Б. Н. Хабибуллин, Последовательности неединственности для весовых пространств голоморфных функций, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, номер 4, 75–84

Известия вузов. Математика
2015, №4, с. 75–84

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Задачи описания подпоследовательностей нулей (последовательностей неединственности) для весовых пространств голоморфных функций по некоторой общей схеме сводятся к решению определенных задач в весовых классах субгармонических функций. Затрагиваются также геометрические вопросы и полнота экспоненциальных систем.

Ключевые слова: голоморфность, подпоследовательность нулей, множество неединственности, субгармоническая функция, система экспонент, ρ-выпуклая дополняемость, геометрическая разность, полное выметание.

УДК: 517.537 : 517.574 : 514.172

1. Введение

1.1. Основные обозначения, определения и соглашения. Как обычно, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно всех *вещественных* и *комплексных чисел* или их естественные геометрические интерпретации; кроме того, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — *единичный круг* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Используются определения и понятия из [1]. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Каждой не более чем счетной последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1} \subset D$ без точек сгущения в D сопоставляем *считающую меру* $n_\Lambda(S) := \sum\limits_{\lambda_k \in S} 1$ — число точек из Λ, попавших в $S \subset D$. Среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. Объединение $\Lambda \cup \Lambda_0$ двух таких последовательностей $\Lambda, \Lambda_0 \subset D$ полностью определяется считающей мерой $n_{\Lambda\cup\Lambda_0} := n_\Lambda + n_{\Lambda_0}$. По определению функция $n_\Lambda(\lambda) := n_\Lambda\bigl(\{\lambda\}\bigr)$ — дивизор последовательности Λ, т. е. число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ. Так, $\lambda \in \Lambda$, если $n_\Lambda(\lambda) > 0$.

Векторное пространство всех голоморфных в D функций обозначаем как $\mathrm{Hol}(D)$. Если не оговорено противное, пространство $\mathrm{Hol}(D)$ наделяем топологией равномерной сходимости на компактах из D. Ненулевой функции $f \in \mathrm{Hol}(D)$ соответствует *последовательность нулей* Zero_f, перенумерованная с учетом кратности.

Для компакта $C \subset \mathbb{C}$ через $\mathrm{CHol}[C]$ обозначаем векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ непрерывных на C комплекснозначных функций, одновременно голоморфных во *внутренности* $\mathrm{int}\, C$, если она не пуста, с естественной sup-нормой.

Последовательность точек $\Lambda \subset D$ называется *подпоследовательностью нулей* для подмножества $H \subset \mathrm{Hol}(D)$, если найдется ненулевая функция $f \in H$, для которой $\Lambda \subset \mathrm{Zero}_f$ в

Поступила 06.10.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-0030а).

том смысле, что $n_\Lambda(\lambda) \le n_{\mathrm{Zero}_f}(\lambda)$ для всех $\lambda \in D$. Если H замкнуто относительно вычитания, например, векторное подпространство над $\mathbb{R}$, то подпоследовательность нулей для H называют *последовательностью* (или *множеством*) *неединственности* для H.

Выпуклый конус всех субгармонических функций в области $D \subset \mathbb{C}$ обозначаем через $\mathrm{sbh}(D)$. Субгармоническую функцию, тождественно равную $-\infty$ на D, обозначаем $\boldsymbol{-\infty}$. Для $s \in \mathrm{sbh}(D)$ меру Рисса функции s чаще всего будем обозначать как ν_s, и наоборот, субгармоническую функцию s в D с мерой Рисса ν часто записываем в виде $s := s_\nu$. Борелевскую положительную меру (конечную на компактах из D) или меру Радона ν ([2], Appendix A) называем *подмерой для подмножества* $S \subset \mathrm{sbh}(D)$, если найдется функция $s \in S$, не равная $\boldsymbol{-\infty}$, с мерой Рисса $\nu_s \ge \nu$ на D. Иначе говоря, ν — подмера для S, если для некоторой (любой) субгармонической функции s_ν с мерой Рисса ν найдется функция $v \in \mathrm{sbh}(D)$, не равная $\boldsymbol{-\infty}$, для которой $s := s_\nu + v \in S$. Возможность варьирования слов "некоторый" и "любой" в последнем предложении обеспечена "нечувствительностью" неравенств к перекидыванию гармонических слагаемых от одного субгармонического слагаемого к другому, поскольку для любой гармонической в D функции h ее мера Рисса равна нулю и не влияет на определение.

