Е. В. Глухов, О. И. Мохов, Об алгебро-геометрических методах построения подмногообразий с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны, *Функц. анализ и его прил.*, 2020, том 54, выпуск 3, 26–37

DOI: 10.4213/faa3744

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 3, с. 26–37

УДК 512.7+514.7+517.957

Об алгебро-геометрических методах построения подмногообразий с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны[1]

© 2020. Е. В. Глухов, О. И. Мохов

В данной статье предложено обобщение алгебро-геометрической конструкции Кричевера построения ортогональных систем координат в плоском пространстве [1]. В теории интегрируемых систем гидродинамического типа фундаментальную роль играют также ортогональные координаты в некоторых специальных неплоских пространствах [2]. Важнейший класс таких пространств задается метриками подмногообразий в плоском пространстве с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны, определяющей ортогональные координаты на подмногообразии. Предложена конструкция построения таких подмногообразий по алгебро-геометрическим данным. Приведены явные примеры.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3744

§ 1. Введение

В настоящей работе мы предлагаем метод построения по алгебро-геометрическим данным n-мерных подмногообразий с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны, определяющей ортогональные координаты на подмногообразии, в $(n+N)$-мерном плоском пространстве; в частности, при $N=1$ мы строим n-мерные гиперповерхности с голономной сетью линий кривизны. С такими подмногообразиями естественным образом связаны $(n+N)$-мерные плоские диагональные метрики с N константами на диагонали. Мы приводим также алгебро-геометрическую конструкцию построения таких специальных плоских диагональных метрик.

Предложенный метод является обобщением хорошо известной алгебро-геометрической конструкции Кричевера построения ортогональных систем координат в плоском пространстве [1]. Задача описания и построения ортогональных систем координат в $\mathbb{R}^n$ — классическая задача дифференциальной геометрии [3]; она сводится к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений с частными производными — системы уравнений Ламе, описывающей все плоские диагональные метрики, — и к решению совместных линейных систем дифференциальных уравнений с частными производными. Новый большой интерес к этой классической задаче возник в теории интегрируемых систем после работы Царева об интегрируемости обобщенным методом годографа полугамильтоновых диагонализуемых систем гидродинамического типа [2], в которой важную

[1]Исследование выполнено в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00316).

роль играют ортогональные координаты плоских метрик (или, другими словами, плоские диагональные метрики) для локально-гамильтоновых диагональных систем, а в общем полугамильтоновом случае — диагональные метрики с диагональной кривизной, которые, вообще говоря, плоскими не являются. Важнейшим и весьма широким семейством диагональных метрик с диагональной кривизной являются метрики подмногообразий в плоском пространстве с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны, определяющей ортогональные координаты на подмногообразии (в этих ортогональных координатах метрика подмногообразия — диагональная метрика с диагональной кривизной, т.е. метрика диагональна, $g_{ij}(u) = g_i(u)\delta_{ij}$, и в этих ортогональных координатах компоненты тензора кривизны Римана этой метрики для любого i удовлетворяют условию $R^{ij}_{ik}(u) = 0$ при $j \neq k$).

Напомним, что локальный гамильтонов формализм для систем гидродинамического типа, порождаемый плоскими метриками, был предложен Дубровиным и Новиковым в [4]. А диагональные плоские метрики порождают диагональные локально-гамильтоновы системы гидродинамического типа, интегрируемые обобщенным методом годографа [2]. В работе Мохова и Ферапонтова [5] был предложен нелокальный гамильтонов формализм для систем гидродинамического типа, порождаемый метриками постоянной кривизны. При этом ортогональные координаты в пространствах постоянной кривизны (или, другими словами, диагональные метрики постоянной кривизны) порождают нелокально-гамильтоновы диагональные системы гидродинамического типа, интегрируемые обобщенным методом годографа. Более общий нелокальный гамильтонов формализм для систем гидродинамического типа, развитый в работе Ферапонтова [6], связан с подмногообразиями с плоской нормальной связностью в плоском пространстве, а диагональные метрики подмногообразий с плоской нормальной связностью, параметризуемых линиями кривизны, также порождают нелокально-гамильтоновы диагональные системы гидродинамического типа, интегрируемые обобщенным методом годографа.

