные метрические теории гравитации в квазилоренцевской системе отсчета могут отличаться друг от друга значениями уже не десяти, а одиннадцати постньютоновских параметров.

Следует особо подчеркнуть, что т. к. каноническая и квазилоренцевская системы отсчета в общем случае являются физически неэквивалентными, то никаким переопределением постньютоновских параметров в выражении (6) их число нельзя уменьшить до десяти.

Изучим, к каким новым физическим следствиям приводит наличие параметра τ в выражении (6). Прежде всего выясним, при выполнении каких соотношений метрическая теория гравитации может обладать в постньютоновском приближении законами сохранения энергии, импульса и момента импульса для вещества и гравитационного поля вместе взятых. Для этого, как известно [4], нам необходимо, используя выражения (6), а также определение плотности тензора энергии-импульса вещества

$$(7)\qquad T^{mn}=\sqrt{-g}\{[\rho_0(1+\Pi)+p]u^m u^n-pg^{mn}\},$$

ковариантное уравнение сохранения плотности тензора энергии-импульса вещества в римановом пространстве-времени преобразовать в ковариантный закон сохранения суммы симметрических тензоров энергии-импульса гравитационного поля t_{g}^{mn} и вещества t_{m}^{mn} в плоском пространстве-времени:

$$(8)\qquad \nabla_m T^{mn}=0\Rightarrow D_m(t_{\mathrm{g}}^{mn}+t_{\mathrm{m}}^{mn})=0.$$

Следует отметить, что полученные на этом пути условия являются необходимыми, но не достаточными для существования в той или иной метрической теории гравитации законов сохранения, т. к. при решении этого вопроса последнее слово всегда остается за полным анализом конкретной метрической теории гравитации.

Записывая уравнение (8) при $n=0$ и подставляя в него соответствующие постньютоновские выражения для компонент тензора энергии-импульса вещества T^{mn} и связностей $\Gamma_{nm}{}^{k}$ риманова пространства-времени, после тождественных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial t}t^{00}+\partial_\beta t^{\alpha\beta}=\rho O(\varepsilon^5),$$

где

(9) $$t^{00}=t_g{}^{00}+t_m{}^{00}=\rho[1+\Pi-{}^1/{}_2v_\nu v^\nu+(1-a_1)U]+$$
$$+\frac{1}{8\pi}(3-2a_1)U_{,\beta}U^{,\beta}+\rho O(\varepsilon^4),$$
$$t^{0\alpha}=t_g{}^{0\alpha}+t_m{}^{0\alpha}=\rho v^\alpha[1+\Pi-{}^1/{}_2v_\nu v^\nu+(1-a_1)U+p/\rho]+$$
$$+\frac{1}{4\pi}(a_1-1)U^{,\alpha}U_{,\beta}+\frac{1}{4\pi}(a_1-2)U_{,\beta}[V^{\alpha,\beta}-V^{\beta,\alpha}]+\rho O(\varepsilon^5),$$

а a_1 — произвольное число.

Для приведения соотношения (8) при $n=\alpha$ к требуемому виду воспользуемся известными [1, 2, 4] тождествами, за исключением соотношения для $\rho\Phi_w{}^{,\alpha}$, которое запишем в более корректной форме:

(10) $$\rho\Phi_w{}^{,\alpha}=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{U^{,\alpha}U_{,0}\}+\frac{1}{4\pi}\partial_\beta\Big\{2\Gamma^{\alpha\beta}\Big(\Phi_w-U_{,\varepsilon}\chi^{,\varepsilon}+\frac{3}{4}U^2\Big)+$$
$$+4\pi\rho(U^{,\alpha}\chi^{,\beta}+U^{,\beta}\chi^{,\alpha})-(\partial^\beta\partial_\varepsilon\psi^\varepsilon\cdot\chi^{,\alpha}+\partial^\alpha\partial_\varepsilon\psi^\varepsilon\cdot\chi^{,\beta}-\gamma^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\varepsilon\psi^\varepsilon\cdot\chi^{,\nu}+$$
$$+2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\varepsilon\psi^\varepsilon\cdot U)-\gamma^{\alpha\beta}(U_{,0})^2\Big\}+U^{,\alpha}\Big[2p-\rho v_\nu v^\nu-\frac{1}{4\pi}\partial_\varepsilon\partial^\varepsilon A+$$
$$+\frac{1}{8\pi}\partial_\varepsilon U\cdot\partial^\varepsilon U\Big],$$

где введены обозначения

$$\Gamma^{\alpha\beta}(f)={}^1/{}_2[U^{,\alpha}f^{,\beta}+U^{,\beta}f^{,\alpha}-\gamma^{\alpha\beta}U_{,\nu}f^{,\nu}],$$
$$\psi^\alpha=\int\frac{\rho_0(\mathbf{y},t)\,U^{,\alpha}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\mathbf{y},\qquad h^{\alpha\beta}=\int\rho_0(\mathbf{y},t)\frac{v^\alpha v^\beta}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}d\mathbf{y}.$$

Отличие выражения (10) от традиционного используемого [1, 2, 5] состоит в том, что в нем под знаком трехмерной дивергенции ∂_β отсутствуют слагаемые с третьей производной по координатам от ψ^α. Наличие же третьих производных от этой величины в силу известного соотношения

$$\partial_\alpha\partial_\beta\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}=\frac{4\pi}{3}\gamma_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^3}+3\frac{(x_\alpha-y_\alpha)(x_\beta-y_\beta)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^5}$$

эквивалентно включению в компоненты $t^{\alpha\beta}$ полного тензора энергии-импульса вещества и гравитационного поля членов, пропорциональных градиентам от плотности вещества $\partial_\alpha\rho$ и давления $\partial_\alpha p$, что совершенно недопустимо в рамках параметризованного постньютоновского формализма [1, 2].