Для (весовой) функции $M : D \to [-\infty, +\infty]$ со значениями в расширенной вещественной оси $[-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ с естественным отношением порядка определим весовой класс субгармонических функций

$$\mathrm{sbh}(D; M] := \{s \in \mathrm{sbh}(D) \colon s \le M + \mathrm{const} \text{ на } D\},$$

здесь и далее const — какая-либо постоянная, а $s \le M + \mathrm{const}$ на D означает выполнение поточечных неравенств $s(z) \le M(z) + \mathrm{const}$ во всех точках $z \in D$. Аналогично определим весовое пространство голоморфных функций

$$\mathrm{Hol}(D; \exp M] := \{f \in \mathrm{Hol}(D) : |f| \le \mathrm{const} \cdot \exp M \text{ на } D\}.$$

1.2. Постановка основной задачи и структура статьи. В основном разделе 2 рассматривается следующая задача. Пусть N и M — две весовые функции в области $D \subset \mathbb{C}$ и Λ — последовательность точек в D. При каких простых соотношениях между N и M некоторая подмера $\mu \ge n_\Lambda$ для $\mathrm{sbh}(D; M]$ определяет подпоследовательность нулей Λ для пространства $\mathrm{Hol}(D; \exp N]$ или, возможно, чуть большего пространства? Более или менее удовлетворительное решение этой задачи позволяет свести исследование подпоследовательностей нулей к гибкому аппарату субгармонических функций в классах $\mathrm{sbh}(D; M]$, отличных от $\mathrm{sbh}(D; N]$. Также в п. 3.1 тот же вопрос отдельно исследуется для весовых пространств функций на всей плоскости $\mathbb{C}$, определяемых положительно однородными при показателе $\rho > 0$ весовыми функциями. В п. 3.2 обсуждаются специальный случай $\rho = 1$, отдельные геометрические понятия и их связь с неполнотой в пространствах $\mathrm{CHol}[C]$ экспоненциальных систем

$$\mathrm{Exp}^\Lambda := \{z^p e^{\lambda z} : z \in \mathbb{C},\ \lambda \in \Lambda,\ 0 \le p \le n_\Lambda(\lambda) - 1,\ p \text{ — целое число}\}. \tag{1}$$

2. Последовательности неединственности

Для подмножества S топологического пространства через $\mathrm{bd}\, S$ обозначаем границу S; $\mathrm{dist}(\cdot, \cdot)$ — евклидово расстояние между двумя объектами (точками, подмножествами) в евклидовом пространстве (в нашем случае $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Пишем $D \Subset \mathbb{C}$, если область D *предкомпактна* в $\mathbb{C}$, т. е. просто ограничена. Весовой функции $N : D \to [-\infty, +\infty]$ будем сопоставлять некоторое ее "*поднятие*" $N^\uparrow : D \to [-\infty, +\infty]$: *для каждого*

$z \in D$ *полагаем*

$$N^{\uparrow}(z) := \inf_{0<a<\operatorname{dist}(z,\operatorname{bd} D)} \Bigl(\sup_{|z-w|\le a} N(w) - \ln a + 3\ln\bigl(1+|z|+a\bigr)\Bigr), \quad \text{если } D \subset \mathbb{C}; \tag{2a}$$

$$N^{\uparrow}(z) := \inf_{0<b<\min\{e^{|z|},\, \operatorname{dist}(z,\operatorname{bd} D)\}} \Bigl(\sup_{|z-w|\le b} N(w) - \ln b\Bigr), \quad \text{если } D \Subset \mathbb{C}; \tag{2b}$$

$$N^{\uparrow}(z) := \sup_{|z-w|\le \left(1+|z|\right)^{-c}} N(w) + (3+c)\ln\bigl(1+|z|\bigr), \quad \text{если } D = \mathbb{C},\ 0<c=\text{const}; \tag{2c}$$

$$N^{\uparrow}(z) := \sup_{|z-w|\le d} N(w), \quad \text{если } D = \mathbb{C},\ 0<d=\text{const}. \tag{2d}$$

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, функции $N, M \in \operatorname{sbh}(D)$, $M - N \in \operatorname{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_{M-N}, $N, M \neq -\infty$, Λ — последовательность точек в D. Если Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D; \exp N]$, то $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D; M]$. Обратно, если $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D; M]$, N — непрерывная функция на D, то последовательность точек Λ — последовательность неединственности для пространства $\operatorname{Hol}(D; \exp N^{\uparrow}]$ с подходящей весовой функцией из* (2).

Доказательство. Пусть Λ — последовательность неединственности для $\operatorname{Hol}(D; \exp N]$. Это означает, что для функции f_Λ с $\operatorname{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ найдется ненулевая функция $h \in \operatorname{Hol}(D)$, для которой произведение $f_\Lambda h \in \operatorname{Hol}(D; N]$, или $\ln|f_\Lambda| + \ln|h| \le N$. Введем обозначение

$$s_{\nu_{M-N}} := M - N \in \operatorname{sbh}(D). \tag{3}$$

Тогда $\ln|f_\Lambda| + \ln|h| + s_{\nu_{M-N}} \le N + (M-N) = M$ на D, т. е. для меры Рисса $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ субгармонической функции $\ln|f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}}$ нашлась субгармоническая функция $v = \ln|h| \neq -\infty$, для которой сумма $\bigl(\ln|f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}}\bigr) + v$ принадлежит классу $\operatorname{sbh}(D; M]$. Таким образом, установлено, что $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D; M]$.

