



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, О задаче погружения с некоммутативным ядром порядка p^4 . VI, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1995, том 227, 74–82

Использование

Общероссийско-

го математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

18 февраля 2025 г., 23:29:14



В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ С НЕКОММУТАТИВНЫМ ЯДРОМ ПОРЯДКА p^4 . VI

Сообщив в предыдущей работе этого цикла о его завершении, авторы несколько поторопились. Закончив исследование задачи погружения с некоммутативным ядром порядка p^4 для случая регулярного ядра (это всегда так при $p > 3$), мы упустили из виду две группы порядка 3^4 и одну группу порядка 2^4 . В настоящей работе мы восполняем эти пробелы.

§ 1. Задача погружения с ядром порядка 3^4

1^0 . Рассмотрим задачу погружения $(K/k, G, \varphi)$ с ядром B порядка 3^4 , порожденную образующими α, γ и соотношениями $\alpha^9 = 1$, $[\alpha, \gamma] = \beta$, где $\beta^3 = 1$, $[\alpha, \beta] = 1$, $[\beta, \gamma] = \alpha^3$. При этом γ^3 может равняться либо 1, либо α^3 . Условия $\gamma^3 = 1$ и $\gamma^3 = \alpha^3$ дают неизоморфные группы, но рассмотрение задач погружения с этими двумя ядрами практически одинаково. Группу G мы, как и ранее, считаем p -группой, а поле k содержащим первообразный корень ζ степени 3 из единицы.

Полная группа p -автоморфизмов ядра B имеет порядок p^5 и задается на образующих условиями: $\alpha \rightarrow \beta^i \alpha^{3j+1}$, $\gamma \rightarrow \gamma \beta^k \alpha^l$ (соответственно, $\beta \rightarrow \beta \alpha^{-3i}$), где i, j, k рассматриваются по mod 3, а l по mod 9. Значительно облегчает изучение нашей задачи следующее соображение.

Лемма 1. *Группа всех p -автоморфизмов группы B является полупрямым расширением подгруппы внутренних автоморфизмов посредством подгруппы внешних p -автоморфизмов.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизмы σ и τ группы B , заданные условиями: $\gamma^\sigma = \gamma \alpha^{-1}$, $\alpha^\sigma = \beta^{-1} \alpha^{-2}$ (соответственно $\beta^\sigma = \beta \alpha^3$); $\gamma^\tau = \gamma \beta$, $\alpha^\tau = \alpha^{-2}$, $\beta^\tau = \beta$.

Тогда $\sigma^3 = 1$, $\tau^3 = 1$, $[\sigma, \tau] = 1$, и (как нетрудно заметить), подгруппа автоморфизмов, порожденная σ и τ , пересекается с под-

Работа поддержана фондом РФФИ, проект NO. 94-01-00915.

*) В работе [7] имеется опечатка. В соотношениях для исследуемой группы должно быть $a^8 = 1$, $b^2 = a^4$, $[a, b] = a^{-2}$.

группой внутренних автоморфизмов лишь по единичному автоморфизму. Поскольку группа внутренних автоморфизмов имеет порядок p^3 , то подгруппа $\langle \sigma, \tau \rangle$ и является искомым полупрямым дополнением.

Обозначим через H_0 подгруппу элементов $g \in G$, индуцирующих тривиальные автоморфизмы на ядре B , а через H подгруппу элементов $g \in G$, индуцирующих автоморфизмы вида $\sigma^i \tau^j$ ($i, j = 0, 1, 2$,) при указанном выше действии σ, τ . Тогда H сюръективно отображается на $F = \text{Gal}(K/k)$, а подгруппы B и H пересекаются лишь по центру группы B порядка 3 (порожденному элементом α^3). Мы получили следующее

Предложение 1. *Групповое расширение $1 \rightarrow B/B_0 \rightarrow G/B_0 \rightarrow F \rightarrow 1$, где $B_0 = \langle \alpha^3 \rangle$, является полупрямым. Исходное же расширение $1 \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ может быть определено каноническим коциклом z_{f_1, f_2} со значениями в B_0 .*

2⁰. Будем решать нашу задачу погружения $(K/k, G, \varphi)$ в два этапа. На первом рассмотрим сопутствующую задачу погружения, полученную факторизацией по коммутанту A ядра, порожденному элементами α^3 и β , и опишем все решения L этой задачи. На втором – выясним, каким условиям должно удовлетворять расширение L для того, чтобы была разрешима задача погружения расширения L/k с ядром A и группой G .

