КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

ЖЕГАЛОВ В. И.

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

1. В 1959 году А. В. Бицадзе ([1], с. 117) поставил вопрос об исследовании систем уравнений смешанного типа высшего порядка. В статьях автора [2] — [3] изучалось уравнение

$$L^n U + \sum_{k=1}^{n} a_k(x, y) L^{n-k} U = 0, \quad U = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$L \equiv \begin{Vmatrix} \partial/\partial x, & -\partial/\partial y \\ \operatorname{sgn} y\, \partial/\partial y, & \partial/\partial x \end{Vmatrix}, \quad L^0 \equiv E, \quad L^{k+1} \equiv L(L^k), \tag{2}$$

полученное с помощью итераций модельной системы $LU = 0$.

Легко видеть, что при этом была использована лишь одна из возможностей, ибо вид оператора L^k зависит от формы записи системы $LU = 0$. В самом деле, если поменять знаки в одном или обоих уравнениях этой системы, мы не получим ничего нового в смысле свойств ее решений, но матрица L изменится, что ведет к изменению итераций L^k. Что касается уравнения (1), то для него существенно различными окажутся (например) лишь случаи, когда L задано с помощью (2) и

$$L \equiv \begin{Vmatrix} -\partial/\partial x, & \partial/\partial y \\ \operatorname{sgn} y\, \partial/\partial y, & \partial/\partial x \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Далее, система $LU = 0$ не изменится, если мы перенесем $\operatorname{sgn} y$ направо, но уравнение (1) приобретет другой смысл. А именно, если при $y > 0$ L^k вычисляется с помощью (2), то при $y < 0$ эту же итерацию нужно будет вычислять с использованием формулы (3) и обратно. Таким образом, имеет смысл изучать уравнение (1) с оператором L, имеющим вид (3) и

$$\left\| \begin{matrix} \partial/\partial x, & -\partial/\partial y \\ \partial/\partial y, & \operatorname{sgn} y\, \partial/\partial x \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} -\partial/\partial x, & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y, & \operatorname{sgn} y\, \partial/\partial x \end{matrix} \right\|.$$

В настоящей заметке мы ограничимся рассмотрением уравнения

$$L^2U + a(x,\ y)\, LU + b(x,\ y)\, U = 0 \tag{4}$$

при L, заданном формулой (3).

2. Пусть D_- — внутренность треугольника с вершинами (0, 0), (1, 0), (1/2, — 1/2), а D_+ — односвязная область в полуплоскости $y > 0$, ограниченная отрезком [0, 1] и простой дугой σ так, что граница D_+ является гладкой в смысле Гельдера. Вещественные функции $a(x,\ y)$, $b(x,\ y)$ аналитичны в $\bar{D}_+$, а при $y < 0$ $a(x,\ y)$, $b(x,\ y) \in C^1(\bar{D}_-)$. Рассмотрим также вещественные переменные 2×2-матрицы A, B, Γ, P, $Q \in H$ и двумерные векторы F, Ω, $\Omega_1 \in H$, причем A и F определены на σ и [0, 1], а остальные — только на [0, 1].

Задача. В области $D_+ \cup D_-$ найти решение U системы (4), непрерывное в $\bar{D}_-$, а в $\bar{D}_+$ непрерывное, кроме концов отрезка [0, 1], вблизи которых оно остается ограниченным. На границах областей D_+, D_- должны выполняться условия

$$A(x)\, U\left(\frac{x}{2},\ -\frac{x}{2}\right) + B(x)\, U(x,\ -0) + \\ + \Gamma(x)\, U\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{x-1}{2}\right) = F(x), \tag{5}$$

$$U(x,\ -0) = P(x)\, U(x,\ +0) + \Omega(x), \tag{6}$$

$$\frac{\partial U(x,\ -0)}{\partial y} = Q(x)\, \frac{\partial U(x,\ +0)}{\partial y} + \Omega_1(x), \tag{7}$$

$$A(t)\, U(t) = F(t), \quad x \in [0,\ 1],\ t \in \sigma. \tag{8}$$

Из условия (5) видно, что данная задача относится к серии задач со смещением, интенсивно изучаемой в последнее время в случае одного уравнения, серии, начатой в статье автора [4], хотя многие исследователи указывают в качестве первой работу А. М. Нахушева [5]. Заметим, что условие (5) обобщает предыдущие постановки задач, в которых связываются значения искомых функций только в двух из трех точек:

$$\left(\frac{x}{2},\ -\frac{x}{2}\right),\ (x,\ 0),\ \left(\frac{x+1}{2},\ \frac{x-1}{2}\right).$$