Обратно, пусть $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса $\operatorname{sbh}(D; M]$. Это означает, что найдется функция $w \in \operatorname{sbh}(D)$, с которой в обозначении (3)

$$\ln|f_\Lambda| + s_{\nu_{M-N}} + w \le M + \text{const} \quad \text{на } D.$$

Иначе

$$\ln|f_\Lambda| + M - N + w - \text{const} \le M \quad \text{на } D,$$

т. е.

$$\ln|f_\Lambda| + v \le N \quad \text{на } D \tag{4}$$

для функции $v = w - \text{const} \in \operatorname{sbh}(D)$, $v \neq -\infty$.

Предложение 1 ([3], часть предложения 9.1)**.** *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $u \in \operatorname{sbh}(D)$, функция $N : D \to \mathbb{R}$ непрерывна. Если для субгармонической в D функции $v \neq -\infty$ выполнено неравенство $u + v \le N$ на D, то найдется ненулевая функция $h \in \operatorname{Hol}(D)$, которая в каждой точке $z \in D$ для любого числа a, $0 < a < \operatorname{dist}(z, \operatorname{bd} D)$, удовлетворяет неравенству*

$$u(z) + \ln|h(z)| \le \sup_{|z-w|\le a} N(w) - \ln a + 3\ln\bigl(1+|z|+a\bigr) + C,$$

где постоянная C не зависит от $z \in D$ и выбора a.

В [3] это предложение доказано для псевдовыпуклых областей $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \ge 1$, но в $\mathbb{C}$ любая область псевдовыпукла. Из предложения 1 при $u = \ln|f_\Lambda|$ следует существование функции $he^{-C} \neq 0$ из $\operatorname{Hol}(D)$, для которой

$$\ln\bigl|f_\Lambda h e^{-C}\bigr| \le N^{\uparrow} \quad \text{на} \ \ D, \tag{5}$$

где весовая функция $N^{\uparrow}$ из (2a). Последнее по определению означает, что Λ — последовательность неединственности для пространства $\mathrm{Hol}(D;\exp N^{\uparrow}]$.

Если D — ограниченная область и в (2b) выбираются $b < e^{|z|}$, то справедливо ограничение $3\ln\bigl(1+|z|+b\bigr) \le C_1$, C_1 — постоянная, зависящая только от области D. Тогда (5) перепишется в виде $\ln\bigl|f_\Lambda q e^{-C-C_1}\bigr| \le N^{\uparrow}$ на D, где в правой части стоит уже функция из (2b), т. е. Λ — последовательность неединственности для $\mathrm{Hol}(D;\exp N^{\uparrow}]$.

При $D=\mathbb{C}$ для весовой функции $N^{\uparrow}$ возможны два варианта ее выбора: (2c) или (2d).

Вариант (2c)**.** В (5), где функция $N^{\uparrow}$ имеет вид (2a), вместо

$$\inf_{0<a<\operatorname{dist}(z,\operatorname{bd}\mathbb{C})=+\infty}\Bigl(\sup_{|z-w|\le a} N(w)-\ln a+3\ln\bigl(1+|z|+a\bigr)\Bigr)$$

для каждого $z\in\mathbb{C}$ выберем конкретное значение $a:=a(z):=\bigl(1+|z|\bigr)^{-c}$, $0<c=\mathrm{const}$. Тогда

$$-\ln a+3\ln\bigl(1+|z|+a\bigr)\le(3+c)\ln\bigl(1+|z|\bigr)+3\ln 2$$

и оценку (5), несколько ослабляя, можно переписать в виде

$$\ln\bigl|f_\Lambda h e^{-C}\bigr|\le N^{\uparrow}+3\ln 2 \quad \text{на } D,$$

где весовая функция $N^{\uparrow}$ уже определяется в (2c), и Λ — последовательность неединственности для $\mathrm{Hol}(D;\exp N^{\uparrow}]$.

Вариант (2d)**.** Для этого выбора весовой функции $N^{\uparrow}$ при $D=\mathbb{C}$ потребуется

Предложение 2 ([3], часть предложения 9.2)**.** *Пусть $u\in\mathrm{sbh}(\mathbb{C})$ и функция $N:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ непрерывна. Если для некоторой функции $b\in\mathrm{sbh}(\mathbb{C})$ выполнено неравенство $u+v\le N$ на $\mathbb{C}$, то для любого числа $d>0$ найдется ненулевая целая функция h, для которой в каждой точке $z\in\mathbb{C}$ имеет место оценка*

$$u(z)+\ln|q(z)|\le\sup_{|z-w|\le d}N(w),\quad z\in\mathbb{C}.$$

Из предложения 2 при $u=\ln|f_\Lambda|$ в силу (4) найдется ненулевая целая функция h, для которой выполнено неравенство $\ln|f_\Lambda h|\le N^{\uparrow}$ на $\mathbb{C}$, где $N^{\uparrow}$ из (2d). Значит, Λ — последовательность неединственности для $\mathrm{Hol}(\mathbb{C};\exp N^{\uparrow}]$. □

3. Пространства целых функций, задаваемые положительно однородными при показателе ρ весовыми функциями