В дальнейшем Захаровым было доказано, что уравнения Ламе, описывающие плоские диагональные метрики, являются интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния ([7], [8]) (а позднее это было доказано и для других важных классов диагональных метрик с диагональной кривизной). Диагональные метрики (ортогональные координаты в различных римановых пространствах и, в частности, на подмногообразиях плоских пространств) стали ключевым объектом целого ряда важных работ по дифференциальной геометрии и интегрируемым системам, в частности, по теории согласованных метрик и связанных с ними интегрируемых иерархий (см., например, [9]–[12]). Первой работой по построению ортогональных систем координат алгебро-геометрическими методами была работа Кричевера [1] о построении ортогональных систем координат в плоском пространстве, затем было предложено несколько различных обобщений конструкции Кричевера ([13]–[15]), в том числе для построения ортогональных систем координат в пространствах постоянной кривизны [14].

В данной статье по алгебро-геометрическим данным и соответствующим функциям Бейкера–Ахиезера мы строим вещественные функции $x^k(u)$, $k = 1, \dots, n+N$, от n вещественных переменных $u = (u^1, \dots, u^n)$, задающие n-мерные подмногообразия с плоской нормальной связностью в плоском $(n+N)$-мерном пространстве с ортогональными координатами $(u^1, \dots, u^n)$ на них, определяемыми линиями кривизны на подмногообразии. Все построенные в этой работе метрики подмногообразий являются диагональными метриками с диагональной кривизной.

Алгебро-геометрический метод позволяет найти явные формулы для всех построенных дифференциально-геометрических объектов в θ-функциях некоторой алгебраической кривой. В работе Миронова и Тайманова [13] был изучен предельный случай конструкции Кричевера для ортогональных координат в плоском пространстве, когда алгебраическая кривая становится сингулярной и приводимой, причем все ее неприводимые компоненты являются гладкими рациональными комплексными кривыми. В этом случае все получаемые формулы выражаются в элементарных функциях. Используя подход Миронова–Тайманова, мы также рассматриваем предельный случай нашей конструкции для таких сингулярных кривых и строим явные примеры рассматриваемых подмногообразий и метрик в элементарных функциях.

§ 2. Подмногообразия с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны

Пусть $(x^1, \dots, x^{n+N})$ — евклидовы координаты в $(n+N)$-мерном евклидовом пространстве. Рассмотрим n-мерное подмногообразие M, локально задаваемое вектором $x(u) = (x^1(u), \dots, x^{n+N}(u))$, $u = (u^1, \dots, u^n)$.

В данной работе для простоты изложения мы будем рассматривать подмногообразия евклидовых пространств, при этом все результаты легко обобщаются на псевдоевклидовы пространства произвольной сигнатуры, о чем будет сказано в конце §4.

В касательном пространстве в произвольной точке подмногообразия M выберем базис стандартным образом: $\{\partial_1 x(u), \dots, \partial_n x(u)\}$. Базис в нормальном пространстве обозначим через $\{n^1(u), \dots, n^N(u)\}$.

В нормальном пространстве подмногообразия M мы будем рассматривать только ортонормированные базисы:

$$(n^\alpha(u), n^\beta(u)) = \delta^{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1, \dots, N.$$

Здесь и далее (v, w) — стандартное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+N}$.

Метрика подмногообразия имеет вид

$$g_{ij}(u) = (\partial_i x(u), \partial_j x(u)) = \sum_{s=1}^{n+N} \partial_i x^s(u) \cdot \partial_j x^s(u).$$

Рассмотрим разложения Гаусса–Вайнгартена в выбранном базисе:

$$\partial_i \partial_j x(u) = \sum_{s=1}^{n} \Gamma_{ij}^{s}(u) \partial_s x(u) + \sum_{\alpha=1}^{N} (B_\alpha)_{ij}(u) n^\alpha(u),$$
$$\partial_i n^\alpha(u) = \sum_{s=1}^{n} (w^\alpha)_i^s(u) \partial_s x(u) + \sum_{\beta=1}^{N} (\omega_i)_\beta^\alpha(u) n^\beta(u),$$

где $\Gamma_{ij}^k(u)$ — символы Кристоффеля метрики $g_{ij}(u)$, $B_\alpha(u)$ — вторые квадратичные формы подмногообразия M. Операторы $w^\alpha(u)$ называются операторами Вайнгартена, и для них верно соотношение

$$(w^\alpha)_j^i(u) = -\sum_{s=1}^{n} g^{is}(u)(B_\alpha)_{sj}(u).$$

Коэффициенты кручения $(\omega_i)_\beta^\alpha(u)$ задают нормальную связность на подмногообразии M.

Нормальная связность называется плоской, если существует ортонормированный базис нормального пространства, такой, что все формы кручения равны нулю: $(\omega_i)_\beta^\alpha(u) = 0$. Соответствующий базис называется ковариантно постоянным ортонормированным базисом в нормальном пространстве подмногообразия.