Мы сведем сформулированную задачу к системе сингулярных интегральных уравнений. При этом будут использованы идеи работы Ю. М. Крикунова [6].

Введем в D_- новый искомый вектор

$$W = GU, \quad G = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \tag{9}$$

и перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Тогда уравнение (4) и условия (5)—(7) приобретают соответственно вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} a\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)\left[\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \frac{\partial W}{\partial \xi} - \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \frac{\partial W}{\partial \eta}\right] + \\ + \frac{1}{4} b\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right) W = 0, \tag{10}$$

$$AG\,W\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + BG\,W(x, 0) + \Gamma G\,W\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = 2F(x), \tag{11}$$

$$W(x, 0) = GP(x)\,U(x, +0) + G\Omega(x), \tag{12}$$

$$\frac{\partial W(x, 0)}{\partial y} = GQ(x)\,\frac{\partial U(x, +0)}{\partial y} + G\Omega_1(x). \tag{13}$$

С помощью метода Римана [1, с. 36—40] получаем соотношение

$$W(x, y) = \frac{1}{2}[R(x+y, x+y, x+y, x-y)\,W(x+y, 0) + \\ + R(x-y, x-y, x+y, x-y)\,W(x-y, 0) + \\ + \int_{x+y}^{x-y} M(t, x+y, x-y)\,W(t, 0)\,dt + \\ + \int_{x+y}^{x-y} N(t, x+y, x-y)\,\frac{\partial W(t, 0)}{\partial y}\,dt, \tag{14}$$

где $R(x, y, \xi, \eta)$ — матрица Римана,

$$M(t, \xi, \eta) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial R(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial R(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta)}{\partial \eta_1}\right]_{\xi_1=\eta_1=t} - \tag{15}$$
$$- \frac{1}{2} a\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) R(t, t, \xi, \eta) \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad N(t, \xi, \eta) = -\frac{1}{2} R(t, t, \xi, \eta).$$

Подставим (14) в (11) с учетом (12)—(13). Найдем

$$[AGR(x, x, 0, x) + 2BG + \Gamma GR(x, x, x, 1)]\,GPU(x, +0) + \\ + 2AG\int_0^x M(t, 0, x)\,GP(t)\,U(t, +0)\,dt -$$

$$-2\Gamma G\int_1^x M(t,\ x,\ 1)\,GP(t)\,U(t,\ +0)\,dt+$$

$$+2AG\int_0^x N(t,\ 0,\ x)\,GQ(t)\,\frac{\partial U(t,\ +0)}{\partial y}\,dt-$$

$$-2\Gamma G\int_1^x N(t,\ x,\ 1)\,GQ(t)\,\frac{\partial U(t,\ +0)}{\partial y}\,dt=F_1(x), \tag{16}$$

$$F_1(x)=4F(x)-[AGR(x,\ x,\ 0,\ x)+2BG+$$

$$+\Gamma GR(x,\ x,\ x,\ 1)]\,G\Omega(x)-2AG\int_0^x M(t,\ 0,\ x)\,G\Omega(t)\,dt+$$

$$+2\Gamma G\int_1^x M(t,\ x,\ 1)\,G\Omega(t)\,dt-2AG\int_0^x N(t,\ 0,\ x)\,G\Omega_1(t)\,dt+$$

$$+2\Gamma G\int_1^x N(t,\ x,\ 1)\,G\Omega_1(t)\,dt-AGR(0,0,0,x)\,GP(0)\,U(0,\ +0)-$$

$$-\Gamma GR(1,\ 1,\ x,\ 1)\,GP(1)\,U(1,\ +0).$$

При $y\geqslant 0$, вводя $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, запишем уравнение (4) в форме