3.1. ρ-выпуклая дополняемость. Пусть $\rho\in(0,+\infty)$. Обозначим через $\rho\text{-}\mathrm{shg}(\mathbb{C})\subset\mathrm{sbh}(\mathbb{C})$ *множество субгармонических положительно однородных при показателе ρ функций $H\ne-\infty$*, т. е. $H(tz)=t^\rho H(z)$ при всех $z\in\mathbb{C}$, $t\ge 0$. Через $\rho\text{-}\mathrm{trc}(\mathbb{R})$ обозначаем множество 2π-*периодических ρ-тригонометрически выпуклых*[1] *функций* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ([4]–[7]):

$$h(\theta)\sin\rho(\theta_2-\theta_1)\le h(\theta_1)\sin\rho(\theta_2-\theta)+h(\theta_2)\sin\rho(\theta-\theta_1),\quad \theta_1\le\theta\le\theta_2<\theta_1+\pi/\rho.$$

Известно, что

[1]Используют также термины тригонометрически ρ-выпуклая или тригонометрически выпуклая при показателе (порядке) ρ.

($\rho1$) отображение-расширение $\operatorname{ext} : h \longmapsto \bigl(H : re^{i\theta} \mapsto h(\theta)r^{\rho},\ r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}\bigr)$ функций $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задает аддитивную положительно однородную, сохраняющую точную верхнюю грань, биекцию выпуклого конуса $\rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ на выпуклый конус $\rho\text{-}\operatorname{shg}(\mathbb{C})$, и функции из $\rho\text{-}\operatorname{shg}(\mathbb{C})$ и $\rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ непрерывны ([4]–[6], § 2.3, I–VI; [7], свойство 9.5, теорема 9.12);

($\rho2$) функция $H \in \rho\text{-}\operatorname{shg}(\mathbb{C})$ удовлетворяет локальному условию Липшица в форме ([6], § 2.3, и детальнее [7], свойство 9.25 и следствие 9.26 с доказательством)

$$\bigl|H(z) - H(w)\bigr| \leq \rho \max_{\varphi\in\mathbb{R}} H(e^{i\varphi})\bigl(\max\bigl\{|z|, |w|\bigr\}\bigr)^{\rho-1}|z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

и, как следствие из ($\rho1$), функция $h \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию Липшица

$$\bigl|h(\theta) - h(\vartheta)\bigr| \leq \rho \max_{\varphi\in\mathbb{R}} h(\varphi)|\theta - \vartheta|, \quad \theta, \vartheta \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

($\rho3$) в обозначениях из ($\rho1$) плотность меры Рисса $d\nu_H$ функции $H \in \rho\text{-}\operatorname{shg}(\mathbb{C})$ в полярных координатах определяется как произведение плотностей мер

$$d\nu_H(re^{i\theta}) = r^{\rho-1}\, dr \otimes \frac{1}{2\pi}\bigl(h''(\theta) + \rho^2 h(\theta)\bigr)\, d\theta, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \ \ r \geq 0, \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где производные понимаются в смысле теории распределений, или обобщеных функций, а $h'' + \rho^2 h \geq 0$ — положительная 2π-периодическая мера на $\mathbb{R}$.

Пусть $h_1, h_2 \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$. Воспользуемся терминологией диссертации А.В. Абанина ([8], § 2.5), широко используемой при исследовании абсолютно представляющих систем. Называем функцию h_1 *ρ-выпукло дополнимой* до h_2, если $h_2 - h_1 \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$. В этом случае представляется естественным называть и (см. ($\rho1$)) функцию $H_1 := \operatorname{ext} h_1 \in \rho\text{-}\operatorname{shg}(\mathbb{C})$ ρ-выпукло дополнимой до $H_2 := \operatorname{ext} h_2 \in \rho\text{-}\operatorname{shg}(\mathbb{C})$. Из ($\rho3$) следует, что h_1 *ρ-выпукло дополнима* до h_2, если и только если в смысле теории распределений, или обобщенных функций, $(h_2 - h_1)'' + \rho^2(h_2 - h_1) \geq 0$, т. е. слева положительная 2π-периодическая мера на $\mathbb{R}$. В частности, отсюда

a) если функция $g \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, т. е. $g \in C^1(\mathbb{R})$, и

$$g'(\psi) - g'(\varphi) \geq -c(\psi - \varphi), \quad 0 \leq \varphi < \psi < 2\pi, \tag{9}$$

где $0 < c < \rho^2 \min\bigl\{g(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\bigr\}$, то любая $h \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ класса $C^1(\mathbb{R})$, для которой

$$h'(\psi) - h'(\varphi) \leq C(\psi - \varphi), \quad 0 \leq \varphi < \psi < 2\pi, \quad C \text{ — постоянная}, \tag{10}$$

ρ-выпукло дополнима до функции $qg \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ для любого числа ([8], лемма 2.5.1)

$$q > \frac{C + \rho^2 \max h}{\rho^2 \min g - c}; \tag{11}$$

b) если $g \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$, $\min\bigl\{g(\theta) + g(\theta + \pi/\rho) : \theta \in [0, 2\pi]\bigr\} > 0$, и g' — неубывающая на $[0, 2\pi)$ (в частности, включается и случай постоянной функции $g(\theta) \equiv R > 0, \theta \in \mathbb{R}$), а функция $h \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет (10), то функция h ρ-выпукло дополнима до qg для любого q из (11) при $c = 0$ ([8], § 2.5, следствие 1);

c) если $g \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ удовлетворяет (9), а $h \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вторую производную, т. е. в (10) постоянная $C = \sup |h''|$, то функция h ρ-выпукло дополнима до $qg \in \rho\text{-}\operatorname{trc}(\mathbb{R})$ для любого числа q из (11) ([8], § 2.5, следствие 1).