Приведем также ряд тождеств, которые ранее не встречались:

(11) $$-2\rho U^{\alpha\beta}U_{,\beta}=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{U_{,0}U^{,\alpha}\}+\frac{1}{4\pi}\partial_\beta\{2(\psi^{\varepsilon,\beta}\chi^{,\alpha}{}_{\varepsilon}+$$
$$+\psi^{\varepsilon,\alpha}\chi^{,\beta}{}_{\varepsilon}-\gamma^{\alpha\beta}\psi^{\varepsilon}{}_{,\nu}\chi^{,\nu}{}_{\varepsilon})+2U(\psi^{\beta,\alpha}+\psi^{\alpha,\beta}-\gamma^{\alpha\beta}\psi^\varepsilon{}_{,\varepsilon})-$$
$$-2(\psi^\alpha U^{,\beta}+\psi^\beta U^{,\alpha}-\gamma^{\alpha\beta}\psi_\varepsilon U^{,\varepsilon})-2\gamma^{\alpha\beta}(U_{,0})^2\}+$$
$$+U^{,\alpha}\Big[4p-2\rho v_\nu v^\nu-\frac{1}{2\pi}\partial_\varepsilon\partial^\varepsilon A\Big]+2\rho\psi^\alpha,$$

$$2\rho v_\beta U^{\alpha\beta}{}_{,0}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{-2U_{,0}U^{,\alpha}+2U_{,\varepsilon}(V^{\varepsilon,\alpha}-V^{\alpha,\varepsilon})\}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\partial_\beta\{2(V^{\varepsilon,\beta}\chi_{,0\varepsilon}{}^{\alpha}+V^{\varepsilon,\alpha}\chi_{,0\varepsilon}{}^{\beta}-\gamma^{\alpha\beta}V^{\varepsilon}{}_{,\nu}\chi_{,0\varepsilon}{}^{\nu})+$$
$$+2(U^{,\beta}V^{\alpha}{}_{,0}+U^{,\alpha}V^{\beta}{}_{,0}-\gamma^{\alpha\beta}U_{,\nu}V^{\nu}{}_{,0})+2U_{,0}(V^{\alpha,\beta}+V^{\beta,\alpha})\}-2\rho V^{\alpha}{}_{,0},$$
$$\rho v^{\varepsilon}v^{\beta}(U^{\alpha}{}_{\varepsilon,\beta}+U^{\alpha}{}_{\beta,\varepsilon}-U_{\beta\varepsilon}{}^{,\alpha})=\frac{1}{4\pi}\partial_\beta\{\Gamma^{\alpha\beta}(4\Phi_4)-(\partial^{\beta}h^{\nu\varepsilon}\chi_{,\nu\varepsilon}{}^{\alpha}+$$
$$+\partial^{\alpha}h^{\nu\varepsilon}\chi_{,\varepsilon\nu}{}^{\beta}-\gamma^{\alpha\beta}\partial_\lambda h^{\nu\varepsilon}\chi_{,\nu\varepsilon}{}^{\lambda})-2(\partial^{\alpha}h^{\nu\beta}+\partial^{\beta}h^{\nu\alpha})U_{,\nu}-$$
$$-2(\partial_\nu h^{\nu\beta}U^{,\alpha}+\partial_\nu h^{\nu\alpha}U^{,\beta})+2\gamma^{\alpha\beta}\partial_\nu h^{\nu\varepsilon}U_{,\varepsilon}+2\partial_\nu h^{\alpha\beta}U^{,\nu}\}+$$
$$+U^{,\alpha}\left[2\rho v_\varepsilon v^\varepsilon+\frac{1}{4\pi}\partial_\varepsilon\partial^\varepsilon A-2p\right]-2\rho\psi^{\alpha}+2\rho V^{\alpha}{}_{,0}.$$

В результате уравнение (8) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}t^{\alpha0}+\partial_\beta t^{\alpha\beta}=Q^{\alpha},$$

где

$$t^{\alpha0}=t_g{}^{\alpha0}+t_{\text{м}}{}^{\alpha0}=\rho v^{\alpha}(1-{}^{1}/{}_{2}v_\nu v^\nu+\Pi+(2\gamma+2\tau+1)U+p/\rho)-$$
$$-\frac{1}{8\pi}(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2+2\xi_1+4\xi_4+4\tau)U^{,\alpha}U_{,0}+$$
$$+\frac{1}{8\pi}(4\gamma+4\tau+4+\alpha_1)U_{,\varepsilon}(V^{\varepsilon,\alpha}-V^{\alpha,\varepsilon})-$$
$$-\frac{\alpha_2}{4\pi}w_\beta U^{,\alpha}U^{,\beta}+\frac{\alpha_1}{8\pi}w^{\alpha}U_{,\varepsilon}U^{,\varepsilon}+\rho O(\varepsilon^5), \tag{12}$$

$$Q^{\alpha}=U^{,\alpha}[\xi_3\rho\Pi+(3\xi_4+2\xi_w)p-(\xi_2-\xi_w)\frac{1}{8\pi}U_{,\nu}U^{,\nu}-$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\alpha_3+\xi_1+2\xi_w)\rho v_\varepsilon v^\varepsilon-\frac{1}{8\pi}(\xi_1+2\xi_w)\partial_\varepsilon\partial^\varepsilon A-\alpha_3\rho v^\nu w_\nu\right]. \tag{13}$$