Будем теперь считать, что M — подмногообразие с плоской нормальной связностью, в нормальном пространстве которого выбран ковариантно постоянный ортонормированный базис. В таком случае операторы Вайнгартена коммутируют (уравнения Риччи):

$$[w^\alpha(u), w^\beta(u)] = 0.$$

Это дает нам набор векторных полей, состоящих в каждой точке из общих собственных векторов операторов Вайнгартена. Интегральные линии таких векторных полей называются линиями кривизны.

Если операторы Вайнгартена невырожденны в некотором смысле, то базис в касательном пространстве подмногообразия, состоящий из общих собственных векторов операторов Вайнгартена, является голономным, т. е. подмногообразие можно параметризовать так, чтобы координатные линии являлись линиями кривизны подмногообразия (голономная сеть линий кривизны). Другими словами, на подмногообразии можно ввести координаты, в которых первая и вторые квадратичные формы диагональны. Мы рассмотрим именно такой случай общего положения для подмногообразий с плоской нормальной связностью, т. е. случай, когда сеть линий кривизны голономна. Коэффициенты разложения Гаусса–Вайнгартена в этом случае имеют вид

$$g_{ij}(u) = (H_i(u))^2 \delta_{ij}, \qquad (B_\alpha)_{ij}(u) = (B_\alpha)_i(u) \delta_{ij},$$
$$(w^\alpha)_j^i(u) = (w^\alpha)^i(u) \delta_j^i = -\frac{(B_\alpha)_i(u)}{(H_i(u))^2} \delta_j^i, \qquad (\omega_i)_\beta^\alpha(u) = 0.$$

§ 3. Алгебро-геометрические данные

Введем необходимые для нас алгебро-геометрические данные

$$\{\Gamma, g; \{P_j,\, k_j^{-1}\}_{j=1}^{n}; R_1, \ldots, R_{l+N}; \gamma_1, \ldots, \gamma_{g+l+N-1}\}.$$

Рассмотрим гладкую алгебраическую кривую Γ рода g и выберем на ней три дивизора:

$$P = P_1 + \cdots + P_n, \quad \gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_{g+l+N-1}, \quad R = R_1 + \cdots + R_{l+N},$$

где l — произвольное натуральное число, n и N — размерность и коразмерность подмногообразия, которое мы хотим построить.

В окрестности каждой точки P_i введем локальный параметр k_i^{-1}, $k_i^{-1}(P_i) = 0$.

Многоточечной функцией Бейкера–Ахиезера $\psi(u, Q|d)$, $u = (u^1, \ldots, u^n)$, $Q \in \Gamma$, $d = (d_1, \ldots, d_{l+N})$, называется функция, обладающая следующими аналитическими свойствами [1]:

(1) в каждой точке P_j функция ψ имеет существенную особенность, и в окрестности этой точки она имеет разложение вида

$$\psi(u, Q) = e^{k_j u^j}\left(\xi_0^j(u) + \frac{\xi_1^j(u)}{k_j} + \ldots\right); \tag{3.1}$$

(2) функция $\psi(u, Q)$ по переменной $Q \in \Gamma$ является мероморфной вне точек дивизора P и имеет простые полюсы в точках дивизора γ;

(3) в точках дивизора R функция ψ принимает постоянные значения, которые задаются вектором нормировочных констант d: $\psi(u, R_k) = d_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, l + N$, $d = (d_1, \ldots, d_{l+N}) \neq 0$.

Такая функция существует и единственна. Более того, если $d_1 = \cdots = d_{l+N} = 0$, то $\psi(u, Q) \equiv 0$. Функция $\psi(u, Q)$ выражается через θ-функции кривой Γ (см. [1]).

Чтобы построить подмногообразия с плоской нормальной связностью, необходимо ограничить класс кривых и дивизоров, которые мы выбираем. Мы будем рассматривать только такие кривые Γ, для которых существует голоморфная инволюция σ ровно с $2(n + N)$ неподвижными точками. Половина неподвижных точек — это точки $P_1, \ldots, P_n, R_{l+1}, \ldots, R_{l+N}$, остальные обозначим через $Q_1, \ldots, Q_{n+N}$. Кроме того, локальный параметр в окрестности каждой точки P_i меняется голоморфно следующим образом: $\sigma k_i = -k_i$.

Ограничение для дивизоров γ и R заключается в том, что дивизор $\gamma + \sigma(\gamma) - R - \sigma(R_1) - \cdots - \sigma(R_l) + P_1 + \cdots + P_n - Q_1 - \cdots - Q_{n+N}$ является каноническим, т. е. на Γ существует мероморфный дифференциал Ω с таким дивизором нулей и полюсов.