Теорема 2. *Пусть функция $h_1 \in \rho\text{-}\mathrm{trc}(\mathbb{R})$ ρ-выпукло дополнима до $h_2 \in \rho\text{-}\mathrm{trc}(\mathbb{R})$, т. е. в обозначениях из* (ρ1) *функция $H_1 := \operatorname{ext} h_1 \in \rho\text{-}\mathrm{shg}(\mathbb{C})$ ρ-выпукло дополнима до функции $H_2 := \operatorname{ext} h_2 \in \rho\text{-}\mathrm{shg}(\mathbb{C})$, а мера ν определена через произведение плотностей мер в полярных координатах по правилу* (8)

$$d\nu(re^{i\theta}) = r^{\rho-1}\,dr \otimes \frac{1}{2\pi}\big((h_2-h_1)'' + \rho^2(h_2-h_1)\big)(\theta)\,d\theta, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad r \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Пусть Λ – последовательность точек в $\mathbb{C}$. Тогда если Λ — последовательность неединственности для $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_1]$, *то $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса* $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_2]$, *и обратно, если $n_\Lambda + \nu_{M-N}$ — подмера для класса* $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_2]$, *то*

1) *при $\rho \leq 1$ Λ — последовательность неединственности для* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_1]$;

∞) *при $\rho > 1$ Λ — последовательность неединственности для* $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}; p\exp H_1]$, *где $p : z \mapsto |z|^{2+\rho}$, $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 с $N = H_1$ и $M = H_2$ доказательства требуют только пп. 1) и ∞), которые выведем из заключительной части той же теоремы 1. Для п. 1) выбираем $H_1^{\uparrow}$ в версии (2d) с $d = 1$, которая согласно условию Липшица (6) из (ρ2) или (7) дает неравенство $H_1^{\uparrow} \leq H_1 + \mathrm{const}$. Для п. ∞) выбираем $H_1^{\uparrow}$ в версии (2c) с $c = \rho - 1$, откуда по условию Липшица (6) из (ρr2) или (7) при $\rho - 1 > 0$ получаем

$$H_1^{\uparrow}(z) \overset{(2c)}{=} \sup\Big\{H_1(w) : |z-w| \leq \big(1+|z|\big)^{-(\rho-1)}\Big\} + \big(3 + (\rho-1)\big)\ln\big(1+|z|\big) \overset{(6)}{\leq}$$
$$\overset{(6)}{\leq} H_1(z) + \rho \max_{\varphi\in\mathbb{R}} H(e^{i\varphi})\big(|z| + \big(1+|z|\big)^{-(\rho-1)}\big)^{\rho-1}\big(1+|z|\big)^{-(\rho-1)} + (2+\rho)\ln\big(1+|z|\big) \leq$$
$$\leq H_1(z) + \mathrm{const} + (2+\rho)\ln\big(1+|z|\big), \quad z \in \mathbb{C},$$

что по заключительной части теоремы 1 и доказывает п. ∞). □

3.2. Случай $\rho = 1$. Геометрические аспекты. *Суммой* двух множеств A и B из $\mathbb{C}$ называется множество $A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. В частности, для $z, b \in \mathbb{C}$ полагают $B + z := B + \{z\}$, $A - b := A + \{-b\}$. Обсуждавшееся в предыдущем п. 3.1 понятие ρ-выпуклой дополняемости возникло как аналитическое обобщение геометрического понятия *выпукло дополнимой* выпуклой подобласти $D \subset G \subset \mathbb{C}$ до выпуклой области G: *существует выпуклый компакт $C \subset \mathbb{C}$, для которого $D + C = G$.* Это означает, что опорная функция выпуклой подобласти D 1-выпукло дополнима до опорной функции выпуклой области G. Выпукло дополнимые подобласти впервые были определены в совместной работе Ю.Ф. Коробейника и А.Ф. Леонтьева ([9], § 2) в связи с исследованием внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент. Однако за одиннадцать лет до этого для потребностей теории оптимального управления и теории дифференциальных игр в совместных работах П.Б. Гусятникова и М.С. Никольского ([10], п. 4; [11]), развивающих исследования Л.С. Понтрягина, Е.Ф. Мищенко и Б.Н. Пшеничного, было введено даже более общее (для любых множеств, а не только для областей) и вполне конструктивное понятие *полного выметания* одним множеством в $\mathbb{C}$ другого множества из $\mathbb{C}$ в классических терминах выпуклой геометрии, восходящих к Г. Минковскому. Конкретнее, *геометрической разностью,* или *разностью Минковского,* множеств A и B называется множество ([12], определение 8.5; [13], определение 1.1.1; [14], § 12)

$$A \overset{*}{-} B := \{z \in \mathbb{C} : B + z \subset A\} = \bigcap_{b\in B}(A - b). \tag{12}$$