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{1}{4}\,a\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\left[\begin{Vmatrix}-1 & i\\ i & 1\end{Vmatrix}\frac{\partial U}{\partial z}-\begin{Vmatrix}1 & i\\ i & -1\end{Vmatrix}\frac{\partial U}{\partial\bar{z}}\right]+$$

$$+\frac{1}{4}\,b\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)U=0. \tag{17}$$

Известно [7, с. 163], что общее решение системы (17) имеет вид

$$U(x,\ y)=\mathrm{Re}\left[K(z,\ \bar{z}_0,\ z,\ \bar{z})\,\varphi(z)-\int_{z_0}^{z}H(z,\ t)\,\varphi(t)\,dt\right], \tag{18}$$

где K — матрица Римана для (17), двумерный произвольный аналитический вектор $\varphi(z)$ удовлетворяет условию $\varphi(z_0)=\overline{\varphi(z_0)}$, $z_0\in D_+$,

$$H(z,\ t)=\frac{\partial}{\partial t}K(t,\ \bar{z}_0,\ z,\ \bar{z})+$$

$$+\frac{1}{4}\,a\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)K(t,\ \bar{z}_0,\ z,\ \bar{z})\begin{Vmatrix}1 & i\\ i & -1\end{Vmatrix}.$$

Вычисляя $U(x, +0)$, $\frac{\partial U(x, +0)}{\partial y}$ из (18) и подставляя в (16) с учетом (15), получим

$$\begin{gathered}[AGR(x, x, 0, x) + 2BG + \Gamma GR(x, x, x, 1)] \times \\ \times GP(x) \operatorname{Re}[K(x, \overline{z}_0, x, x)\varphi(x)] - \\ - [AGR(x, x, 0, x) - \Gamma GR(x, x, x, 1)] \times \\ \times GQ(x) \operatorname{Im}[K(x, \overline{z}_0, x, x)\varphi(x)] + \\ + \operatorname{Re}\Big[\int_{z_0}^{x} H_1(x, t)\varphi(t)\,dt + \int_0^x H_2(x, t)\varphi(t)\,dt + \\ + \int_0^x H_3(x, t)\int_{z_0}^{t} H_4(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau dt + \\ + \int_1^x H_5(x, t)\int_{z_0}^{t} H_6(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau\,dt + \int_0^{z_0} H_7(x, t)\varphi(t)\,dt + \\ + \int_1^{z_0} H_8(x, t)\varphi(t)\,dt\Big] = F_2[x, \varphi(0), \varphi(1)],\end{gathered} \tag{19}$$

где H_k — вполне определенные матрицы, а F_2 — вполне определенный вектор, причем H_k, $F_2 \in H$. Условие же (8) приобретает вид

$$\operatorname{Re}\left[A(t)K(t, \overline{z}_0, t, t)\varphi(t) - \int_{z_0}^{t} A(t)H(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right] = F(t), \quad t \in \sigma. \tag{20}$$

Мы можем взять $\varphi(z)$ в форме И. Н. Векуа [7, с. 175] (см. также замечание на с. 204 в [9])

$$\varphi(z) = \int_{L_*} \frac{t - z_0}{t - z}\mu(t)\,ds, \quad L_* = \sigma + [0, 1], \tag{21}$$

где вектор $\mu(t)$ веществен. После подстановки $\varphi(z)$ в (19) — (20) в результате простых, хотя несколько громоздких преобразований (при этом удобнее пользоваться не самой функцией $\varphi(z)$, а интегралом от нее в пределах от z_0 до z), придем к соотношению

$$A^*(t)\mu(t) + \frac{B^*(t)}{\pi i}\int_{L_*} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_{L_*} k(t, \tau)\mu(\tau)\,d\sigma = F^*(t), \tag{22}$$