Сформулируем условия вещественности, аналогичные условиям работы [1].

Лемма 3.1. *Пусть на* Γ *существует антиголоморфная инволюция* τ: $\Gamma \to \Gamma$, *такая, что точки* $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_{n+N}, R_1, \ldots, R_{l+N}$ *неподвижны при инволюции* τ, *а локальные параметры в окрестности точек* P_i *меняются антиголоморфно*: $\tau(k_i^{-1}) = \overline{k_i^{-1}}$, *и* $\tau(\gamma) = \gamma$.

Тогда, если вектор нормировочных констант d вещественный, то

$$\psi(u,Q|d) = \overline{\psi(u,\tau(Q)|d)}.$$

§ 4. Построение подмногообразия

Пусть константы ε_i определяются из разложения мероморфного дифференциала Ω в точке P_i:

$$\Omega = k_i^{-1}(\varepsilon_i^2 + O(k_i^{-1}))\,dk_i^{-1},$$

а $q_s^2 = \operatorname{Res}_{Q_s}\Omega$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 4.1. *Для вещественных функций $x^k(u) = \psi(u,Q_k)$, $k = 1,\ldots, n+N$, выполнены соотношения*

$$\sum_{s=1}^{n+N} q_s^2 \partial_i x^s(u)\partial_j x^s(u) = 0, \quad \sum_{s=1}^{n+N} q_s^2 \partial_i x^s(u)\partial_i x^s(u) = (\varepsilon_i \cdot \xi_0^i(u))^2, \qquad i \neq j.$$

Вторые производные этих функций по разным переменным выражаются через соответствующие первые производные:

$$\partial_i\partial_j x^k(u) = c_{ij}^i(u)\partial_i x^k(u) + c_{ij}^j(u)\partial_j x^k(u), \qquad i \neq j,\ k = 1,\ldots,n+N.$$

Доказательство. Из леммы 3.1 следует, что функции $x^k(u)$ вещественны.

Доказательство соотношений сводится к вычислению суммы вычетов некоторых мероморфных дифференциалов.

Для произвольных $i,j = 1,\ldots,n$ рассмотрим дифференциал

$$\Omega_{ij} = \partial_i\psi(u,Q)\cdot\partial_j\psi(u,\sigma Q)\cdot\Omega.$$

Если $i \neq j$, то дифференциал Ω_{ij} является мероморфным и имеет полюсы только в точках $Q_1,\ldots,Q_{n+N}$. Поэтому выполняется теорема о сумме вычетов мероморфного дифференциала:

$$\sum_{s=1}^{n+N} \partial_i x^s(u)\cdot\partial_j x^s(u)\cdot q_s^2 = 0.$$

Это в точности первое соотношение теоремы.

Если $i = j$, то дифференциал Ω_{ii} является мероморфным и имеет полюсы в точках $Q_1,\ldots,Q_{n+N},P_i$. Поэтому выполняется теорема о сумме вычетов мероморфного дифференциала:

$$\sum_{s=1}^{n+N} \partial_i x^s(u)\cdot\partial_i x^s(u)\cdot q_s^2 - (\varepsilon_i\cdot\xi_0^i(u))^2 = 0.$$

Это совпадает со вторым соотношением теоремы.

Выражения для вторых производных функций $x^k(u)$ следуют из общих свойств функций Бейкера–Ахиезера. А именно, в работе [1] доказано, что функции $c^i_{ij}(u) = \partial_j \xi^i_0(u)/\xi^i_0(u)$ являются коэффициентами разложения вторых производных функции Бейкера–Ахиезера:

$$\partial_i \partial_j \psi(u, Q) = c^i_{ij}(u)\partial_i \psi(u, Q) + c^j_{ji}(u)\partial_j \psi(u, Q), \qquad i \neq j.$$

Подставляя в это равенство точки Q_k, мы доказываем последнее утверждение теоремы. □

Из доказательства теоремы следует, что числа $q^2_1, \dots, q^2_{n+N}$ задают сигнатуру объемлющего пространства. Поэтому при соответствующем выборе алгебро-геометрических данных мы получим подмногообразия псевдоевклидовых пространств.

Таким образом, если $q^2_1 = \dots = q^2_{n+N} = 1$, то функции $x^1(u), \dots, x^{n+N}(u)$ задают подмногообразие евклидова пространства, параметризованное линиями кривизны. Выполнения этого условия можно добиться выбором подходящего набора алгебро-геометрических данных или выбором новых функций вложения: $\tilde{x}^k(u) = q_k \cdot x^k(u)$, $q^2_k > 0$, $k = 1, \dots, n+N$. Поэтому далее мы будем считать, что $q^2_1 = \dots = q^2_{n+N} = 1$.