Отметим, что геометрическая разность (12) множеств A и B в случае выпуклого (замкнутого или ограниченного) множества A — снова выпуклое (соответственно замкнутое или ограниченное) множество ([14], теоремы 12.3, 12.4). В частном случае, когда имеет место равенство $(A \overset{*}{-} B)+B = A$, говорят ([13], замечание 1.1.1; [14], определение 12.2), что множество B *полностью выметает* множество A. Позволим себе процитировать по этому поводу ([13], замечание 1.1.1): "Термин *полное выметание* объясняется тем, что для любой граничной точки $a \in \operatorname{bd} A$, где $\operatorname{bd} A$ — граница множества A, найдется такая точка $z \in \mathbb{C}$, что сдвиг множества B на z содержится во множестве A, т. е. справедливо включение $B+z \subset A$, причем это включение таково, что $a \in \operatorname{bd}(B+z)$. В этом случае геометрическая разность по существу является обратной операцией к операции суммы множеств". В частности, выпуклая подобласть $D \subset G$ выпукло дополнима до выпуклой области G тогда и только тогда, когда D полностью выметает область G ([14], теорема 12.5). Более раннее, используемое и поныне [15], общепринятое в разделах математики, использующих выпуклые множества, понятие полного выметания, насыщенное набором конкретных фактов и примеров (например, обширное и весьма детальное исследование С.Н. Аввакумова и Ю.Н. Киселева [16]) представляется более предпочтительным, поскольку его можно использовать даже в ситуациях (не в этой статье), когда "вычитаемое" множество B в (12) может быть и невыпуклым.

Из этих комментариев нетрудно видеть, что выпуклая область (выпуклый компакт) $B \subset \mathbb{C}$ с 2π-периодической опорной функцией [4], [5]

$$h_B : \theta \mapsto \sup_{z\in B} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}), \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

которая в случае ограниченности B всегда выпукла и непрерывна, полностью выметает ограниченную выпуклую область (соответственно выпуклый компакт) A в том и только том случае, когда имеет место равенство $h_A - h_B = h_{A \overset{*}{-} B}$. Как и в п. $(\rho 1)$, удобнее рассматривать продолженные на всю плоскость опорные функции $H_B : z \mapsto h_B(\theta)r$, $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, которые для ограниченных выпуклых областей (выпуклых компактов) B являются субгармоническими положительно однородными выпуклыми непрерывными функциями. Из приведенных определений и комментариев сразу следует, что выпуклая область (выпуклый компакт) B полностью выметает ограниченную выпуклую область (выпуклый компакт) $A \subset \mathbb{C}$, если и только если в обозначении ext из $(\rho 1)$ выполнено равенство $H_A - H_B = H_{A \overset{*}{-} B} = \operatorname{ext} h_{A \overset{*}{-} B}$.

В случае полного выметания выпуклой ограниченной области (выпуклого компакта) A выпуклой областью (выпуклым компактом) B для мер Рисса ν_{H_A}, ν_{H_B}, $\nu_{H_{A \overset{*}{-} B}}$ выпуклых, а значит, и субгармонических функций H_A, H_B, $H_{A \overset{*}{-} B}$ имеем серию равенств (здесь Δ — оператор Лапласа и производные действуют в смысле теории распределений, или обобщенных функций, см. (8)

$$\begin{aligned}\nu_{H_A} - \nu_{H_B} = \nu_{H_{A \overset{*}{-} B}} = \frac{1}{2\pi}\Delta H_{A \overset{*}{-} B}(z) = \frac{1}{2\pi}\bigl(h''_{A \overset{*}{-} B}(\theta) + h_{A \overset{*}{-} B}(\theta)\bigr)\, d\theta \otimes dr = \\ = \frac{1}{2\pi}\bigl(h''_A(\theta) - h''_B(\theta) + h_A(\theta) - h_B(\theta)\bigr)\, d\theta \otimes dr.\end{aligned} \tag{14}$$

При этом теорема 2 в части (1) при $\rho = 1$ может быть переформулирована как

Следствие 1. Пусть непустой выпуклый компакт $B \subset \mathbb{C}$ полностью выметает выпуклый компакт $A \subset \mathbb{C}$. Последовательность точек Λ в $\mathbb{C}$ — последовательность неединственности для пространства $\operatorname{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_B]$ тогда и только тогда, когда в обозначениях (14) мера $n_\Lambda + \bigl(\nu_{H_A} - \nu_{H_B}\bigr)$ — это подмера для класса $\operatorname{sbh}(\mathbb{C}; H_A]$.

