А. Н. Варченко, Комбинаторика и топология расположения аффинных гиперплоскостей в вещественном пространстве, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 1, 11–22

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 11—22

УДК 517.88

КОМБИНАТОРИКА И ТОПОЛОГИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ АФФИННЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ В ВЕЩЕСТВЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Н. Варченко

В $\mathbf{R}^n$ рассмотрим гиперплоскость A и выпуклый многогранник Γ, образованный пересечением линейных полупространств, часть из которых открыта и оставшаяся часть замкнута. Предположим, что гиперплоскость A не пересекается с замыканием многогранника, и A вместе с гиперплоскостями, ограничивающими полупространства, составляет конфигурацию общего положения.

Теорема 1. *Многогранник есть альтернированная сумма n-мерных симплексов*

$$\Gamma = \sum_e \varepsilon(\Gamma, \Delta_e)\, \Delta_e, \tag{1}$$

где симплексы Δ_e и индексы $\varepsilon = \pm 1$ определены ниже, суммирование идет по вершинам многогранника.

Пусть B — открытое полупространство, ограниченное гиперплоскостью A и содержащее Γ. Пусть Γ в окрестности вершины e является пересечением полупространств $B_1, \ldots, B_n$. Тогда Δ_e — это единственный ограниченный многогранник вида $B \cap C_1 \cap \ldots \cap C_n$, где C_j — это B_j или $\mathbf{R}^n \setminus B_j$. Индекс $\varepsilon(\Gamma, \Delta_e)$ равен 1 или -1 в зависимости от четности или нечетности числа сомножителей вида $\mathbf{R}^n \setminus B_j$ в предыдущем пересечении. Суммирование в (1) понимается в теоретико-множественном смысле: точка пространства входит в правую часть формулы (1) с коэффициентом 1, если она принадлежит Γ, и не входит, если не принадлежит.

Пример. Открытый треугольник Γ на рис. 1 равен $\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2$.

Формула (1) сводит вычисление любой аддитивной характеристики многогранника к вычислению этой характеристики для симплекса. Примеры аддитивной характеристики: объем многогранника, количество точек с целочисленными координатами, принадлежащих многограннику. В частности, получаем формулу объема многогранника: $\mathrm{Vol}(\Gamma) = \sum \varepsilon(\Gamma, \Delta_e)\, \mathrm{Vol}(\Delta_e)$, где объем симплексов может быть вычислен явно по стандартной формуле.

Формула (1), в частности, означает равенство n-мерных клеточных цепей, стоящих справа и слева. Близкую формулу см. в [1]. По поводу теоремы 1 см. примеры в пп. 1.5 и 3.2.

В статье приведено обобщение формулы (1) на случай, когда гиперплоскость A и гиперплоскости, ограничивающие многогранник, пересекаются нормально. В этом случае симплексы заменяются на их обобщения — стандартные цепи.

В статье изучается изменение слагаемых в формуле (1) при изменении конфигурации, сохраняющем функцию ранга конфигурации. Доказывается, что число ограниченных клеток заданной размерности у нормальной конфигурации определяется функцией ранга. Рассматривается мираж — множество всех конфигураций, гиперплоскости которых получены независимыми параллельными переносами из гиперплоскостей заданного набора. Рассматривается расслоение, базой которого служит множество всех нормальных конфигураций миража, слоем — пространство ограниченных целочисленных цепей конфигурации. В этом расслоении определяется комбинаторная связность (отождествляются все слои). Связность обладает следующими свойствами. Параллельный перенос цепи не повышает ее размерности, сохраняет эйлерову характеристику. n-мерный объем цепи, преобразованной параллельным переносом,— многочлен на мираже. Стандартные цепи ковариантно постоянны в комбинаторной связности. Разложение (1) ковариантно постоянно. Число целых точек в цепи полиномиально изменяется при параллельных переносах. Точнее, гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$ называется целочисленной, если она задается уравнением с целыми коэффициентами. Конфигурация называется целочисленной, если все ее гиперплоскости целочисленны и все вершины конфигурации имеют целые координаты. Рассматривается мираж, полученный параллельными переносами целочисленных гиперплоскостей, и цепь в одной из нормальных конфигураций. Для каждой целочисленной нормальной конфигурации вычисляется число целых точек в $\mathbf{R}^n$, вошедших в цепь, параллельно перенесенную в эту конфигурацию. Тогда эти числа — значения подходящего многочлена на мираже.

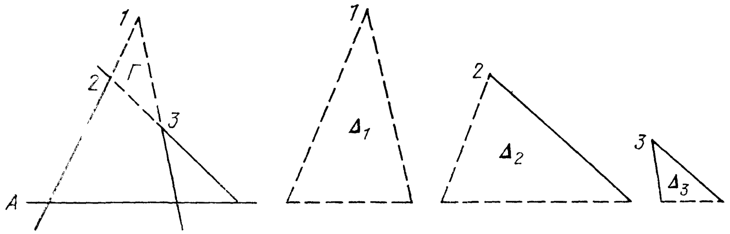

Рис. 1

Эта работа выполнена в связи с исследованиями И. М. Гельфанда с сотрудниками многомерной гипергеометрической функции [2—8]. Автор благодарен И. М. Гельфанду за интерес, проявленный к работе, В. А. Васильеву, А. В. Зелевинскому, А. Г. Хованскому — за многочисленные полезные обсуждения.