где $k(t, \tau)$ — матрица, допускающая на $[0, 1] + \sigma$ не более чем интегрируемую особенность, а F^* — определенный вектор, удовлетворяющий на σ и $[0, 1]$ условию H, а на концах $[0, 1]$ имеющий разрывы первого рода. При этом для $t = x \in [0, 1]$

$$A^*(x) = \operatorname{Re}\{\pi i (x - z_0)[T(x)P(x) - iS(x)Q(x)]K(x, \bar{z}_0, x, x)\},$$

$$B^*(x) = \pi i \operatorname{Re}\{(x - z_0)[T(x)P(x) - iS(x)Q(x)]K(x, \bar{z}_0, x, x)\}, \quad (23)$$

$$T(x) = [A(x)GR(x, x, 0, x) + 2B(x)G + \Gamma(x)GR(x, x, x, 1)]G,$$

$$S(x) = [A(x)GR(x, x, 0, x) - \Gamma(x)GR(x, x, x, 1)]G, \quad (24)$$

а для $t \in \sigma$

$$A^*(t) = A(t)\operatorname{Re}[\pi i \bar{t}'(t - z_0)K(t, \bar{z}_0 t, \bar{t})],$$

$$B^*(t) = A(t)\pi i \operatorname{Re}[\bar{t}'(t - z_0)K(t, \bar{z}_0, t, \bar{t}). \quad (25)$$

Итак, (22) представляет собой систему сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, изученную Н. П. Векуа [9] при условии

$$\det(A^* \pm B^*) \neq 0. \quad (26)$$

Из (23) видно, что на $[0, 1]$

$$A^* + B^* = i\pi(x - z_0)[T(x)P(x) - iS(x)Q(x)]K(x, \bar{z}_0, x, x), \quad (27)$$

а на σ

$$A^* + B^* = i\pi(t - z_0)\, t' A(t) K(t, \bar{z}_0, t, t), \quad (28)$$

причем на $\sigma + [0, 1]$

$$A^* - B^* = \overline{A^* + B^*}.$$

Поэтому для выполнения (26) достаточно, чтобы

$$\det(A^* + B^*) \neq 0. \quad (29)$$

Входящие в A^*, B^* матрицы K, R вычисляются в явном виде

$$K(t, \zeta, t, \tau) = E + \frac{1}{4}\int_{\tau}^{\zeta} a\left(\frac{t+\xi}{2}, \frac{t-\xi}{2i}\right)d\xi \begin{Vmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{Vmatrix}, \quad (30)$$

$$R(x, x, 0, x) = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ -\frac{1}{2}\int_0^x a\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right)dt, & 1 \end{Vmatrix}, \quad (31)$$

$$R(x, x, x, 1) = \begin{Vmatrix} 1, & -\frac{1}{2}\int_1^x a\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x-t}{2}\right)dt \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}. \quad (32)$$

Как видно из (30), $\det K(t, z_0, t, t) = 1$. Следовательно, (29) имеет место, если

$$\det A(t) \neq 0, \quad t \in \sigma, \tag{33}$$

$$\det [T(x) P(x) - iS(x) Q(x)] \neq 0, \; x \in [0, 1]. \tag{34}$$

С помощью (31) — (32) последнее условие преобразуется в следующее

$$\det \{[A(x) \Phi(x) + 4B(x) + \Gamma(x) \Phi_1(x)] P(x) - \\ - i [A(x) \Phi(x) - \Gamma(x) \Phi_1(x)] Q(x)\} \neq 0, \tag{35}$$

где

$$\Phi(x) = 2E + \frac{1}{2} \int\limits_0^x a\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) dt \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\Phi_1(x) = 2E + \frac{1}{2} \int\limits_1^x a\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x-t}{2}\right) dt \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, при условиях (33), (35) матричное уравнение (22) будет нормального типа. Подставив его решение $\mu(t)$ в (21), а (21) — в (18), мы найдем решение нашей задачи в D_+. Затем с помощью (12) — (14) вычислим $W(x, y)$, после чего формула $U = 1/2GW$ даст решение в D_-.