Компоненты $t^{\alpha\beta}$ полного тензора энергии-импульса нам в дальнейшем не потребуются, поэтому приводить их здесь нецелесообразно. Так как в общем случае выражение для Q^{α} не может быть представлено [5, 6] в виде четырехмерной дивергенции от какой-либо комбинации обобщенных гравитационных потенциалов и характеристик идеальной жидкости, то и законы сохранения имеют место не в каждой метрической теории гравитации. Для тех же теорий гравитации, которые обладают всеми законами сохранения, должно выполняться условие $Q^{\alpha}=0$, откуда следует, что в этих теориях постньютоновские параметры обязаны удовлетворять соотношениям

$$\xi_3=0,\quad 3\xi_4+2\xi_w=0,\quad \xi_2=\xi_w,\quad \xi_1+2\xi_w=0,\quad \alpha_3=0. \tag{14}$$

Таким образом, в метрических теориях гравитации, обладающих законами сохранения, выражения (9), (12) при условиях (14) мы можем использовать в качестве постньютоновских разложений полного тензора энергии-импульса системы, состоящей из вещества и гравитационного поля. Для того чтобы этот тензор позволял получать все десять интегральных законов сохранения для замкнутой системы в псевдоевклидовом пространстве-времени, необходима, как известно, симметрия этого тензора: $t^{mn}=t^{nm}$. Сравнивая выражения (9) и (12), легко убедиться, что для выполнения этого условия необходимо положить

(15) $\alpha_1=\alpha_2=0, \quad a_1=-2\gamma-2\tau.$

Таким образом, выполнение соотношений (14) и (15) является необходимым, но не достаточным условием существования в метрических теориях законов сохранения энергии, импульса и момента для вещества и гравитационного поля вместе взятых. Поэтому из одиннадцати параметров в силу существования семи соотношений (14) и (15) независимыми являются лишь четыре. В качестве таких параметров удобно выбрать параметры β, γ, $\xi_w=\xi$ и τ. Тогда из соотношений (14) и (15) с необходимостью получаем, что в метрических теориях гравитации, обладающих всеми законами сохранения, постньютоновские параметры должны удовлетворять следующим соотношениям:

(16) $\xi_w=\xi, \quad \xi_1=-2\xi, \quad \xi_2=\xi, \quad \xi_4=-{}^2/_3\xi, \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\xi_3=0.$

Таким образом, с точки зрения получения законов сохранения переход от канонической системы отсчета к квазилоренцевской системе не накладывает дополнительных ограничений на значения параметров.

В то же время постньютоновский параметр τ нельзя устранить из выражений (12) и (16) переопределением какого-либо из других параметров, что свидетельствует о его независимой роли в метрических теориях гравитации.

Полученные выражения (9) и (12) для компонент t^{00} и $t^{0\alpha}$ можно использовать для описания распределения в пространстве плотности энергии и, естественно, плотности импульса всей системы. Интегрируя их по всему пространству и учитывая легко проверяемые соотношения

(17) $\int dV\rho W^\alpha=\int dV\rho U^{\alpha\beta}v_\beta, \quad \int dV\rho V^\alpha=-\int dV\rho U v^\alpha,$

будем иметь

(18) $$P^0=\int dV\rho[1+\Pi-{}^1/_2v_\nu v^\nu-{}^1/_2U+O(\varepsilon^4)],$$
$$P^\alpha=\int dV\rho\{[1+\Pi-{}^1/_2v_\nu v^\nu+p/\rho-{}^1/_2(1+2a)U]v^\alpha-$$
$$-aV^\alpha+{}^1/_2(1+2b)W^\alpha-bv_\nu U^{\alpha\nu}+O(\varepsilon^5)\},$$

где a и b — произвольные числа.

Следует отметить, что хотя последнее из выражений (18) и зависит функционально от выбора постоянных a и b, его величина в силу соотношений (17) остается неизменной при любом выборе этих постоянных.

Для построения уравнения движения системы протяженных тел в создаваемом ими гравитационном поле нам необходимо найти в явном виде выражения для плотности энергии-импульса каждого из тел системы, справедливые для всех метрических теорий гравитации, обладающих законами сохранения. Эти выражения, очевидно, однозначным образом задаются структурой каждой теории гравитации и должны приводить к таким уравнениям движения тел, которые могут быть получены из лагранжевой формулировки. Так как каких-либо дополнительных сведений о структуре таких теорий мы не имеем, то для решения поставленной задачи поступим следующим образом. Используя имеющийся произвол в выборе постоянных a и b в выражении (18), примем в качестве плотности энергии t^{00} и плотности импульса $t^{0\alpha}$ каждого из тел системы следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
(19)\qquad & t^{00}=\rho[1+\Pi-{}^1/_2v_\nu v^\nu-{}^1/_2U],\\
& t^{0\alpha}=\rho\{[1+\Pi-{}^1/_2v_\nu v^\nu+p/\rho-{}^1/_2(1+2a)\times\\
& \times U]v^\alpha-aV^\alpha+{}^1/_2(1+2b)W^\alpha+bv_\nu U^{\alpha\nu}\}.
\end{aligned}
$$

Постоянные же a и b выберем исходя из требования возможности лагранжевой формулировки для уравнений движения тел, полученных на основе определений (19).

2. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА И УРАВНЕНИЯ ПОСТНЬЮТОНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ДВУХ ПРОТЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Таким образом, для получения уравнения движения протяженных тел ковариантное уравнение сохранения (8) нам прежде всего необходимо привести к виду

$$
(20)\qquad \frac{\partial}{\partial t}t^{0\alpha}=\mathcal{F}^\alpha,
$$

где $t^{0\alpha}$ определяется выражением (19), а $\mathcal{F}^\alpha$ представляет собой всю оставшуюся часть уравнения (8) и может рассматриваться как плотность силы, действующей на вещество. После тождественных преобразований с использованием соотношений (16), (19) из уравнения (8) получим

$$
\begin{aligned}
(21)\qquad & \mathcal{F}^\alpha=-\rho U^{,\alpha}-(\gamma+1-\xi)\rho\Phi_1{}^{,\alpha}-\xi\rho A^{,\alpha}-\\
& -(3\gamma+1-2\beta+\tau+\xi)\rho\Phi_2{}^{,\alpha}-\rho\Phi_3{}^{,\alpha}-(3\gamma-\\
& -2\xi)\rho\Phi_4{}^{,\alpha}+(\xi+\tau)\rho\Phi_w{}^{,\alpha}-{}^1/_2(3+2a+\\
& +4\gamma+2\tau)\rho v^\alpha v_\varepsilon U^{,\varepsilon}-\rho U^{,\alpha}[\Pi-\\
& -{}^1/_2(1+2\gamma)v_\nu v^\nu-{}^1/_2(3+2a+2b-2\gamma+\\
& +4\tau)p/\rho-{}^1/_2(1+2a+4\beta+4\gamma+\\
& +8\tau)U]+{}^1/_2(1+4b+4\tau)\rho v_\nu W^{\nu,\alpha}+\\
& +{}^1/_2(3-4b+4\gamma-4\tau)\rho v_\nu V^{\nu,\alpha}-\\
& -{}^1/_2(3-2b+4\gamma+2a)\rho v_\nu V^{\alpha,\nu}+\\
& +(b-\xi+\tau)\rho W^\alpha{}_{,0}-{}^1/_2(3+2a+4\gamma-\\
& -2\xi+2\tau)\rho V^\alpha{}_{,0}-(b+\tau)\rho v_\nu v_\beta U^{\alpha\beta,\nu}-\\
& -{}^1/_2(3+2a+4\gamma-2b)\rho v^\alpha U_{,0}+\\
& +(b+2\tau)\rho U^{\alpha\nu}U_{,\nu}+\partial_\beta\{-T^{\alpha\beta}-\\
& -bpU^{\alpha\beta}-{}^1/_2(3+2a)\gamma^{\alpha\beta}pU+\rho v^\beta[aV^\alpha+\\
& +{}^1/_2(3+2a)v^\alpha U-{}^1/_2(1+2b)W^\alpha+\\
& +bv_\nu U^{\alpha\nu}]\}+\rho\partial^\alpha O(\varepsilon^6).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из двух протяженных тел, занимающих объемы V_1 и V_2 и находящихся на расстоянии, значительно превышающем их линейные размеры. Выражение для сохраняющейся плотности массы идеальной жидкости в этом случае можно записать в виде

$$
(22)\qquad \rho(x,t)=\rho_1(x,t)+\rho_2(x,t),
$$

где плотность $\rho_1(x, t)$ отлична от нуля в объеме V_1, а плотность $\rho_2(x, t)$ — в объеме V_2. Уравнения движения каждого из тел можно получить, если проинтегрировать соотношение (19) по объемам, занимаемым этими телами. Интегрируя выражение (19) по объему V_1, найдем уравнения движения для первого тела

$$\frac{d}{dt} P_1{}^\alpha = F_{12}{}^\alpha = \int\limits_{(V_1)} \mathcal{F}^\alpha \, dV. \tag{23}$$

Совершенно аналогичные соотношения могут быть получены и для второго тела. Используя выражения (19), можно показать, что при выполнении условий (16) полный импульс двойной системы будет сохраняться: $P_1{}^\alpha + P_2{}^\alpha = \mathrm{const}$. И хотя в общем случае эта константа отлична от нуля, мы всегда можем [2] совершить постгалилеевское преобразование к такой квазилоренцевской системе отсчета, где она равна нулю. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что полный импульс двойной системы равен нулю. Следуя работе [4], введем строгие понятия инертной массы m и радиуса-вектора центра масс Y^α, определив их следующим образом:

$$m = \int t^{00} \, dV, \qquad mY^\alpha = \int t^{00} X^\alpha \, dV.$$

С постньютоновской степенью точности отсюда будем иметь

$$m_1 = \int \rho_1 [1 + \Pi - {}^1\!/_2 v_\nu v^\nu - {}^1\!/_2 U + O(\varepsilon^4)] \, dV, \tag{24}$$

$$m_1 Y^\alpha = \int \rho_1 [1 + \Pi - {}^1\!/_2 v_\nu v^\nu - {}^1\!/_2 U + O(\varepsilon^4)] \, dV \, X^\alpha.$$