Автор с признательностью посвящает эту работу Владимиру Игоревичу Арнольду к его пятидесятилетию.

§ 1. Конфигурации, цепи, базисы

1. Конфигурации. Пусть V — n-мерное векторное пространство, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — перенумерованные линейные функции на V, A_j — гиперплоскость, заданная уравнением $\alpha_j = 0$. Совокупность линейных функций и определенных ими гиперплоскостей назовем *конфигурацией*. Обозначим через A объединение всех гиперплоскостей конфигурации.

Каждую из линейных функций заданной конфигурации $S = \{\alpha_{j\leqslant N}\}$ уменьшим на ее значение в нуле. Полученные линейные функции $\beta_1, \ldots, \beta_N$ определяют новую конфигурацию, которую назовем *приведением* данной. Все гиперплоскости приведенной конфигурации проходят через начало координат.

На множестве подмножеств в $\{1, \ldots, N\}$ определим *функцию ранга* конфигурации S: для $J \subset \{1, \ldots, N\}$ положим $r(J) = \operatorname{rank} \{\beta_j, j \in J\}$.

Конфигурацию назовем *нормальной*, если гиперплоскости конфигурации имеют только нормальные пересечения. Конфигурацию назовем конфигурацией *общего положения*, если пересечение любых k гиперплоскостей $(n - k)$-мерно при $k \leqslant n$ и пусто при $k > n$. Совокупность $X(N, r)$ всех нормальных конфигураций с заданной функцией ранга назовем *нормальным стратом*. Рассматриваем нормальные конфигурации, если иное специально не оговорено.

2. Грани. k-мерной *гранью* конфигурации в вещественном пространстве назовем ограниченную компоненту связности разности объединения $(n - k)$-кратных пересечений гиперплоскостей конфигурации и объединения $(n - k + 1)$-кратных пересечений. В частности, n-мерная грань — это ограниченная компонента связности разности $V \setminus A$. Нульмерные грани назовем *вершинами*.

Пространство линейных комбинаций с вещественными коэффициентами граней конфигурации назовем пространством *цепей* конфигурации, двойственное — пространством *коцепей*. Пространство цепей (соответственно коцепей) разлагается в прямую сумму пространств цепей (коцепей) фиксированной размерности: $C = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} C_k$ (соответственно $C^* = \bigoplus C^k$).

В пространстве цепей имеется *видимый* базис — грани конфигурации. В статье дана конструкция другого базиса, *канонического*, указана формула перехода от видимого базиса к каноническому. Формула (1) служит примером.

3. Порядок вершин. Вершины конфигурации частично упорядочены (лексикографически): $e < f$, если для некоторого k $(\alpha_j(e))^2 = (\alpha_j(f))^2$ при $j < k$, $(\alpha_k(e))^2 < (\alpha_k(f))^2$. Максимальную вершину грани назовем *отмеченной*.

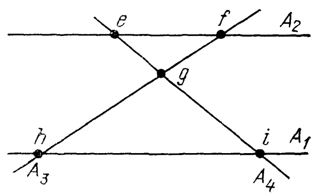

Рис. 2

Скажем, что грань *связана* с данной вершиной, если вершина — отмеченная для данной грани. Совокупность всех граней, для которых данная вершина— отмеченная, назовем *отмеченной подзвездой* вершины. Очевидна

Лемма 1. *Отмеченная подзвезда вершины нормальной конфигурации образует в вершине росток замкнутого выпуклого конуса, не содержащего ни одной прямой.*

Следствие. *В отмеченной подзвезде имеется только одна грань максимальной размерности.*

Назовем ее *отмеченной* для данной вершины. Размерность отмеченной грани назовем *степенью* вершины.

Как разъяснил мне А. В. Зелевинский, понятие вершины максимальной степени по существу содержится в [8].

Пример. Для конфигурации рис. 2, где A_1 параллельна A_2, степени вершин e, f, g, h, i равны 2, 1, 2, 0, 1.

Вершина степени k — отмеченная для 2^k граней. Если a_k — количество вершин степени k, то $d_k = \binom{k}{k} a_k + \binom{k}{k+1} a_{k+1} + \ldots$ — количество всех k-мерных граней конфигурации, $a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n$ — количество всех граней.

Если гиперплоскости конфигурации с номерами $I = (i_1, \ldots, i_n)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, пересекаются в одной точке, то эту вершину обозначим через $[I]$. I назовем *конфигурационной координатой* вершины.