Обозначим через φ^* сопровождающий гомоморфизм F в группу внешних p -автоморфизмов ядра B . Мы будем считать, что этот гомоморфизм сюръективен (в противном случае изучение задачи лишь упрощается). Пусть F_0 – ядро φ^* , и K_0 – подполе поля K , отвечающее F_0 . Тогда K_0 порождается над k элементами $\sqrt[3]{m_\sigma}, \sqrt[3]{m_\tau}$, где $m_\sigma, m_\tau \in k^*$, выбранными так, что $\sqrt[3]{m_\sigma^\sigma} = \sqrt[3]{m_\sigma \zeta}$, $\sqrt[3]{m_\sigma^\tau} = \sqrt[3]{m_\sigma}$, $\sqrt[3]{m_\tau^\sigma} = \sqrt[3]{m_\tau}$, $\sqrt[3]{m_\tau^\tau} = \sqrt[3]{m_\tau \zeta}$ (под σ и τ мы понимаем здесь и далее элементы из F , чьи прообразы в H действуют на ядре указанным выше образом).

Задача $(K/k, G/A, B/A)$ – абелева полупрямая, и ее решения легко описываются. Всякое решение L этой задачи имеет вид $K(\sqrt[3]{x}, \theta)$, где $x \in k^*$, $\sqrt[3]{x^\alpha} = \sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^\gamma} = \sqrt[3]{x \zeta}$, $(K(\sqrt[3]{x}))$ решает прямую задачу погружения, полученную факторизацией по подгруппе $\langle \alpha, \beta \rangle$,

$$\theta^\gamma = \theta, \quad \theta^\alpha = \theta \zeta^{-1}, \quad \theta^\tau = \theta, \quad \theta^\sigma = \frac{\theta v}{\sqrt[3]{x}}, \quad \text{где } v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma}).$$

Кроме того, x является нормой элемента v , т.е. $x = v^{1+\sigma+\sigma^2}$,

$\theta^3 = \theta\sigma + 2\sigma^2 \cdot y$, где $y \in k^*$. Таким образом, L определяется двумя произвольно выбранными элементами $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ и $y \in k^*$.

Наша задача свелась к выяснению условий, наложенных на v и y , при которых разрешима задача погружения, связанная с последовательностью

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow \text{Gal}(L/k) \rightarrow 1. \quad (2)$$

Напомним, что L может быть как полем, так и алгеброй Галуа.

3⁰. Задача (2) имеет ядро порядка p^2 , поэтому ее разрешимость эквивалентна условию согласности, т.е. распадению скрещенного произведения $G \times L$ в матричную алгебру над своим центром. Центр алгебры $G \times L$ является прямой суммой нескольких полей с центральными идемпотентами $e_0 = \frac{1+\alpha^3+\alpha^6}{3} \cdot \frac{1+\beta+\beta^2}{3}$, $e_i = \frac{1+\alpha^3+\alpha^6}{3} \cdot \frac{1+\beta\zeta^{-i}+\beta^2\zeta^i}{3}$ ($i = 1, 2$), $E_j = \frac{1+\alpha^2\zeta^{-j}+\alpha^6\zeta^j}{3}$ ($j = 1, 2$). При этом центры алгебр $(G \times L) E_j$ суть $k(\beta\sqrt[3]{x^j}\sqrt[3]{m_\sigma}^{-j} E_j) \simeq k(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-j}})$ (разумеется, если $x^j m_\sigma^{-j}$ является кубом в k , алгебры $k(\beta\sqrt[3]{x^j}\sqrt[3]{m_\sigma}^{-j} E_j)$ являются прямой суммой трех полей, изоморфных k).

Алгебра $(G \times L)e_0$ изоморфна скрещенному произведению поля (алгебры) L со своей группой Галуа G/A с единичными факторами, и поэтому всегда распадается. Условия распада алгебр $(G \times L)e_1$ и $(G \times L)e_2$ эквивалентны, так же эквивалентны условия распада алгебр $(G \times L)E_1$ и $(G \times L)E_2$. Поэтому достаточно исследовать условия распада алгебр $(G \times L)e_1$ и $(G \times L)E_1$.