Определим также суммарную массу покоя частиц этого тела $M_1 = \int \rho_1 dV$, не зависящую от времени в силу ковариантного уравнения неразрывности

$$\nabla_m [\rho_0 u^m] = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\rho v^\beta) \right\} = 0,$$

где $\rho = \rho_0 \sqrt{-g} u^0$ — сохраняющаяся плотность массы.

Так как в рассматриваемой нами системе отсчета импульс двойной системы равен нулю, то в ней центр масс двойной системы покоится. Поместим начало координат в центр масс двойной системы. Тогда радиус-вектор центра масс первого тела в этой системе координат обозначим $Y^\alpha_{(1)}$, второго тела — $Y^\alpha_{(2)}$, а их разность $Y^\alpha_{(1)} - Y^\alpha_{(2)} = R^\alpha$. На основании этого для произвольной точки первого тела имеем $X^\alpha_{(1)} = Y^\alpha_{(1)} + x_1{}^\alpha$, где $x_1{}^\alpha$ — радиус-вектор той же точки, но в системе координат, начало которой помещено в центр масс первого тела. Аналогичные соотношения можно написать и для радиуса-вектора любой точки второго тела. Так как в силу определения $Y^\alpha_{(1)}$ и $Y^\alpha_{(2)}$ удовлетворяют соотношениям типа (24), отсюда следует, что

$$\int \rho_i x_i{}^\alpha [1 + \Pi - {}^1\!/_2 v_\nu v^\nu - {}^1\!/_2 U + O(\varepsilon^4)] \, dV = 0.$$

Кроме того, в выбранной нами системе центра масс радиусы-векторы взаимосвязаны и удовлетворяют соотношению

$$m_1 Y^\alpha_{(1)} + m_2 Y^\alpha_{(2)} = 0. \tag{25}$$

Выразим теперь энергию и импульс каждого из тел, а также действующие на них силы через радиусы-векторы центров масс и их скорости: $V^{\alpha}_{(1)}=\dfrac{d}{dt}Y^{\alpha}_{(1)}$, $V^{\alpha}_{(2)}=\dfrac{d}{dt}Y^{\alpha}_{(2)}$. Все гравитационные потенциалы, входящие в метрику (6), перепишем в терминах сохраняющейся плотности массы ρ_1. Подставив соотношение (22) в выражения для потенциалов, выделим потенциалы, содержащие только плотность массы ρ_1. Вводя обозначения для необходимых в дальнейшем величин

$$
\begin{aligned}
(26)\qquad & P_{(i)}=\frac{1}{M_i}\int p_i\,dx, \qquad \Pi_{(i)}=\frac{1}{M_i}\int \rho_i\Pi\,dx,\\
& \Omega^{\alpha\beta}_{(i)}=-\frac{1}{2M_i}\int \rho_i\rho_i'\,\frac{(x^\alpha-x'^\alpha)(x^\beta-x'^\beta)}{|x-x'|^3}\,dx\,dx',\\
& Q^{\alpha\beta}_{(i)}=\frac{1}{2M_i}\int \rho_i v^\alpha v^\beta\,dx, \qquad \Omega=\Omega^\nu{}_\nu, \qquad Q=Q^\nu{}_\nu
\end{aligned}
$$

и представляя скорость движения каждого элемента объема первого тела в виде $v^\alpha=V^2_{(1)}+v_1{}^\alpha$, где $v_1{}^\alpha$ — скорость движения элемента объема относительно центра масс первого тела, а затем разлагая подынтегральные выражения в ряды по степеням $1/R$, после интегрирования будем иметь

$$
\begin{aligned}
(27)\qquad & P_1{}^\alpha=M_1\{V^{\alpha}_{(1)}[1+\Pi_{(1)}-Q_{(1)}-\Omega_{(1)}]+\frac{M_2}{R}[aV^{\alpha}_{(2)}-{}^1/_2(1+2a)V^{\alpha}_{(1)}+\\
& +{}^1/_2(1+2b)n^\alpha n_\beta V^{\beta}_{(1)}]+O(\varepsilon^4)\}.
\end{aligned}
$$