Отметим, что при $N = 0$ эта конструкция совпадает с конструкцией Кричевера [1], а при $N = 1$, $d = (0, \dots, 0, d_{l+1})$ — с конструкцией Бердинского–Рыбникова [14].

§ 5. Построение ковариантно постоянного базиса в нормальном пространстве

Для того чтобы построить ковариантно постоянные нормальные поля на подмногообразии, введем функции Бейкера–Ахиезера со специальными нормирующими векторами d. А именно, рассмотрим функции

$$\psi^{(\alpha)}(u, Q) = \psi(u, Q | e_{l+\alpha}), \qquad \alpha = 1, \dots, N,$$

где e_k есть $(l+N)$-мерный вектор, у которого k-й элемент равен единице, а остальные — нулю.

Зададим N векторов $\tilde{n}^\alpha(u) = ((\tilde{n}^\alpha)^1(u), \dots, (\tilde{n}^\alpha)^{n+N}(u))$ так, что $(\tilde{n}^\alpha)^k(u) = \psi^{(\alpha)}(u, Q_k)$, $\alpha = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, n+N$.

Теорема 5.1. *Для заданных выше векторов* $\tilde{n}^1(u), \dots, \tilde{n}^N(u)$ *верны следующие соотношения*:

(1) $(\tilde{n}^\alpha(u), \tilde{n}^\beta(u)) = 0$, $\alpha \neq \beta$;

(2) $(\tilde{n}^\alpha(u), \tilde{n}^\alpha(u)) = -\operatorname{Res}_{R_{l+\alpha}} \Omega$, $\alpha = 1, \dots, N$;

(3) $(\partial_i \tilde{n}^\alpha(u), \tilde{n}^\beta(u)) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha, \beta = 1, \dots, N$.

Доказательство. Докажем каждое из равенств отдельно.

(1) При $\alpha \neq \beta$ рассмотрим дифференциал $\Omega^{(\alpha\beta)} = \psi^{(\alpha)}(u, Q) \cdot \psi^{(\beta)}(u, \sigma Q) \cdot \Omega$. Так как $\sigma k_i = -k_i$, то существенная особенность функции $\psi^{(\alpha)}(u, Q)$ сократится с существенной особенностью функции $\psi^{(\beta)}(u, \sigma Q)$, т.е. дифференциал $\Omega^{(\alpha\beta)}$

мероморфный. Дивизор полюсов этого дифференциала выглядит следующим образом:

$$(\Omega^{(\alpha\beta)})_\infty = Q_1 + \cdots + Q_{n+N}.$$

Так как $q_1^2 = \cdots = q_{n+N}^2 = 1$, то по теореме о сумме вычетов мероморфного дифференциала получим

$$\sum_{s=1}^{n+N} \psi^{(\alpha)}(u, Q_s) \cdot \psi^{(\beta)}(u, Q_s) = 0.$$

В терминах векторов $\tilde{n}^\alpha(u)$, $\tilde{n}^\beta(u)$ это равенство имеет вид $(\tilde{n}^\alpha(u), \tilde{n}^\beta(u)) = 0$.

(2) Для произвольного $\alpha = 1, \ldots, N$ рассмотрим дифференциал $\Omega^{(\alpha\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(u, Q) \cdot \psi^{(\alpha)}(u, \sigma Q) \cdot \Omega$. Он также мероморфен, но его дивизор полюсов отличается от предыдущего случая:

$$(\Omega^{(\alpha\alpha)})_\infty = Q_1 + \cdots + Q_{n+N} + R_{l+\alpha}.$$

По теореме о сумме вычетов мероморфного дифференциала получим

$$\sum_{s=1}^{n+N} \psi^{(\alpha)}(u, Q_s) \cdot \psi^{(\alpha)}(u, Q_s) + \psi^{(\alpha)}(u, R_{l+\alpha}) \cdot \psi^{(\alpha)}(u, R_{l+\alpha}) \cdot \operatorname*{Res}_{R_{l+\alpha}} \Omega = 0.$$

Так как $\psi^{(\alpha)}(u, R_{l+\alpha}) = 1$, то это равенство можно переписать в виде $(\tilde{n}^\alpha(u), \tilde{n}^\alpha(u)) = -\operatorname{Res}_{R_{l+\alpha}} \Omega$.