4⁰. Выясним условия распада $(G \times L)e_1$. Эти условия являются в то же время условиями разрешимости задачи погружения $(L/k, G/B_0)$.

Алгебра $(H \times K)e_1$ является скрещенным произведением поля K с группой F с единичными факторами, так как значения канонического коцикла становятся тривиальными при умножении на e_1 . Алгебра $(G \times K)e_1$ изоморфна тензорному произведению (над k) алгебры $(H \times K)e_1$ и ее централизатора в $(G \times K)e_1$. Этот централизатор порожден над k элементами $\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}e_1$ и $\gamma^{-1}(1+\zeta^2\alpha+\alpha^2)\sqrt[3]{m_\tau}e_1$. Поскольку $(\gamma^{-1})^\alpha e_1 = \gamma^{-1}\zeta e_1$, и $[\gamma^{-1}(1+\zeta^3\alpha+\alpha^2)e_1]^3 = 3(1-\zeta^2)e_1$, централизатор $(H \times K)e_1$ в $(G \times K)e_1$ изоморфен алгебре обобщенных кватернионов $k[3(1-\zeta^2)m_\tau, m_\sigma]$. Обозначение $k[w_1, w_2]$ мы используем для простой алгебры размерности 9 над k с образующими ξ_1, ξ_2 и соотношениями $\xi_1^3 = w_1$, $\xi_2^3 = w_2$, $\xi_2^{-1}\xi_1\xi_2 = \xi_1\zeta$.

Соответственно, централизатор алгебры $(G \times K)e_1$ в $(G \times L)e_1$ порождается над k двумя элементами $\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}\sqrt[3]{x}^{-1}$ и $\eta = \gamma^{-1}(\theta + \zeta^2\alpha\theta\sigma + \alpha^2\theta\sigma^2)\sqrt[3]{m_\tau}e_1$. Поскольку $(\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}\sqrt[3]{x}^{-1}e_1)^\eta = (\alpha\sqrt[3]{m_\sigma}\sqrt[3]{x}^{-1}e_1)\zeta$, этот

централизатор изоморфен алгебре $k[m_\sigma x^{-1}, \eta^3]$. Элемент η^3 принадлежит центру алгебры $(G \times L)e_1$, т.е. $\eta^3 \in ke_1$. Вычисления показывают, что $\eta^3 = (\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x) \cdot ym_\tau e_1$. Соответственно, централизатор алгебры $(H \times K)e_1$ в $(G \times L)e_1$ изоморфен тензорному произведению двух кватернионных алгебр $k[3(1-\zeta^2)m_\tau, m_\sigma] \otimes k[m_\sigma x^{-1}, (\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)ym_\tau]$ и мы получили предложение

Предложение 2. *Для распада алгебр $(G \times L)e_i$ ($i = 1, 2$) необходимо и достаточно, чтобы были изоморфны алгебры $k[3(1-\zeta^2)m_\tau, m_\sigma]$ и $k[(\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)ym_\tau, m_\sigma x^{-1}]$.*

Заметим, что указанные алгебры очевидно изоморфны, если положить $v = 1, y = 1$ (тогда и $x = 1$). Это было ясно и априори, т.к. расширение $1 \rightarrow B/B_0 \rightarrow G/B_0 \rightarrow F \rightarrow 1$ — полупрямое.

Для дальнейшего отметим, что условия распада алгебры $(G \times L)e_1$ существенно упрощаются, если взять $y = 1$, а $v = u_1 + u_2 \sqrt[3]{m_\sigma}$, где $u_1, u_2 \in k$ (без коэффициента при $\sqrt[3]{m_\sigma^2}$). Тогда $x = u_1^3 + m_\sigma u_2^3$, $\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) = 3(u_1^3 + \zeta^2 u_2^3 m_\sigma)$, поэтому $\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x = 3(1 - \zeta^2)u_1^3$. Обозначив теперь $m'_\tau = 3(1 - \zeta^2)m_\tau$, получаем в этом случае, что условие распада алгебры $(G \times L)e_1$ означает, что изоморфны алгебры $k[m'_\tau, m_\sigma]$ и $k[m'_\tau, m_\sigma x^{-1}]$, т.е. что алгебра $k[x, m'_\tau]$ должна быть матричной.

