Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, О продолжении регулярного автоморфизма, *Сиб. матем. журн.*, 2023, том 64, номер 4, 770–772

https://www.mathnet.ru/smj7796

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2023. Том 64, № 4

УДК 512.542

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕГУЛЯРНОГО АВТОМОРФИЗМА

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Находятся достаточные условия продолжения регулярного автоморфизма нормальной абелевой подгруппы периодической группы на всю группу.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.409

Ключевые слова: регулярный автоморфизм, периодическая группа, продолжение автоморфизма.

Во время специального заседания «Час проблем» на Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 110-летию со дня рождения С. Н. Черникова, которая проходила в Приэльбрусье (Кабардино-Балкарская республика) с 29 июня по 1 июля 2022 г., обсуждался следующий

Вопрос 1 (А. Х. Журтов). *Пусть G — периодическая группа, A — ее абелева нормальная подгруппа, совпадающая со своим централизатором, t — автоморфизм простого порядка группы A, действующий на A без нетривиальных неподвижных точек и централизующий фактор-группу G/A, рассматриваемую в качестве группы автоморфизмов A. Верно ли, что t можно продолжить до автоморфизма G?*

А. Ю. Ольшанский заметил, что в указанном виде вопрос 1 решается отрицательно. Примером может служить группа

$$G = \langle a, b \mid a^9 = b^3 = [a, b]a^{-3} = 1\rangle$$

порядка 27, где $A = \langle a^3, b\rangle$, t — автоморфизм A порядка 2, инвертирующий любой элемент из A.

Цель настоящей заметки — показать, что вопрос 1 решается положительно при дополнительном условии, что $\pi(A)$ и $\pi(G/A)$ не пересекаются. Здесь $\pi(X)$ для периодической группы X означает множество всех простых делителей порядков элементов X.

Теорема. *Пусть A — абелева нормальная подгруппа периодической группы G, совпадающая со своим централизатором в G, t — автоморфизм простого порядка группы A, действующий на A без нетривиальных неподвижных точек. Если $\pi(A) \cap \pi(G/A) = \varnothing$ и t централизует фактор-группу G/A, рассматриваемую в качестве подгруппы группы автоморфизмов A, то t продолжается до автоморфизма τ группы G и $C_G(\tau)$, т. е. группа неподвижных точек автоморфизма τ в G, является дополнением к A в G.*

Доказательство. В дальнейшем A, G и t удовлетворяют условию теоремы. Пусть p — порядок t.

Работа Д. В. Лыткиной выполнена в рамках Государственного задания № 071-03-2023-001 от 19.01.2023; работа В. Д. Мазурова выполнена при поддержке Программы фонда фундаментальных исследований РАН (проект FWNF-2022-0002).

Лемма 1. *Если $G = A$, A — нормальная подгруппа индекса p в некоторой группе H и элемент $x \in H \setminus A$ индуцирует в A при сопряжении в H автоморфизм t, то H изоморфна естественному полупрямому произведению A на $\langle t \rangle$, порядок x равен p и любые два элемента из Ax сопряжены элементом из A.*

Доказательство. Так как A локально конечна, то H локально конечна. Пусть y — элемент из Ax. Если $z = y^p \neq 1$, то y централизует z и z является нетривиальной неподвижной точкой для t вопреки условию. Поэтому $y^p = 1$ для любого $y \in Ax$ и $A\langle x \rangle$ — полупрямое произведение A на $\langle x \rangle$.

Пусть $z \in Ax$ и $z \neq x$. Тогда $\langle z, x \rangle$ конечна и является конечной группой Фробениуса, в которой $\langle x \rangle$ и $\langle z \rangle$ являются дополнениями Фробениуса, а ядро лежит в A. Отсюда вытекает, что x и z сопряжены элементом из A. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G/A — циклическая группа с порождающим Ar, $r \in G$.*

(1) *Элемент $r_* \in Ar$ можно выбрать так, чтобы порядок r_* совпадал с $|G/A|$. Любые так выбранные элементы $r_1 \in Ar$ и $r_2 \in Ar$ сопряжены элементом из A.*

(2) *Если r_* выбран в соответствии с* (1), *то отображение*

$$\tau : r_*^s a \to r_*^s a^t, \quad s = 0, 1, \dots, |G/A| - 1, \quad a \in A,$$

является автоморфизмом G, продолжающим t, и $C_G(\tau) = \langle r_* \rangle$.