(3) Для произвольных $i = 1, \ldots, n$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, N$ рассмотрим дифференциал $\Omega_i^{(\alpha\beta)} = \partial_i \psi^{(\alpha)}(u, Q) \cdot \psi^{(\beta)}(u, \sigma Q) \cdot \Omega$. Он также мероморфен, и его дивизор полюсов такой же, как и в первом случае, так как $\partial_i \psi^{(\alpha)}(u, R_{l+\tilde{\alpha}}) = 0$ для произвольного $\tilde{\alpha} = 1, \ldots, N$. Отметим также, что в точке P_i у функции $\partial_i \psi^{(\alpha)}(u, Q) \cdot \psi^{(\beta)}(u, \sigma Q)$ простой полюс, но он сократится с нулем дифференциала Ω.

По теореме о сумме вычетов мероморфного дифференциала получим

$$\sum_{s=1}^{n+N} \partial_i \psi^{(\alpha)}(u, Q_s) \cdot \psi^{(\beta)}(u, Q_s) = 0.$$

В терминах векторов $\tilde{n}^\alpha(u)$, $\tilde{n}^\beta(u)$ это равенство имеет вид $(\partial_i \tilde{n}^\alpha(u), \tilde{n}^\beta(u)) = 0$. $\square$

Таким образом, мы построили ортогональный базис в нормальном пространстве, каждый вектор которого имеет постоянную длину на подмногообразии. Положим $r_\alpha^2 = (\tilde{n}^\alpha(u), \tilde{n}^\alpha(u)) = -\operatorname{Res}_{R_{l+\alpha}} \Omega$.

Тогда из соотношения (3) следует, что в ортонормированном базисе нормального пространства $\{\tilde{n}^1(u)/r_1, \ldots, \tilde{n}^N(u)/r_N\}$ все коэффициенты кручения равны нулю: $(\omega_i)_\beta^\alpha = 0$. А это означает, что связность в нормальном пространстве плоская, а построенный ортонормированный базис в нормальном пространстве подмногообразия является ковариантно постоянным.

§ 6. Диагональные плоские метрики специального вида

Пусть функции $x(u) = (x^1(u), \dots, x^{n+N}(u))$ локально задают n-мерное подмногообразие M в $(n+N)$-мерном евклидовом пространстве, и пусть M — подмногообразие с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны, определяющей ортогональные координаты $u = (u^1, \dots, u^n)$ на подмногообразии M, а $n^1(u), \dots, n^N(u)$ — ковариантно постоянный ортонормированный базис в нормальном пространстве. По этим функциям локально мы можем построить ортогональные координаты для объемлющего пространства.

Для расширенного набора параметров $\tilde{u} = (u^1, \dots, u^n, u^{n+1}, \dots, u^{n+N})$ рассмотрим функции

$$y^k(\tilde{u}) = x^k(u) + \sum_{\alpha=1}^{N} u^{n+\alpha} \cdot (n^\alpha(u))^k, \qquad k = 1, \dots, n+N.$$

Эти функции параметризуют некоторую область объемлющего пространства, причем соответствующая метрика диагональна с диагональными элементами $\tilde{H}_i^2(\tilde{u})$, $i = 1, \dots, n+N$, и имеет N единиц на диагонали: $\tilde{H}_i^2(\tilde{u}) \equiv 1$, $i = n+1, \dots, n+N$.

Чтобы построить такие метрики по алгебро–геометрическим данным, рассмотрим функцию Бейкера–Ахиезера $\tilde{\psi}(\tilde{u}, Q)$, у которой первые два свойства такие же, как у функции $\psi(u, Q)$, а условия нормировки включают линейную зависимость от новых параметров:

$$\tilde{\psi}(\tilde{u}, R_\alpha) = d_\alpha, \quad \tilde{\psi}(\tilde{u}, R_{l+\beta}) = d_{l+\beta} + \frac{u^{n+\beta}}{r_\beta}, \qquad \alpha = 1, \dots, l, \ \beta = 1, \dots, N,$$

где все d_i — нормировочные константы функции $\psi(u, Q)$, а константы r_β определяются так же, как и раньше.

Тогда легко видеть, что

$$\tilde{\psi}(\tilde{u}, Q) = \psi(u, Q) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{u^{n+\alpha}}{r_\alpha} \cdot \psi^{(\alpha)}(u, Q).$$

Положим $y^k(\tilde{u}) = \tilde{\psi}(\tilde{u}, Q_k)$. Тогда при подстановке точек Q_k, $k = 1, \dots, n+N$, в последнее равенство получим

$$y^k(\tilde{u}) = x^k(u) + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{u^{n+\alpha}}{r_\alpha} \cdot (\tilde{n}^\alpha)^k(u).$$

Таким образом, функции $y^k(\tilde{u}) = \tilde{\psi}(\tilde{u}, Q_k)$, построенные по алгебро-геометрическим данным, задают ортогональные координаты, для которых метрика имеет N единиц на диагонали.