Совершенно аналогично может быть записано выражение и для импульса второго тела. Получим теперь выражение для силы, действующей на первое тело. Интегрируя (24) по объему первого тела, найдем

$$
\begin{aligned}
(28)\qquad & F_{12}{}^\alpha=-\frac{M_1M_2}{R^2}\Big\{n^\alpha[1+(2b-2\gamma-1+2\tau)(Q_{(1)}+Q_{(2)})+\\
& +(b+2-4\beta+3\xi+\tau)(\Omega_{(1)}+\Omega_{(2)})+\Pi_{(1)}+\Pi_{(2)}+(\gamma-{}^3/_2-a-b-2\tau)\times\\
& \times(P_{(1)}+P_{(2)})+6(b+\tau)n_\beta n_\nu(Q^{\beta\nu}_{(1)}+Q^{\beta\nu}_{(2)})-\\
& -{}^3/_2(1+4b+4\tau)n_\nu n_\varepsilon V^{\nu}_{(1)}V^{\varepsilon}_{(2)}+3(b+\tau-\xi)n_\nu n_\beta(\Omega^{\nu\beta}_{(1)}+\Omega^{\nu\beta}_{(2)})+\\
& +{}^1/_2(3-4b+4\gamma-4\tau)V^{\nu}_{(1)}V_{(2)\nu}]+(b+a+2\gamma+{}^3/_2-2\xi+2\tau)\times\\
& \times n_\nu(\Omega^{\alpha\nu}_{(1)}+\Omega^{\alpha\nu}_{(2)})+(3+2a+4\gamma+2b+4\tau)n_\nu(Q^{\alpha\nu}_{(1)}+Q^{\alpha\nu}_{(2)})-\\
& -(2+b+2\gamma+a+2\tau)n_\nu[V^{\alpha}_{(1)}V^{\nu}_{(2)}+V^{\alpha}_{(2)}V^{\nu}_{(1)}]-\\
& -({}^1/_2+a+2\beta+2\gamma+2\tau-b)\frac{M_1+M_2}{R}n^\alpha+\frac{2}{R^2}n_\beta[I^{\alpha\beta}_{(1)}+I^{\alpha\beta}_{(2)}]+\\
& +\frac{5}{R^2}n^\alpha n_\nu n_\beta[I^{\beta\nu}_{(1)}+I^{\beta\nu}_{(2)}]\Big\}+M_1\partial^\alpha O(\varepsilon^5),
\end{aligned}
$$

где введены обозначения

$$
I^{\alpha\beta}_{(i)}=\frac{1}{2M_i}\int dx\rho_{(i)}(3x^\alpha x^\beta-\gamma^{\alpha\beta}x_\nu x^\nu)\sim L_i^2.
$$

Выражение для силы, действующей на второе тело, можно получить, сделав замену индексов $(1) \leftrightarrow (2)$ и радиусов-векторов $R^\alpha \to -R^\alpha$. Легко убедиться, что $F_{12}{}^\alpha = -F_{21}{}^\alpha$, в результате чего полный импульс системы в постньютоновском приближении сохраняется и в выбранной нами системе отсчета он равен нулю.

Полученные выражения (27) и (28) для импульсов тел и действующих на них сил очевидным образом содержат произвольные постоянные a и b, не фиксируемые постньютоновским формализмом. Для определения их значений нам необходимо привлечь какие-либо дополнительные физические соображения. В качестве таковых уместно выбрать требование возможности лагранжевой формулировки для рассматриваемой нами задачи.

Для конкретной реализации этого требования необходимо определить, при каких значениях a и b полученные нами уравнения движения протяженных тел (23) могут быть приведены к лагранжевой форме, а затем построить соответствующее выражение для функции Лагранжа.

Принимая за обобщенные координаты радиусы-вектора центров масс тел двойной системы $Y^{\alpha}_{(1)}$ и $Y^{\alpha}_{(2)}$, а за обобщенные скорости — скорости их центров масс $V^{\alpha}_{(1)}$ и $V^{\alpha}_{(2)}$, в соответствии с идеологией лагранжева формализма мы должны обеспечить выполнение следующих равенств:

$$
\begin{gathered}
P_1{}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial V^{\beta}_{(1)}}, \quad P_2{}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial V^{\beta}_{(2)}}, \\
F_{12}{}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial Y^{\beta}_{(1)}}, \quad F_{21}{}^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial Y^{\beta}_{(2)}}.
\end{gathered} \tag{29}
$$

Рассматривая соотношения (29) как систему дифференциальных уравнений в частных производных с известной левой частью, найдем те значения a и b, при которых она совместна. Условие совместности системы уравнений (29), как известно, эквивалентно требованию независимости смешанных частных производных функции Лагранжа L от порядка дифференцирования. Учитывая, что в нашем случае

$$
\frac{\partial}{\partial Y^{\alpha}_{(1)}} = -\frac{\partial}{\partial Y^{\alpha}_{(2)}} = \frac{\partial}{\partial R^\alpha}, \quad F_{12}{}^\alpha = -F_{21}{}^\alpha,
$$

эти условия запишем в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial P_{1\alpha}}{\partial V^{\beta}_{(1)}} = \frac{\partial P_{1\beta}}{\partial V^{\alpha}_{(1)}}, \quad \frac{\partial P_{2\alpha}}{\partial V^{\beta}_{(2)}} = \frac{\partial P_{2\beta}}{\partial V^{\alpha}_{(2)}}, \\
\frac{\partial P_{2\alpha}}{\partial V^{\beta}_{(1)}} = \frac{\partial P_{1\beta}}{\partial V^{\alpha}_{(2)}}, \quad \frac{\partial F_{12\beta}}{\partial R^\alpha} = \frac{\partial F_{12\alpha}}{\partial R^\beta}, \\
\frac{\partial P_{1\beta}}{\partial R^\alpha} = \frac{\partial F_{12\alpha}}{\partial V^{\beta}_{(1)}}, \quad \frac{\partial P_{2\beta}}{\partial R^\alpha} = \frac{\partial F_{12\alpha}}{\partial V^{\beta}_{(2)}}.
\end{gathered} \tag{30}
$$