(3) *В естественном полупрямом произведении G^* группы G и $\langle \tau \rangle$ класс сопряженности τG содержится в $A\langle t \rangle$. Если r_1 и r_2 выбраны в соответствии с* (1) *и τ_i — автоморфизм G, определенный в* (2) *(при замене r_* на r_i), $i = 1, 2$, то τ_1 и τ_2 сопряжены в $A\langle t \rangle$ некоторым элементом из A.*

(4) *В G^* любой элемент из At централизует в Ar ровно один элемент. В частности, Ar содержит ровно один элемент c_r, централизующий t.*

Доказательство. (1) Из равенства $r = r_\pi \cdot r_{\pi'}$, где r_π — π-элемент, $r_{\pi'}$ — π'-элемент для $\pi = \pi(G/A)$ и $r_\pi \cdot r_{\pi'} = r_{\pi'} \cdot r_\pi$, вытекает, что в качестве r_* можно взять r_π. Если $r_1, r_2 \in Ar$ и порядки r_1 и r_2 равны $|G/A|$, то $\langle r_1, r_2 \rangle$ — конечная разрешимая группа, в которой $\langle r_1 \rangle$ и $\langle r_2 \rangle$ — холловы π-подгруппы. Теперь (1) вытекает из теоремы Холла.

(2) Непосредственно проверяется, что τ — автоморфизм G. Если $\tau(r_*^s a) = r_*^s a$, то $a^t = a$, откуда $a = 1$ по определению t.

(3) Первая часть очевидна. Вторая вытекает из леммы 1.

(4) Вытекает из (2) и (3). Лемма доказана.

Вернемся к общей ситуации. Пусть Ar — смежный класс G по A, отличный от A, и $G_r = A\langle r \rangle$. По лемме 2, примененной к G_r в качестве G, смежный класс Ar содержит элемент c_r, перестановочный с t. Таким образом, $C_G(t)$ содержит элемент c_r для любого смежного класса Ar, т. е. $AC_G(t) = G$. По определению t подгруппа $C_G(t)$ пересекается с A тривиально и, следовательно, отображение $\tau : G \to G$, определенное равенством $\tau(ac) = a^t c$, $a \in A$, $c \in C_G(t)$, является автоморфизмом G, продолжающим t с A на G.

Дадим теперь формальное построение нужного нам расширения $A\langle t \rangle$ посредством фактор-группы $H = G/A$ с помощью теоремы Шрейера (см. [1, теорема 15.1.1]).

Обозначим через N естественное полупрямое произведение A на $\langle t \rangle$. Для любого $\overline{r} \in H = G/A$ выберем представитель $r \in G$ смежного класса $\overline{r}$. Таким образом, $\overline{r} = Ar$. Положим $G_r = A\langle r \rangle \leq G$ и определим автоморфизм t_r группы G_r как τ в п. (2) леммы 2 (с заменой G на Gr). Группа N является подгруппой естественного полупрямого произведения $G_r\langle t_r\rangle$ и $A\langle t_r\rangle \le A\langle t\rangle$. Поэтому $t_r^a = t$ для некоторого $a \in A$ и $c_r = r^a$ централизует t.

Очевидно, отображение $\varphi_{\overline{r}} : at^s \to a^{c_{\overline{r}}}t^s = a^r t^s$ является автоморфизмом N и $\varphi_{\overline{rs}} = \varphi_{\overline{r}}\varphi_{\overline{s}}$. Как вытекает из [1, теорема 15.1.1], тривиальная система факторов $(c_{\overline{r_1}}, c_{\overline{r_2}}) = 1$ для всех $\overline{r_1}, \overline{r_2} \in H$ определяет расширение G^* нормальной подгруппы N посредством H, для которого совокупность $C = \{c_{\overline{r}} \mid \overline{r} \in H\}$ является изоморфной H подгруппой, дополняющей N до G^*. При этом AC — нормальная в G^* подгруппа, изоморфная G, и t продолжается до автоморфизма AC, централизующего C. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 31 марта 2023 г.
После доработки 14 мая 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Лыткина Дарья Викторовна (ORCID 0000-0002-5052-3972)
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович (ORCID 0000-0003-3028-8490)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
mazurov@math.nsc.ru