5⁰. Рассмотрим теперь алгебру $(G \times L)E_1$. Центром ее, как сказано выше, является $k(\beta \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{m_\sigma^{-1}})E_1 \simeq k(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}})$. Алгебра $(H \times K)E_1$ является скрещенным произведением поля K со своей группой Галуа F с системой факторов $\chi(z_{f_1, f_2})$, где z_{f_1, f_2} — канонический коцикл расширения $H(f_i \in F)$, а χ — характер $B_0 \rightarrow k^*$, заданный формулой $\chi(\alpha^3) = \zeta$. Алгебра $(G \times L)E_1$ изоморфна тензорному произведению над $k(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}})$ подалгебры $(H \times K)E_1$ и ее централизатора.

Громоздкие вычисления показывают, что централизатор $(H \times K)E_1$ в $(G \times L)E_1$ порождается над своим центром элементами $\varkappa_1 = \beta m_\sigma^{-1} E_1$, $\varkappa_2 = \gamma[(1 + \beta + \beta^2) + \zeta\alpha(1 + \zeta^2\beta + \zeta\beta^2) + \zeta^2\alpha^2(1 + \zeta\beta + \zeta^2\beta^2)]E_1$, $\varkappa_3 = \alpha(1 + \beta + \zeta^2\beta^2)\sqrt[3]{m_\tau}E_1$ и $\varkappa_4 = [(\theta + \theta^\sigma + \theta^{\sigma^2}) + \zeta\beta(\theta + \zeta\theta^\sigma + \zeta^2\theta^{\sigma^2}) + \beta^2(\theta + \zeta^2\theta^\sigma + \zeta\theta^{\sigma^2})]E_1$. При этом $[\varkappa_1, \varkappa_3] = [\varkappa_1, \varkappa_4] = [\varkappa_2, \varkappa_3] = [\varkappa_2, \varkappa_4] = 1$, $[\varkappa_1, \varkappa_2] = [\varkappa_3, \varkappa_4] = \zeta$, $\varkappa_1^3 = m_\sigma^{-1}E_1$, $\varkappa_2^3 = 27\gamma^3 E$, $\varkappa_3^3 = 3(1 - \zeta^2)m_\tau E_1$, $\varkappa_4^3 = y \cdot g(v)$, где $g(v) \in k(\beta \sqrt[3]{m_\sigma^{-1}}E_1)$ — некоторое выражение, зависящее от выбора $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ и принадлежащее центру.

Таким образом, алгебра $(G \times L)E_1$ изоморфна тензорному произведению алгебры $(H \times K)E_1$ и двух кватернионных алгебр $k[m_\sigma, \chi(\gamma^3)]$ и $k(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}})[3(1 - \zeta^2)m_\tau, \varkappa_4^3]$. Обозначим через P произ-

ведение алгебр $(H \times K)E_1$ и $k(m_\sigma, \chi(\gamma^3))$, не зависящее от выбора v и y , а через m'_τ (как и прежде) $3(1 - \zeta^2)m_\tau$. Мы доказали предложение.

Предложение 3. Для распада алгебры $(G \times L)E_1$ в матричную алгебру над своим центром необходимо и достаточно, чтобы распалось тензорное произведение алгебры P и кватернионной алгебры $k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})[m'_\tau, \varkappa_4^3]$.

Соответственно, мы получим и условие разрешимости исходной задачи.

Теорема 1. Для разрешимости задачи погружения $(K/k, G, \varphi)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись элементы $v \in (k(\sqrt[3]{m_\sigma}))^*$ и $y \in k^*$, при которых

1) были изоморфны алгебры $k[m'_\tau, m_\sigma]$ и $K[(\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)y m_\tau, m_\sigma x^{-1}]$

2) полностью распалась в матричную алгебра $P \otimes_{k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})} [m'_\tau, g(v)y]$, где $x = v^{1+\sigma+\sigma^2}$, $g(v) \in k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})$

6⁰. Рассмотрим теперь нашу задачу погружения в случае локальных или глобальных числовых полей. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. Норма элемента $\varkappa_4^3 \in k(\sqrt[3]{m_\sigma x_\sigma^{-1}})$ в поле k является кубом в поле k .

