ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 109, 1971, с. 26—34.
2. Гаврилюк В. Т. Приближение непрерывных периодических функций полиномами Рогозинского и суммами Фурье. В сб.: „Вопр. теории прибл. функций и ее прилож.", Киев, 1976, с. 46—60.
3. Дзядык В. К., Степанец А. И. О последовательности нулей интегрального синуса. В сб.: „Метрич. вопр. теории функций и отображений", вып. 2, Киев, „Наукова думка", 1971, с. 64—73.
4. Дзядык В. К., Степанец А. И. Асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций классов Гёльдера при помощи полиномов Рогозинского. Укр. матем. журн., т. XXIV, № 4, 1972, с. 476—487.

г. Чебоксары

Поступила
9 XI 1978

А. В. Скориков

УДК 517.98

БИСИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СВЕРТКАХ И БИПОТЕНЦИАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

В заметке приводятся условия нётеровости в пространствах со смешанной нормой L_p, $p=(p_1, p_2)$, операторов, представляющих собой возмущение бисингулярных операторов операторами типа свертки. Обсуждается также применение полученных результатов к исследованию интегральным операторов типа бипотенциала. Отметим, что бисингулярные операторы при $p_1=p_2$ изучались в работах [1], [2].

1. Пусть L_p, $p=(p_1, p_2)$, — пространство со смешанной нормой:

$$\|f\|_p=\left\{\int\limits_{R^1}\left[\int\limits_{R^1}|f(x_1, x_2)|^{p_1}dx_1\right]^{p_2/p_1}dx_2\right\}^{1/p_2}. \tag{1}$$

Будем отождествлять также пространство L_p с изоморфным ему пространством L_{p_1}-значных функций, обозначаемым $L_{p_2}[L_{p_1}]$. Через $L(L_p, L_q)$ обозначим алгебру линейных ограниченных операторов, действующих из L_p в L_q. Отметим, что множество ступенчатых функций вида

$$\sum c_j\chi_j^1(x_1)\chi_j^2(x_2), \tag{2}$$

где χ_j^1, χ_j^2 — характеристические функции измеримых множеств, плотно в L_p.

Определим тензорное произведение операторов $A_1\otimes A_2$. Если $A_1\in L(L_{p_1}, L_{q_1})$, $A_2\in L(L_{p_2}, L_{q_2})$, то зададим на функциях вида

$$\varphi(x_1, x_2)=\sum_j u_j(x_1)v_j(x_2),\ u_j\in L_{p_1},\ v_j\in L_{p_2},$$

оператор $A_1\otimes A_2$ следующим образом:

$$(A_1\otimes A_2)\varphi=\sum_j A_1u_jA_2v_j. \tag{3}$$

Так как справедливо $A_1\otimes A_2=(A_1\otimes I)(I\otimes A_2)$, а из ограниченности оператора A_1 следует ограниченность оператора $A_1\otimes I$, то достаточно уметь доказывать ограниченность операторов $I\otimes A$. В следующей лемме приведем случаи, когда из ограниченности оператора A следует ограниченность оператора $I\otimes A$.

Лемма 1. *Пусть $A\in L(L_{p_2}, L_{q_2})$, тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $I\otimes A\in L(L_{p_2}[L_{p_2}], L_{q_2}[L_{q_2}])$;

b) $I\otimes A\in L(L_{p_2}[L_2], L_2[L_2])$, $p_2\leqslant q_2$;

c) $I\otimes A\in L(L_{p_2}[L_p], L_{q_2}[L_q])$, $p_2\leqslant q_2$,

$$1/p=(1-\alpha)p_2+\alpha/2,\ 1/q=(1-\alpha)/q_2+\alpha/2,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1;$$

d) *если A — одномерный оператор, то $(I\otimes A)\in L(L_{p_2}[L_{p_1}], L_{q_2}[L_{q_1}])$, $1<p_1, q_1<\infty$.*

Во всех перечисленных случаях справедливо также равенство: $\|I\otimes A\|=\|A\|$.

Отметим, что b) известно при $p_2 = q_2$ ([3], с. 336), доказательство c) следует из b) и теоремы 13.6 из [4].

В случае, когда A — оператор свертки с суммируемым ядром, ограниченность $I \otimes A$ в L_p следует из неравенства Минковского. Если A — сингулярный оператор, то вопрос решается с помощью одной теоремы Дж. Шварца для операторнозначных функций [5] (с. 222), а именно, пусть

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{R^1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\, dt \tag{4}$$

— сингулярный оператор, тогда $I \otimes S$ ограничен в L_p, $\infty > p_1$, $p_2 > 1$, причем $\|I \otimes S\| \leqslant c_p \|S\|$, где константа c_p, вообще говоря, не равна 1.