Представим теперь выражения (27) и (28) для импульсов тел и сил в виде явных функций от R^α, $V^{\alpha}_{(1)}$ и $V^{\alpha}_{(2)}$. Для этого скорость движения элементов объема каждого из тел запишем в виде

$$
v_1{}^\alpha = V^{\alpha}_{(1)} + v^{\alpha}_{(1)}, \quad v_2{}^\alpha = V^{\alpha}_{(2)} + v^{\alpha}_{(2)},
$$

где $v_{(1)}^{\alpha}$ и $v_{(2)}^{\alpha}$ – скорости элементов объема первого и соответственно второго тел относительно их центров масс.

Учитывая известное соотношение

$$
(31) \qquad Q_{(i)}^{\alpha\beta} = {}^1/_2 V_{(i)}^{\alpha} V_{(i)}^{\beta} + q_{(i)}^{\alpha\beta} + O(\varepsilon^4),
$$

где

$$
q_{(i)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2M_i} \int \rho_{(i)} v_i^{\alpha} v_i^{\beta}\, dx,
$$

выражение для импульса первого тела запишем в виде

$$
(32) \qquad P_1^{\alpha} = M_1 \{ V_{(1)}^{\alpha} [1 + \Pi_{(1)} - q_{(1)\nu}^{\nu} - \Omega_{(1)} - {}^1/_2 V_{(1)}^{\nu} V_{(1)\nu}] + \frac{M_2}{R} [a V_{(2)}^{\alpha} - {}^1/_2 (1+2a) V_{(1)}^{\alpha} + {}^1/_2 (1+2b) n^{\alpha} n_{\beta} V_{(2)}^{\beta} - b n^{\alpha} n_{\beta} V_{(1)}^{\beta}] + O(\varepsilon^4) \}.
$$

Выражение для P_2^{α} получается из (33) заменой индексов $(1) \leftrightarrow (2)$, а также $n^{\alpha} \to -n^{\alpha}$. Подставляя соотношения для P_1^{α} и P_2^{α} в систему (30), легко убедиться, что первые три уравнения удовлетворяются тождественно. Используя соотношение (28), приравняем затем коэффициенты при одинаковых степенях R^{-1} в пятом уравнении системы (30). В результате получим следующие соотношения: $a = -2\gamma - {}^3/_2 - 2\tau$, $b = -2\tau$. Подставляя эти значения постоянных в выражение для импульса первого тела, находим

$$
(33) \qquad P_1^{\alpha} = M_1 \left\{ V_{(1)}^{\alpha} \left[1 + \Pi_{(1)} - {}^1/_2 V_{(1)}^{\nu} V_{(1)\nu} + (2\gamma + 2\tau + 1) \frac{M_2}{R} - q_{(1)\nu}^{\nu} - \Omega_{(1)} \right] + \frac{M_2}{R} [2\tau n^{\alpha} n_{\beta} V_{(1)}^{\beta} + {}^1/_2 (1 - 4\tau) n^{\alpha} n_{\beta} V_{(2)}^{\beta} - ({}^3/_2 + 2\gamma + 2\tau) V_{(2)}^{\alpha}] + O(\varepsilon^4) \right\}.
$$

Аналогичное выражение можно получить и для импульса второго тела. Для сил, действующих на эти два тела, из соотношения (28) имеем

$$
\begin{aligned}
(34) \qquad F_{12}^{\alpha} = -F_{21}^{\alpha} = -\frac{M_1 M_2}{R} \Big\{ & n^{\alpha} [1 - (2\gamma + 2\tau + 1)(q_{(1)\nu}^{\nu} + q_{(2)\nu}^{\nu} + \\
& + {}^1/_2 V_{(1)}^{\nu} V_{(1)\nu} + {}^1/_2 V_{(2)}^{\nu} V_{(2)\nu}) + (2 - 4\beta - \tau + 3\xi) \times \\
& \times (\Omega_{(1)} + \Omega_{(2)}) + \Pi_{(1)} + \Pi_{(2)} + (3\gamma + 2\tau)(P_{(1)} + P_{(2)}) - \\
& - 3\tau n_{\beta} n_{\nu} (2 q_{(1)}^{\nu\beta} + 2 q_{(2)}^{\nu\beta} + V_{(1)}^{\nu} V_{(1)}^{\beta} + V_{(2)}^{\nu} V_{(2)}^{\beta}) - \\
& - 3(\tau + \xi) n_{\nu} n_{\beta} (\Omega_{(1)}^{\nu\beta} + \Omega_{(2)}^{\nu\beta}) - {}^3/_2 (1 - 4\tau) n_{\nu} n_{\beta} V_{(1)}^{\nu} V_{(2)}^{\beta} + \\
& + (2\gamma + 2\tau + {}^3/_2) V_{(1)}^{\beta} V_{(2)\beta}] - 2(\tau + \xi) n_{\beta} (\Omega_{(1)}^{\alpha\beta} + \Omega_{(2)}^{\alpha\beta}) - \\
& - 4\tau n_{\nu} (q_{(1)}^{\alpha\nu} + q_{(2)}^{\alpha\nu} + {}^1/_2 V_{(1)}^{\alpha} V_{(1)}^{\nu} + {}^1/_2 V_{(2)}^{\alpha} V_{(2)}^{\nu}) - \\
& - {}^1/_2 (1 - 4\tau) n_{\beta} (V_{(1)}^{\alpha} V_{(2)}^{\beta} + V_{(1)}^{\beta} V_{(2)}^{\alpha}) - (2\beta + 2\tau - 1) \frac{M_1 + M_2}{R} n^{\alpha} +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2}{R^2}n_\beta(I^{\alpha\beta}_{(1)}+I^{\alpha\beta}_{(2)})+\frac{5}{R^2}n^\alpha n_\beta n_\nu(I^{\beta\nu}_{(1)}+I^{\beta\nu}_{(2)})+O(\varepsilon^3)\Big\}.$$