Для $S \subset \mathbb{C}$ сопряженное множество обозначим как $\overline{S} := \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in S\}$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия следствия 1. Если система Exp^{Λ} (см. (1)) не полна в пространстве $\mathrm{CHol}[B]$, то $n_\Lambda + \nu_{H_{\overline{A}}} - \nu_{H_{\overline{B}}}$ — подмера для класса $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_{\overline{A}}]$. Обратно, если $n_\Lambda + \nu_{H_{\overline{A}}} - \nu_{H_{\overline{B}}}$ — подмера для $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_{\overline{A}}]$, то, удалив из Λ произвольные две точки λ', λ'', получим неполную в $\mathrm{CHol}[B]$ систему $\mathrm{Exp}^{\Lambda\setminus\{\lambda',\lambda''\}}$.

Схема доказательства. Пусть система Exp^{Λ} не полна в $\mathrm{CHol}[B]$. Тогда Λ — последовательность неединственности ([1], гл. 1, 1.1, теорема 3.3.1) для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}; H_{\overline{B}}]$. Значит, согласно следствию 1 в части необходимости $n_\Lambda + \nu_{H_{\overline{A}}} - \nu_{H_{\overline{B}}}$ — подмера для $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_{\overline{A}}]$. Обратно, если $n_\Lambda + \nu_{H_{\overline{A}}} - \nu_{H_{\overline{B}}}$ — подмера для $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_{\overline{A}}]$, то по следствию 1 в части достаточности существует ненулевая целая функция $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_{\overline{B}}]$ с подпоследовательностью нулей Λ. Если поделить функцию f на произведение двучленов $z \mapsto (z-\lambda')(z-\lambda'')$, $z \in \mathbb{C}$, то результат деления $\bigl|f(z)/\bigl((z-\lambda')(z-\lambda'')\bigr)\bigr| = O\bigl(|z|^{-2} \exp H_{\overline{B}}(z)\bigr)$, $z \to \infty$, будет характеристической функцией (преобразованием Фурье–Лапласа) некоторой ненулевой меры с носителем на B, т. е. ненулевым линейным непрерывным функционалом на $\mathrm{CHol}[B]$, аннулирующим систему экспонент $\mathrm{Exp}^{\Lambda\setminus\{\lambda',\lambda''\}}$. Последнее означает, что эта система не полна в $\mathrm{CHol}[B]$. $\square$

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Рассмотрим класс субгармонических функций конечного типа при порядке 1

$$\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_D) := \Bigl\{u \in \mathrm{sbh}(\mathbb{C}) : h_u(\theta) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{u(re^{i\theta})}{r} < h_D(\theta)\Bigr\},$$

где h_u — индикатор роста функции u при порядке 1, а также его голоморфный аналог — пространство целых функций экспоненциального типа

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_D) := \bigl\{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}) : \ln|f| \in \mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_D)\bigr\}.$$

Из следствия 1 выводится

Следствие 3. Пусть выпуклая область D полностью выметает ограниченную выпуклую область G. Последовательность точек Λ в $\mathbb{C}$ — последовательность неединственности для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}; \exp H_D)$ тогда и только тогда, когда мера $n_\Lambda + \bigl(\nu_{H_G} - \nu_{H_D}\bigr)$ — это подмера для класса $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_G)$.

Из следствия 3 или из следствия 2 легко получается

Следствие 4. В условиях следствия 3 система Exp^{Λ} не полна в $\mathrm{Hol}(D)$, если и только если мера $n_\Lambda + \bigl(\nu_{H_{\overline{G}}} - \nu_{H_{\overline{D}}}\bigr)$ — это подмера для класса $\mathrm{sbh}(\mathbb{C}; H_{\overline{G}})$.

Замечание 1. Близкий к следствию 4 и легко выводимый из него результат был получен А.А. Румянцевой в ее диссертации (автореферат [17], теорема 2.1; [18], [19]). Приведем его в более прозрачной форме. В [17]–[19] для *выпуклой области* D с *дважды непрерывно дифференцируемой* 2π-периодической опорной функцией h_D из (13) задается число $R_{\max} := \max\bigl\{h''_D(\theta) + h(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\bigr\}$. Тогда, как было отмечено в ([8], лемма 1.9.1) (даже для многих переменных и произвольного порядка ρ) область D выпукло дополнима или полностью выметает круг $R_{\max}\mathbb{D}$. Пусть Λ_0 — некоторая правильно распределенная последовательность точек в $\mathbb{C}$ при порядке 1 с индикатором $H_{(R_{\max}\mathbb{D})\overset{*}{-}D}$ ([4], гл. II, § 1). В ([4], гл. II, §§ 4–6) приведена явная конструкция для такой последовательности Λ_0. Заметим, что у А.А. Румянцевой используется гораздо более сложная и, вообще говоря, неявная последовательность Λ_0. Результат из [17]–[19]: *система* Exp^{Λ}, $\Lambda \subset \mathbb{C}$, *неполна в* $\mathrm{Hol}(D)$, *если и только если система* $\mathrm{Exp}^{\Lambda\cup\Lambda_0}$ *не полна в* $\mathrm{Hol}(R_{\max}\mathbb{D})$. В [19] предлагается также отдельное рассмотрение случая, когда D — эллипс. Кстати отметим, что точное описание неполных систем экспонент для пространств в круге по некоторым косвенным признакам представляется гораздо более сложной задачей, нежели подобная проблема для пространств в выпуклом многоугольнике, в частности, в треугольнике.