3. В частном случае $a \equiv b \equiv 0$ можно отказаться от гладкости контура $\sigma + [0, 1]$ в точках $(0, 0)$, $(1, 0)$. В D_- имеем

$$U(x, y) = \frac{U(x+y, 0) + U(x-y, 0)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-y}^{x+y} \frac{\partial U(t, 0)}{\partial y} dt. \tag{36}$$

Поэтому условия (5) — (7) приводят к соотношению

$$[A(x) + 2B(x) + \Gamma(x)] P(x) U(x, +0) - \tag{37}$$

$$- A(x) \int\limits_0^x Q(t) \frac{\partial U(t, +0)}{\partial y} dt + \Gamma(x) \int\limits_1^x Q(t) \frac{\partial U(t, +0)}{\partial y} dt = F_3(x),$$

$$F_3(x) = 2F(x) - [A(x) + 2B(x) + \Gamma(x)] \Omega(x) + \\ + A(x) \int\limits_0^x \Omega_1(t) dt - \Gamma(x) \int\limits_1^x \Omega_1(t) dt - A(x) [P(0) U(0, +0) + \Omega(0)] - \\ - \Gamma(x) [P(1) U(1, +0) + \Omega(1)]. \tag{38}$$

В D_+ $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\Delta U = 0$. Введем вектор $V(x, y)$, гармонически сопряженный с $U(x, y)$ и удовлетворяющий условию $V(0, 0) = 0$. Так как $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, то из (37) находим

$$[A(x) + 2B(x) + \Gamma(x)]\, P(x)\, U(x, +0) +$$
$$+ [A(x) - \Gamma(x)]\, Q(x)\, V(x, +0) - A(x) \int_0^x Q'(t)\, V(t, +0)\, dt +$$
$$+ \Gamma(x) \int_1^x Q'(t)\, V(t, +0)\, dt = F_3(x) - \Gamma(x)\, Q(1)\, V(1, +0), \quad (39)$$

где $F_3(x)$ дается формулой (38). Следовательно, в области D_+ мы получаем задачу типа Гильберта с условиями (8), (39).

Если еще $Q \equiv \mathrm{const}$, то получается обычная задача Гильберта с разрывными коэффициентами для голоморфного вектора $U + iV$. Она изучена [9] при условиях (33) и

$$\det\{[A(x) + 2B(x) + \Gamma(x)]\, P(x) - i\,[A(x) - \Gamma(x)]\, Q\} \neq 0.$$

Надо только учесть, что в нашем случае задача является „нагруженной“, так как в правую часть краевого условия входят $U(0, +0)$, $V(1, +0)$. Это обстоятельство влечет за собой увеличение числа условий разрешимости.

Наконец, если матрица $[A(x) + 2B(x) + \Gamma(x)]\, P(x) - i\,[A(x) - \Gamma(x)]\, Q$ треугольная, а D_+ является половиной фундаментальной области некоторой элементарной или фуксовой группы дробно-линейных подстановок, то решение задачи может быть получено в явном виде с помощью результатов Л. И. Чибриковой [10]. При этом можно воспользоваться готовыми формулами из статьи Ф. И. Карамышева [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.

2. Жегалов В. И. Некоторые краевые задачи для системы уравнений смешанного типа второго порядка. — „Уч. зап. КГУ“, 1962, т. 122, кн. 3, с. 17—29.

3. Жегалов В. И. Об одной системе уравнений смешанного типа высшего порядка. — „Изв. вузов. Математика“, 1975, № 6, с. 25—35.

4. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии. — „Уч. зап. КГУ“, 1962, т. 122, кн. 3, с. 3—16.

5. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. — „Дифференциальные уравнения“, 1969, т. 5, № 1, с. 44—59.

6. Крикунов Ю. М. Задача Трикоми с производными в краевом условии. — „Уч. зап. КГУ“, 1964, т. 123, кн. 9, с. 106—113.

7. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М., ГИТТЛ, 1948.

8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., „Наука“, 1968.

9. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М. — Л., 1950.

10. Чибрикова Л. И. Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружностей. — „Уч. зап. КГУ“, 1957, т. 117, кн. 2, с. 22—26.

11. Карамышев Ф. И. Краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. — „Сиб. матем. ж.“, 1961, т. 2, № 4, с. 537—546.

Доложено на семинаре 3 февраля 1976 г.