Используя эти выражения, легко убедиться, что все оставшиеся уравнения системы (30) выполняются тождественно.

Интегрируя систему уравнений (29), получаем следующую функцию Лагранжа для системы двух протяженных тел, движущихся в создаваемом ими гравитационном поле:

$$L=\frac{M_1}{2}\{V_{(1)\varepsilon}V_{(1)}{}^{\varepsilon}[1+\Pi_{(1)}-{}^1/_4V_{(1)\beta}V^{\beta}_{(1)}-q^{\varepsilon}_{(1)\varepsilon}-\Omega_{(1)}]\}+$$
$$+\frac{M_2}{2}\{V_{(2)\varepsilon}V_{(2)}{}^{\varepsilon}[1+\Pi_{(2)}-{}^1/_4V_{(2)\beta}V_{(2)}{}^{\beta}-q^{\varepsilon}_{(2)\varepsilon}-\Omega_{(2)}]\}-$$
$$-\frac{M_1M_2}{R}[1-(2\gamma+2\tau+1)\,(q^{\varepsilon}_{(1)\varepsilon}+q^{\varepsilon}_{(2)\varepsilon}+{}^1/_2V^{\varepsilon}_{(1)}V_{(1)\varepsilon}+$$
$$+{}^1/_2V^{\varepsilon}_{(2)}V_{(2)\varepsilon})+(2-4\beta+3\xi-\tau)\,(\Omega_{(1)}+\Omega_{(2)})-$$
$$-{}^1/_2(1-4\tau)\,n_\beta n_\nu V^{\nu}_{(1)}V^{\beta}_{(2)}+(2\gamma+2\tau+{}^3/_2)\,V_{(1)\varepsilon}V^{\varepsilon}_{(2)}+\Pi_{(1)}+\Pi_{(2)}+$$
$$+(3\gamma+2\tau)\,(P_{(1)}+P_{(2)})-(\xi+\tau)\,n_\beta n_\nu(\Omega^{\beta\nu}_{(1)}+\Omega^{\beta\nu}_{(2)})-$$
$$-2\tau n_\beta n_\nu(q^{\beta\nu}_{(1)}+q^{\beta\nu}_{(2)}+{}^1/_2V^{\beta}_{(1)}V^{\nu}_{(1)}+{}^1/_2V^{\beta}_{(2)}V^{\nu}_{(2)})-$$
$$-{}^1/_2(2\beta+2\tau-1)\frac{M_1+M_2}{R}+\frac{1}{R^2}n_\nu n_\beta(I^{\nu\beta}_{(1)}+I^{\nu\beta}_{(2)})]+MO(\varepsilon^5). \quad (35)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, постньютоновский параметр τ, не изменяя условий консервативности метрических теорий гравитации, явно входит в выражение (35) для функции Лагранжа системы из двух протяженных тел, и никаким переопределением других постньютоновских параметров γ, β, ξ он не может быть устранен из этого выражения. Это означает, что параметр τ играет существенную роль в постньютоновских уравнениях движения двойной системы и должен приводить к наблюдаемым на эксперименте постньютоновским эффектам. Это обстоятельство позволяет надеяться, что после проведения достаточного количества постньютоновских экспериментов параметр τ, так же как и другие параметры, может быть измерен.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность академику А. А. Логунову за ценные обсуждения.

Литература

[1] *Will C. M., Nordvedt K., Jr.* // Astrophys. J. 1972. V. 177. P. 757–774.
[2] *Will C. M.* Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge: Univ. Press., 1981.
[3] *Зельманов А. Л.* // ДАН СССР. 1956. Т. 107. С. 815.
[4] *Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.* // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 167. С. 108–155.
[5] *Will C. M.* // Astrophys. J. 1971. V. 169. P. 125–140.
[6] *Lee D. J., Lightman A. P., Ni W.-T.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 1685–1700.

Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета

Поступила в редакцию 22.XII.1988 г.

EXTENSION OF THE PARAMETRISED POST-NEWTONIAN FORMALISM TO THE CASE OF THE QUASI-LORENTZ FRAME OF REFERENCE

Denisov V. I., Turyshev V. G.

It is shown that using of the post-Newtonian metric in the canonical frame of reference is physically incorrect in some cases. Principal relationships of the post-Newtonian formalism for the metric-based theories of gravity are considered in the quasi-Lorentz frame of reference with the introduction of a new parameter. Conditions of the existence of conservation laws are obtained.