Замечание 2. Для *неограниченных выпуклых* областей $D \subset \mathbb{C}$ задача о законченном описании полных систем Exp^{Λ} в пространствах $\mathrm{Hol}(D)$ и некоторых других пространствах на замыканиях таких D полностью решена в ([20], теорема 2; [21], [1], 3.2).

Замечание 3. Обобщения представленных результатов на весовые классы голоморфных и целых функций в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, а также распространения следствий 1–4 на ρ-выпуклые компакты и/или области в $\mathbb{C}$ и неполноту систем функций Миттаг-Леффлера предполагается рассмотреть позднее.

Автор глубоко признателен А.В. Абанину за весьма ценные замечания, полезные советы по расстановке акцентов и предоставленную возможность ознакомления с [8].

Литература

[1] Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности*, 4-е доп. издание (РИЦ БашГУ, Уфа, 2012).

[2] Ransford Th. *Potential theory in the complex plane* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[3] Хабибуллин Б.Н. *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций.* II, Изв. РАН. Сер. матем. **65** (5), 167–190 (2001).

[4] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций* (Физматгиз, М., 1956).

[5] Levin B.Ya. *Lectures on entire functions* (Amer. Math. Soc., Transl. Math. Monographs, Providence RI, **150**, 1996).

[6] Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции*, 3-е доп. издание (Физматлит, М., 1979).

[7] Маергойз Л.С. *Асимптотические характеристики целых функций и их приложения* (Наука, Новосибирск, 1991).

[8] Абанин А.В. *Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы,* Дисс. ... докт. физ.-матем. наук (РГУ, Ростов-на-Дону, 1995).

[9] Коробейник Ю.Ф., Леонтьев А.Ф. *О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент,* Матем. заметки **28** (2), 243–254 (1980).

[10] Гусятников П.Б., Никольский М.С. *Об оптимальности времени преследования*, ДАН СССР **184** (3), 518–521 (1969).

[11] Гусятников П.Б., Никольский М.С. *К проблеме оптимальности времени преследования*, Тр. семин. “Теория оптимальных решений” (Ин-т кибернетики АН УССР, Киев, 1969) №3, с. 3–21.

[12] Лейхтвейс К. *Выпуклые множества* (Наука, М., 1985).

[13] Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа* (Физматлит, М., 2004).

[14] Петров Н.Н. *Введение в выпуклый анализ* (Удмуртск. гос. ун-т, Ижевск, 2009).

[15] Кумков С.С. *Особенности множеств уровня функции цены в линейных дифференциальных играх*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук (УрГУ, Екатеринбург, 2007) (электрон. версия http://diss4all.ru/?cat=1&spec=20&n=129).

[16] Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. *Опорные функции некоторых специальных множеств, конструктивные процедуры сглаживания, геометрическая разность*, “Проблемы динамического управления” (МАКС Пресс, М., 2005), вып. 1, с. 24–110 (электрон. версия http://oc.cs.msu.su/download/76/kiselev05.pdf).

[17] Румянцева А.А. *Асимптотика δ-субгармонических функций и их ассоциированных мер. Применение в вопросах полноты систем экспонент*, Автореферат дисс. ... канд. физ.-матем. наук (Ин-т матем. с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2010).

[18] Румянцева А.А. *О полноте систем экспонент в пространстве функций, аналитических в выпуклой области*, Материалы междунaродн. конф. “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящ. 70-летию ректора МГУ Садовничего В.А., Уфа, июнь 2009 (Изд-во Ин-та матем. с ВЦ УНЦ РАН, 2009), с. 92.
[19] Махота (Румянцева) А.А. *Сведение задачи о полноте систем экспонент из выпуклой области с гладкой границей на круг*, Материалы междунaродн. конф. “Нелинейные уравнения и комплексный анализ”, тез. докл., Уфа, 18–22 марта 2013 (Изд-во Ин-та матем. с ВЦ УНЦ РАН), с. 40–41.
[20] Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси*, Матем. сб. **180** (5), 706–719 (1989).
[21] Хабибуллин Б.Н. *О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями,* Anal. Math. **17** (3), 239–256 (1991).

Б.Н. Хабибуллин

профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, д. 32, г. Уфа, 450074, Россия,

e-mail: khabib-bulat@mail.ru

B.N. Khabibullin

Sequences of non-uniqueness for weight spaces of holomorphic functions

Abstract. Problems of description of zero subsequences (non-uniqueness sequences) for weight spaces of holomorphic functions under some general scheme are reduced to solving certain problems in weight classes of subharmonic functions. We affect also geometrical questions and completeness of exponential systems.

Keywords: holomorphy, zero subseqence, non-uniqueness sequence, subharmonic function, exponential system, ρ-convex completability, geometric difference, full sweeping-out.

B.N. Khabibullin

Professor, Head of the Chair of Higher Algebra and Geometry,
Bashkir State University,
32 Z. Validi str., Ufa, 450074 Russia,

e-mail: khabib-bulat@mail.ru