Доказательство. Рассмотрим на алгебре $L(\beta E_1)$ автоморфизм ω , оставляющий инвариантными элементы поля (алгебры) L и переводящий β^i в $\beta^i \zeta^i$ ($i = 0, 1, 2$). Тогда норма элемента \varkappa_4^3 есть произведение $\varkappa_4^3 \cdot \varkappa_4^{3\omega} = \varkappa_4^{3\omega^2} = (\varkappa_4 \varkappa_4^\omega \varkappa_4^{\omega^2})^3$. Но $\varkappa_4 \cdot \varkappa_4^\omega \cdot \varkappa_4^{\omega^2}$ равно (исходя из вида \varkappa_4) $(\theta + \theta^\sigma + \theta^{\sigma^2})^3 + (\theta + \zeta\theta^\sigma + \zeta^2\theta^{\sigma^2})^3 + (\theta + \zeta^2\theta^\sigma + \zeta\theta^{\sigma^2})^3 - 3\zeta(\theta + \theta^\sigma + \theta^{\sigma^2})(\theta + \zeta\theta^\sigma + \zeta^2\theta^{\sigma^2})(\theta + \zeta^2\theta^\sigma + \zeta\theta^{\sigma^2})$. Легко проверяется, что это выражение инвариантно относительно подгруппы H , элементов α и γ , и принадлежит L . Значит $\varkappa_4^{1+\omega+\omega^2} \in k$, и поэтому норма \varkappa_4^3 является кубом в k^* .

Изучим также подробнее алгебру P . Алгебра $(H \times K)E_1$ имеет показатель 3 (или 1), поскольку представляет собой скрещенное произведение поля K со своей группой Галуа F с системой факторов со значениями в ζ^i ($i = 0, 1, 2$). Соответственно, и алгебра P (кстати, подобная $(H \times K)E_1$ при $\gamma^3 = 1$), также имеет показатель 3. Значит, для числовых полей P является матричной алгеброй над своей подалгеброй размерности 9, являющейся тем самым,

кватернионной алгеброй над k . Таким образом, алгебра P подобна (в группе Брауэра) некоторой кватернионной алгебре $k[w_1, w_2]$, $w_i \in k^*$.

Для дальнейшего нам будет полезен следующий простой факт.

Предложение 4. *В локальном поле k всякий элемент может быть представлен в виде разности двух n -ых степеней*

(Мы не претендуем на авторство этого предложения, но не можем привести соответствующую ссылку.)

Доказательство. Пусть k — локальное поле, π — его простой элемент, n — натуральное число. Для любого $a \in k$ найдется такое натуральное m , что $a \cdot \pi^{mn} + 1$ является n -ой степенью: $z^n = a \cdot \pi^{nm} + 1$. Тогда $a = \left(\frac{z}{\pi^m}\right)^n - \left(\frac{1}{\pi^m}\right)^n$.

Докажем теперь основной результат работы.

Теорема 2. *Исследуемая задача погружения $(K/k, G, \varphi)$ в случае числовых (локальных или глобальных) полей всегда разрешима.*

Доказательство. Нам надо показать, что существуют $v \in k(\sqrt[m]{m_\sigma})$ и $y \in k$, для которых выполняются условия теоремы 1. При этом элемент y мы выбираем равным 1. Мы будем сразу исходить из случая полей алгебраических чисел, а для локальных полей разрешимость будет следовать из хода доказательства.

Как и в предыдущих работах, будем выбирать элемент $v \in k(\sqrt[m]{m_\sigma})$ таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы 1 для сопутствующих локальных задач. При этом выполнение этих условий для всех таких локальных задач гарантирует их выполнение и для глобальной задачи.

Пусть S — конечное множество простых дивизоров поля $K(\sqrt[m]{m_\sigma})$, содержащее все простые делители дискриминанта поля K , а также делители числа 3. Соответственно, в S попадут при этом делители чисел m_σ и m'_τ .

Рассмотрим несколько случаев.