§ 7. Примеры

Для построения явных примеров воспользуемся методом Миронова–Тайманова [13] построения ортогональных систем координат по сингулярной кривой с соответствующими изменениями при выборе алгебро-геометрических данных.

Рассмотрим сингулярную кривую Γ, состоящую из трех изоморфных сфере Римана компонент Γ_1, Γ_2, Γ_3 с выбранным на каждой компоненте локальным параметром z_1, z_2, z_3 соответственно, причем Γ_1 пересекается с Γ_2 в двух точках и Γ_2 пересекается с Γ_3 в двух точках:

$$\pm a \in \Gamma_1 \sim \pm b \in \Gamma_2, \quad \pm c \in \Gamma_2 \sim \pm d \in \Gamma_3.$$

Арифметический род кривой Γ равен 2, т. е. $g = 2$.

Пусть $n = 2$, $N = 1$, $l = 1$, а голоморфной инволюцией на Γ будет смена знака локального параметра на каждой компоненте: $\sigma z_i = -z_i$. Выберем все неподвижные точки следующим образом:

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad R_2 = 0 \in \Gamma_1,$$
$$Q_1 = 0 \in \Gamma_2, \quad Q_2 = 0 \in \Gamma_3, \quad Q_3 = \infty \in \Gamma_3.$$

Оставшиеся точки дивизоров R и γ выберем с учетом ограничения, связанного с существованием дифференциала:

$$R_1 \in \Gamma_1,\ \gamma_1 \in \Gamma_1,\ \gamma_2 \in \Gamma_2,\ \gamma_3 \in \Gamma_3.$$

Дифференциал Ω на каждой компоненте задается следующими равенствами:

$$\Omega_1 = \frac{(z_1^2 - \gamma_1^2)dz_1}{z_1(z_1^2 - a^2)(z_1^2 - R_1^2)}, \quad \Omega_2 = \frac{(z_2^2 - \gamma_2^2)dz_2}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - c^2)}, \quad \Omega_3 = \frac{(z_3^2 - \gamma_3^2)dz_3}{z_3(z_3^2 - d^2)}.$$

Запишем условие регулярности дифференциала [13]:

$$\operatorname*{Res}_{\pm a} \Omega_1 + \operatorname*{Res}_{\pm b} \Omega_2 = 0, \quad \operatorname*{Res}_{\pm c} \Omega_2 + \operatorname*{Res}_{\pm d} \Omega_3 = 0. \tag{7.1}$$

Приступим теперь к построению соответствующих этим алгебро-геометрическим данным подмногообразий евклидова пространства. Для этого нужно потребовать выполнения условий на вычеты дифференциала в точках Q_1, Q_2, Q_3:

$$\operatorname*{Res}_{0} \Omega_2 = \operatorname*{Res}_{0} \Omega_3 = \operatorname*{Res}_{\infty} \Omega_3. \tag{7.2}$$

Выберем, например, одно из решений уравнений (7.1) и (7.2):

$$a = i,\ b = i,\ c = i\sqrt{2},\ d = i, \quad R_1 = 3, \quad \gamma_1 = \sqrt{29},\ \gamma_2 = \sqrt{2},\ \gamma_3 = 1. \tag{7.3}$$

Функцию Бейкера–Ахиезера также зададим на каждой компоненте:

$$\psi_1(u, z_1) = e^{z_1 u^1}\left(f_0(u) + \frac{f_1(u)}{z_1 - \gamma_1}\right), \quad \psi_2(u, z_2) = e^{z_2 u^2}\left(g_0(u) + \frac{g_1(u)}{z_2 - \gamma_2}\right),$$
$$\psi_3(u, z_3) = h_0(u) + \frac{h_1(u)}{z_3 - \gamma_3}.$$

Рассмотрим вектор нормировочных констант, состоящий из единиц, $d = (1, 1)$. Тогда условия нормировки функции Бейкера–Ахиезера имеют вид

$$\psi_1(u, R_1) = 1, \quad \psi_1(u, 0) = 1. \tag{7.4}$$

Запишем условия равенства значений функции Бейкера–Ахиезера на разных компонентах в двойных точках:

$$\psi_1(u, \pm a) = \psi_2(u, \pm b), \quad \psi_2(u, \pm c) = \psi_3(u, \pm d). \tag{7.5}$$

Решение системы линейных уравнений (7.4) и (7.5) на функции $f_0(u)$, $f_1(u)$, $g_0(u)$, $g_1(u)$, $h_0(u)$, $h_1(u)$ при значениях параметров (7.3) дает явные формулы для функции Бейкера–Ахиезера на кривой Γ. Значения этой функции в точках Q_1, Q_2, Q_3 — это функции $x^1(u)$, $x^2(u)$, $x^3(u)$, которые задают двумерную поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, параметризованную линиями кривизны.