2. Обозначим через $\mathfrak{A}_p^2$ алгебру, порожденную операторами I, $I \otimes S$, $I \otimes K$, $C \otimes I$, где S — сингулярный оператор (4), K — оператор свертки с суммируемым ядром, $C \in \boldsymbol{L}(L_{p_1})$. Аналогично определим алгебру $\mathfrak{A}_p^1$, порожденную операторами I, $S \otimes I$, $K \otimes I$, $I \otimes D$, где $D \in \boldsymbol{L}(L_{p_2})$, причем предполагается, что $I \otimes D \in \boldsymbol{L}(L_p)$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}_p^i$ замыкание алгебры $\mathfrak{A}_p^i$ по операторной норме в $\boldsymbol{L}(L_p)$.

Определим символ оператора $A (\in \overline{\mathfrak{A}}_p^2)$ следующим образом: если оператор A имеет вид $A = \sum\limits_i A_i \otimes B_i$, то символом оператора A назовем оператор-функцию $\hat{A}(\xi) \in \boldsymbol{L}(L_{p_1})$ вида

$$\hat{A}(\xi) = \sum \hat{B}_i(\xi) A_i, \tag{5}$$

где $\hat{B}_i(\xi) I = FB_i$, F — оператор Фурье. В случае, когда A $(\in \overline{\mathfrak{A}}_p^2)$ есть предел сумм вида $\sum A_i \otimes B_i$, символ оператора A определим как предел оператор-функций вида (5) по операторной норме пространства $\boldsymbol{L}(L_{p_1})$. Аналогично определяется символ оператора из $\overline{\mathfrak{A}}_p^1$. Из следующей леммы вытекает существование символа и его независимость от представления оператора.

Лемма 2. *Справедливы неравенства*:

$$\sup_\xi \|\hat{A}(\xi)\|_{\boldsymbol{L}(L_{p_1})} \leqslant c_1 \|A\|, \quad A \in \mathfrak{A}_p^2, \tag{6}$$

$$\sup_\xi \|\hat{A}(\xi)\|_{\boldsymbol{L}(L_{p_2})} \leqslant c_2 \|A\|, \quad A \in \mathfrak{A}_p^1. \tag{7}$$

Доказательство леммы основано на применении локального принципа в форме, предложенной в [6], с использованием локализующих классов из [7].

Теорема 1. *Если оператор* $A \in \overline{\mathfrak{A}}_p^2$, $p = (p_1, p_2)$, $\infty > p_1, p_2 > 1$ $(A \in \overline{\mathfrak{A}}_p^1$, $\min\{p_2, 2\} \leqslant p_1 \leqslant \max\{p_2, 2\})$, *то для того чтобы оператор A был обратим, необходимо и достаточно, чтобы символ* $\hat{A}(\xi) \in \boldsymbol{L}(L_{p_1})$ $(\hat{A}(\xi) \in \boldsymbol{L}(L_{p_2}))$ *был обратимым оператором при любых значениях* $\xi \in \overline{R}$ *($\overline{R}$ — прямая, пополненная двумя бесконечно удаленными точками).*

Замечание 1. В общем, неизотропном случае $p = (p_1, p_2)$, $\infty > p_i > 1$, утверждение теоремы 1 сохраняется в своей необходимой части для операторов A из незамкнутой алгебры $\mathfrak{A}_p^1$ достаточность же будет сохраняться, если оператор $I \otimes \hat{A}(\xi)$ обратим.

3. Пусть K_p — идеал компактных операторов в $\boldsymbol{L}(L_p)$. Введем вспомогательные идеалы K_p^1 и K_p^2 как замыкание по операторной норме в $\boldsymbol{L}(L_p)$ операторов вида $\sum K_i^{n_i} \otimes B_i$, $\sum A_i \otimes T_i^{n_i}$, где $K_i^{n_i}$, $T_i^{n_i}$ — конечномерные операторы. Отметим отличие идеалов K_p^1 и K_p^2: если оператор $A (\in \boldsymbol{L}(L_{p_1}))$ компактен, то из равенства $\|K \otimes I\| = \|K\|$ легко получить, что оператор $K \otimes I \in K_p^1$, для K_p^2 аналогичное утверждение можно получить по лемме 1 только для $\min\{p_2, 2\} \leqslant p_1 \leqslant \max\{p_2, 2\}$.

Определим, следуя [1], понятие частичной нётеровости, приспособленное к неизотропному случаю. Оператор $A(\in L(L_p))$ назовем 1-нётеровым, если существуют операторы R_1, $R_2(L(L_p))$ такие, что

$$R_1A = I + T_1^1;\ AR_2 = I + T_2^1,\ T_1^1,\ T_2^1 \in K_p^1.$$

Симметрично определяется 2-нётеровость. Известно, что оператор 1-нётеров тогда и только тогда, когда он 1-нётеров и 2-нётеров одновременно [1].