1). Пусть простой дивизор $\mathfrak{P} \in S$ таков, что m_σ не является кубом в пополнении $k_{\mathfrak{P}}$ поля k по дивизору \mathfrak{P} , где $\mathfrak{P}|_{\mathfrak{p}}$. Положим $v_{\mathfrak{P}} = 1$, тогда и $x_{\mathfrak{P}} = 1$. Первое условие теоремы 1 становится тривиальным, ибо $(\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)m_\tau$ равно в этом случае m'_τ . Покажем, что выполняется и второе условие. Действительно, алгебра P распадается при подъеме поля $k_{\mathfrak{P}}$ до кубического расширения $k_{\mathfrak{P}}(\sqrt[m]{m_\sigma})_{\mathfrak{P}}$. Далее, для локальных полей символ Гильберта $[w_1, w_2]_{k_1}$, где k_1 — нормальное расширение поля k , а $w_1 \in k$, равен, как известно $[w_1, N_{k_1/k}, w_2]_k$. Но в нашем случае, согласно лемме

2, норма элемента $g(v)$ является кубом в поле k (а значит, и в k_p), и поэтому алгебра $k_p(\sqrt[3]{m_\sigma x^{-1}})[m'_\tau, g(v)]$ также матричная.

2). Пусть $\mathfrak{P} \in S$ таков, что m_σ и m'_τ являются кубами в k_p . Возьмем тогда в качестве $v_{\mathfrak{P}}$ такой элемент $u_1 + u_2 \sqrt[3]{m_\sigma}$ ($u_1, u_2 \in k_p$), чтобы $x_p = u_1^3 + u_2^3 m_\sigma$ не было кубом в k_p . Второе условие теоремы 1 снова выполняется. Первое же условие, в виду специализации выбора $v_{\mathfrak{P}}$ может быть истолковано как распадение алгебры $k_p[x_p, m'_\tau]$, что и выполняется, так как m'_τ — куб в k_p .

3). Пусть, наконец, $\mathfrak{P} \in S$ таков, что $m_\sigma = w^3$, где $w \in k_p$, но m'_τ не является кубом в k_p . Представим m'_τ в виде разности двух кубов (см. предложение 4): $m'_\tau = u_1^3 - u_2^3$, где $u_1, u_2 \in k_p$. Тогда $m'_\tau = u_1^3 - (\frac{u_2}{w})^3 m_\sigma$. Положим $v_{\mathfrak{P}} = u_1 - \frac{u_2}{w} \sqrt[3]{m_\sigma}$, тогда $x_p = m'_\tau$. Значит, алгебра $k_p[x_p, m'_\tau]$ распадается, и выполнено первое условие теоремы 1. Второе условие также выполняется, поскольку в этом случае $k_p(\sqrt[3]{x m_\sigma^{-1}}) = k_p(\sqrt[3]{m_\tau})$, а m'_τ — не куб в k_p .

Выберем теперь число v из поля алгебраических чисел $k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ так, чтобы в разложение главного дивизора (v) поля $k(\sqrt[3]{m_\sigma})$ входили лишь дивизоры из S и некоторый простой дивизор $\mathfrak{A} \notin S$, и кроме того, локальное поведение (v) совпадало с точностью до кубов с построенными элементами $v_{\mathfrak{P}}$ в точках $\mathfrak{P} \in S$. Это можно сделать в силу теоремы Чеботарева.

Покажем, что выбранное число v (при $y = 1$) удовлетворяет условиям теоремы 1. Для этого надо проверить выполнение этих условий при всех пополнениях поля $k(\sqrt[3]{m_\sigma})$. Когда $\mathfrak{P} \in S$, эти условия выполняются, так как $(v)_{\mathfrak{P}}$ совпадают с построенными $v_{\mathfrak{P}}$ с точностью до кубов. Когда $\mathfrak{P} \notin (S \cup \mathfrak{A})$, эти условия выполняются автоматически, поскольку алгебра $L_{\mathfrak{P}}$ является в этом случае неразветвленной.

Осталось проверить наши условия в точке \mathfrak{A} . Символы Гильберта $[m'_\tau, m_\sigma]_{k_p}$ и $[(\text{Tr}(v^{2+\sigma^2}) - 3\zeta^2 x)m_\tau, m_\sigma x^{-1}]$ совпадают во всех точках поля k , кроме, быть может, одной точки \mathfrak{a} такой, что $\mathfrak{A}|_{\mathfrak{a}}$. Но тогда, по закону взаимности, они совпадают и в точке \mathfrak{A} . Поэтому для $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ первое условие теоремы 1 выполнено. Число x , будучи нормой простого элемента $v \in k(\sqrt[3]{m_\sigma})$, само является простым элементом в $k_{\mathfrak{a}}$, а m_σ — локальная единица в $k_{\mathfrak{a}}$, так как $\mathfrak{A} \notin S$. Поэтому выполняется и второе условие.