Подмногообразия коразмерности 1 всегда являются подмногообразиями с плоской нормальной связностью.

Коэффициенты Ламе метрики построенной поверхности имеют вид

$$\begin{gathered}
H_1(u) = \frac{1}{3}(\sqrt{29} - (-3 + \sqrt{29})e^{-3u^1}),\\
H_2(u) = \frac{1}{90}((c_1 e^{-3u^1} + c_2)\cos(u^1 - u^2) + (c_3 e^{-3u^1} - c_4)\sin(u^1 - u^2)),\\
c_1 = 3 - 29\sqrt{2} - \sqrt{29} + 3\sqrt{58}, \quad c_2 = 87 + 29\sqrt{2} + \sqrt{29} - 3\sqrt{58},\\
c_3 = -29 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{29} + \sqrt{58}, \quad c_4 = -29 + 87\sqrt{2} + 3\sqrt{29} + \sqrt{58}.
\end{gathered}$$

Очевидно, что в случае подмногообразий коразмерности 1 нормированное нормальное поле является ковариантно постоянным. Чтобы построить в нашем случае ковариантно постоянное нормальное поле непосредственно по алгебро-геометрическим данным, нужно найти функцию Бейкера–Ахиезера $\psi^{(1)}(u, Q)$ из решения системы линейных уравнений (7.5) и

$$\psi_1^{(1)}(u, R_1) = 0, \quad \psi_1^{(1)}(u, 0) = 1.$$

Затем нужно составить вектор из значений полученной функции в точках Q_1, Q_2, Q_3:

$$\tilde{n}^1(u) = (\psi_2^{(1)}(u, 0), \psi_3^{(1)}(u, 0), \psi_3^{(1)}(u, \infty)).$$

Литература

[1] И. М. Кричевер, *Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности*, Функц. анализ и его прил., **31**:1 (1997), 32–50.

[2] С. П. Царев, *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**:5 (1990), 1048–1068.

[3] G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1910.

[4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, *Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема*, Докл. АН СССР, **270**:4 (1983), 781–785.

[5] О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов, *О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны*, УМН, **45**:3(273) (1990), 191–192.
[6] Е. В. Ферапонтов, *Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа*, Функц. анализ и его прил., **25**:3 (1991), 37–49.
[7] V. E. Zakharov, *Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type*. I: *Integration of the Lamé equations*, Duke Math. J., **94**:1 (1998), 103–139.
[8] V. E. Zakharov, *Application of inverse scattering method to problems of differential geometry*, Contemp. Math., **301** (2002), 15–34.
[9] О. И. Мохов, *Согласованные и почти согласованные метрики*, УМН, **55**:4 (2000), 217–218.
[10] О. И. Мохов, *Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики*, Функц. анализ и его прил., **35**:2 (2001), 24–36.
[11] О. И. Мохов, *Пары Лакса для уравнений, описывающих согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, и интегрируемые редукции уравнений Ламе*, ТМФ, **138**:2 (2004), 283–296.
[12] О. И. Мохов, *Пучки согласованных метрик и интегрируемые системы*, УМН, **72**:5 (2017), 113–164.
[13] А. Е. Миронов, И. А. Тайманов, *Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым*, в кн.: *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ, Сборник статей, Тр. МИАН*, **255**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2006, 180–196.
[14] Д. А. Бердинский, И. П. Рыбников, *Об ортогональных криволинейных системах координат в пространствах постоянной кривизны*, Сиб. матем. журн., **52**:3 (2011), 502–511.
[15] О. А. Богоявленская, *Об одном классе конечнозонных криволинейных ортогональных координат*, Сиб. электрон. матем. изв., **12** (2015), 947–954.

Е. В. Глухов
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук, Москва, Россия
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет, Москва, Россия
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, Московский центр
фундаментальной и прикладной математики,
Москва, Россия
E-mail: evgeniy.glukhov.eg@gmail.com

Поступила в редакцию
5 декабря 2019 г.
После доработки
5 декабря 2019 г.
Принята к публикации
2 апреля 2020 г.

О. И. Мохов
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
Российской академии наук, Москва, Россия
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет, Москва, Россия
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова, Московский центр
фундаментальной и прикладной математики,
Москва, Россия
E-mail: mokhov@mi-ras.ru, mokhov@landau.ac.ru