Воспользуемся далее модификацией локального метода, предложенной в [8]. Введем в фактор-алгебрах $\widetilde{L}_p^1 = L(L_p)/K_p^1$, $\widetilde{L}_p^2 = L(L_p)/K_p^2$ следующие отображения, порождающие локальные структуры:

$$P^1(u) = \chi_u \otimes I,\ \ P^2(u) = I \otimes \chi_u,$$

где χ_u — оператор умножения на характеристическую функцию множества u. Через $\Lambda_p^1(\Lambda_p^2)$ обозначим операторы локального типа относительно отображений $P^1(P^2)$.

Определение. Обобщенной бисингулярной сверткой будем называть оператор $A(\in \Lambda_p^1 \cap \Lambda_p^2)$, локально эквивалентный операторам $A_x^1(\in \overline{\mathfrak{A}}_p^1)$, $A_x^2(\in \overline{\mathfrak{A}}_p^2)$ относительно отображений P^1, P^2. Через $\overline{\mathfrak{B}}_p$ обозначим класс бисингулярных сверток, а через $\mathfrak{B}_p$ — класс тех бисингулярных сверток, у которых локальные представители из незамкнутых алгебр $\mathfrak{A}_p^1$, $\mathfrak{A}_p^2$.

Для каждого оператора $A \in \overline{\mathfrak{B}}_p$ определим символ $\Phi_A(x, \xi)$ как пару операторнозначных функций $\Phi_A(x, \xi) = (\Phi_A^1(x, \xi), \Phi_A^2(x, \xi))$, заданных на множестве $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M} = \dot{R} \times \{+\infty\} \cup \dot{R} \times \{-\infty\} \cup \{\infty\} \times [-\infty, 0] \cup \{\infty\} \times [0, +\infty],$$

следующим образом: $\Phi_A^i(x, \pm\infty) = \hat{A}_x^i(\pm\infty)$, $\Phi_A^i(x, \pm 0) = A_x^i(0 \pm 0)$, $x \in \dot{R}$, $\Phi_A^i(\infty, \xi) = \hat{A}_\infty^i(\xi)$, $\xi \in \overline{R}$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Если оператор* $A \in \mathfrak{B}_p$, $p = (p_1, p_2)$, $\infty > p_1, p_2 > 1$, *или* $A \in \mathfrak{B}_p$ *при* $\min\{p_2, 2\} \leqslant p_1 \leqslant \max\{p_2, 2\}$, *то для того чтобы оператор* A *был нётеров в* L_p *необходимо, а при*

$$\min\{p_2, 2\} \leqslant p_1 \leqslant \max\{p_2, 2\}$$

и достаточно, чтобы символ $\Phi_A(x, \xi)$ *был обратимым оператором для любых* $(x, \xi) \in \mathfrak{M}$.

4. Полученные результаты можно применить к выводу условий нётеровости операторов вида:

$$(M\varphi)(x) = \int_{R^2} \frac{c(x, x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t)\, dt,\ x \in R^2,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1,\ |x-t|^{1-\alpha} = |x_1 - t_1|^{1-\alpha_1} |x_2 - t_2|^{1-\alpha_2},$$

в предположении, что функция $c(x_1, x_2, y_1, y_2)$ имеет конечный разрыв при $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, а в остальных точках удовлетворяет смешанному условию Гёльдера. Для таких функций можно получить представление $M = I_{++}^\alpha T$, где T — оператор обобщенной бисингулярной свертки, а I_{++}^α — дробный интеграл вида:

$$(I_{++}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi(x-t)}{t^{1-\alpha}}\, dt,\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Отсюда, используя теорему 2, можно получить условия нётеровости оператора M из L_p в пространство риссовых потенциалов $I^\alpha(L_p)$, описание которого через дробные производные типа Маршо дано в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилиди В. С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p. В сб.: „Матем. исследования“, т. 7, вып. 3, Кишинев, „Штиинца“, 1972, с. 167—175.

2. Дудучава Р. В. О бисингулярных интегральных операторах и операторах свертки на квадранте. ДАН СССР, т. 221, № 2, 1975, с. 279—282.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М., „Мир“, 1965.

4. Кальдерон А. П. Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод. „Математика“ (сб. переводов), т. 9, № 3, 1965, с. 56—129.

5. Лизоркин П. И. Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток в пространствах со смешанной нормой. Приложения. Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 34, № 1, 1970, с. 218—247.

6. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев, „Штиинца“, 1973.

7. Дудучава Р. В. Интегральные операторы свертки на квадранте с разрывными символами. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1975, т. 40, № 2, с. 388—412.

8. Козак А. В. Локальный принцип в теории проекционных методов. ДАН СССР, т. 212, № 6, 1973, с. 1287—1289.

9. Скориков А. В. Операторы типа бипотенциала в $L_p(R^2)$. ВИНИТИ, № 1780—77 Деп., 1977.

г. Ростов-на-Дону

Поступила
6 V 1980