Теорема доказана.

Замечание. Мы изучали задачу погружения в случае, когда поле содержит первообразный корень ζ степени 3 из 1. В случае, когда это не так, задача также разрешима в силу теоремы Нейкирха [9].

§ 2. Задача погружения с ядром порядка 2^4

Рассмотрим задачу погружения для 2-групп с ядром порядка 16, порожденным тремя образующими α, β, γ с соотношениями $\alpha^4 = 1, \beta^2 = \gamma^2 = 1, [\alpha, \beta] = 1, [\alpha, \gamma] = 1, [\beta, \gamma] = \alpha^2$. Это группа показателя 4, в которой второй порядок имеют элементы $\alpha^2, \beta, \gamma, \beta\alpha^2, \gamma\alpha^2, \gamma\beta\alpha, \gamma\beta\alpha^{-1}$ (остальные элементы, кроме нейтрального, четвертый порядок).

Полная группа автоморфизмов ядра имеет порядок 48 и является полупрямым расширением группы внутренних автоморфизмов посредством группы внешних автоморфизмов. Последняя изоморфна прямому произведению симметрической группы S_3 и циклической группы порядка 2. Образующие этой группы внешних автоморфизмов σ, τ, ω действуют на ядре по формулам

$$\begin{cases} \alpha^\sigma = \alpha \\ \beta^\sigma = \beta\alpha^2 \\ \gamma^\sigma = \gamma\beta\alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha^\omega = \alpha \\ \beta^\omega = \gamma\alpha^2 \\ \gamma^\omega = \gamma\beta\alpha^{-1} \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha^\tau = \alpha^{-1} \\ \beta^\tau = \beta\alpha^2 \\ \gamma^\tau = \gamma\alpha^2 \end{cases}$$

и связаны соотношениями $\sigma^2 = \tau^2 = \omega^3 = 1, [\sigma, \omega] = \omega, [\sigma, \tau] = 1, [\omega, \tau] = 1$. Силовая 2-подгруппа этой группы изоморфна группе Клейна и может быть задана автоморфизмами $\{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$.

Рассмотрим подгруппу B_1 ядра, порожденную элементами γ и $\beta\alpha$. Так как $(\beta\alpha)^2 = \alpha^2$ и $[\gamma, \beta\alpha] = \alpha^2$, эта группа изоморфна группе диэдра восьмого порядка. Из вида указанного действия элементов $g \in G$ на ядре вытекает, что B_1 нормальна в G . Но для задачи погружения с ядром B_1 над числовыми полями (см. [8]), условие разрешимости сводится к условиям разрешимости сопутствующей задачи, отвечающей бесконечным дивизорам поля k .

Теперь очевидна теорема.

Теорема 3. Для разрешимости задачи погружения с указанным ядром B (в случае числовых полей и 2-группы G) необходимо и достаточно, чтобы

- 1) для сопутствующей задачи, полученной при факторизации по B_1 , выполнялось условие согласности;
- 2) были разрешимы сопутствующие задачи, полученные при выполнении по архимедовским нормированиям поля k .

Для задачи погружения над локальными полями необходимо и достаточно, чтобы выполнялось лишь первое условие.

Замечание. Существуют примеры, показывающие, что каждое из указанных условий не следует из другого.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Ишханов, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка p^4* . — Труды МИАН СССР **183** (1990), 116–121.
2. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка p^4* . — Зап. научн. семин. ЛОМИ **175** (1989), 46–62.
3. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Задача погружения для числовых полей с некоммутативным ядром порядка p^4* . — Алгебра и Анализ **2**, No. 6 (1990), 161–167.
4. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка p^4 . II*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 101–113.
5. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка p^4 . III*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **198** (1991), 20–27.
6. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка p^4 . IV*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 120–126.
7. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *О задаче погружения с неабелевым ядром порядка p^4 . V*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 127–132.
8. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*. М, Наука, 1990, с. 272.
9. J. Neukirch, *On solvable number fields*. — Invent. Math. **53** (1979), 135–164.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 3 марта 1995 г.