Лемма 2. *Наличие вершины с конфигурационной координатой I и степень этой вершины определяются функцией ранга нормальной конфигурации.*

Первое очевидно, докажем второе. Через вершину проходит n прямых, являющихся пересечениями гиперплоскостей конфигурации. Тогда степень равна числу прямых, на которых данная вершина не минимальна.

Следствия. 1. *У всех конфигураций нормального страта множества конфигурационных координат заданной степени совпадают.* 2. *Число граней данной размерности для нормальной конфигурации определяется функцией ранга.*

Для заданного нормального страта *степенью конфигурационной координаты* $I = (i_1, \ldots, i_n)$ назовем степень вершины $[I]$ конфигурации страта.

4. Базис в n-цепях и n-коцепях. Выделим ориентацию в V. Тогда пространство n-цепей конфигурации отождествляется с пространством ориентированных n-цепей (n-грань отождествляется с этой же гранью, ориентированной как V).

Коцепь конфигурации назовем *локализованной* в данной вершине, если она равна нулю на всякой грани, не входящей в звезду этой вершины.

Каждой вершине $[I]$ поставим в соответствие локализованную в ней *каноническую* n-коцепь: каноническая коцепь равна $\operatorname{sign}(\alpha_{i_n} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_n})$ на всякой n-грани, входящей в звезду и ориентированной формой $d\alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\alpha_{i_n}$. Совокупность всех канонических n-коцепей назовем *канонической системой в* n-коцепях C^n.

Лемма 3. *В нормальной конфигурации совокупность канонических коцепей всех вершин степени n образует базис в n-коцепях C^n.*

Лемма — следствие того, что в n-грани есть одна вершина степени n.

Всякий базис в C^n, состоящий из канонических коцепей, и двойственный базис в C_n назовем *специальными*. Базис в C^n, состоящий из канонических коцепей вершин степени n, и двойственный базис назовем *каноническими*. Очевидна

Лемма 4. *Пусть $\{\Delta^e\}$ — специальный базис в C^n, $\{\Delta_e\}$ — двойственный базис, Γ — n-грань. Тогда*

$$\Gamma = \sum_e \Delta^e(\Gamma)\,\Delta_e, \tag{2}$$

где суммирование идет по тем вершинам грани, чьи канонические коцепи вошли в специальный базис, все коэффициенты $\Delta^e(\Gamma)$ равны ± 1.

5. Конструкция элементов канонического базиса в n-цепях. Пусть e — вершина степени n. Определим ее каноническую цепь. Она строится индуктивно. Пусть Δ^e — каноническая коцепь вершины, Γ_e — ее отмеченная n-грань, ориентированная так, чтобы $\Delta^e(\Gamma_e) = 1$.

Шаг 1. Положим $\Delta_{e,1} = \Gamma_e$.

Шаг $i > 1$. Вершину f степени n, отличную от e, назовем неудовлетворенной, если $\Delta^f(\Delta_{e,i-1}) \neq 0$. Если нет неудовлетворенных вершин, то цепь $\Delta_{e,i-1}$ назовем канонической. Если неудовлетворенные вершины есть, положим $\Delta_{e,i} = \Delta_{e,i-1} - \Delta^f(\Delta_{e,i-1})\,\Gamma_f$, где f — максимальная из неудовлетворенных вершин.

Лемма 5. *Каноническая цепь вершины степени n совпадает с элементом канонического базиса в n-цепях, отвечающим этой вершине.*

Доказательство очевидно.

Пример 1. Для конфигурации общего положения вершины степени n — это вершины вне гиперплоскости A_1. Рассмотрим вершину $[I]$ степени n и единственный n-симплекс Γ, все грани которого лежат на $A_1 \cup A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}$. Тогда каноническая цепь вершины $[I]$ — это симплекс Γ, из которого выброшены все пересечения с гиперплоскостями конфигурации, при этом симплекс ориентирован так, что $\Delta^{[I]}(\Gamma) = 1$. Формула (2) для канонического базиса этого примера доказывает разложение (1) вне объединения гиперплоскостей конфигурации.

Пример 2. Для конфигурации рис. 2 каноническая цепь вершины g — это нижний треугольник, вершины e — это два треугольника, взятые с разными знаками.

§ 2. Канонический базис ковариантно постоянен

В этом параграфе демонстрируется принцип: когомологические объекты конфигурации, описываемые в терминах функции ранга, ковариантно постоянны в связности Гаусса — Манина над комплексификацией нормального страта.

1. Формулировка. Пусть $S = \{\alpha_{j \geqslant N}\}$ — конфигурация в $\mathbf{R}^n$. *Миражом* назовем семейство $\mathscr{S}$ конфигураций S_t, зависящих от $t = (t_1, \ldots, t_N) \in \mathbf{R}^N$, определенных формулой

$$S_t = \{\alpha_j + t_j,\ j = 1, \ldots, N\}. \tag{3}$$

Все конфигурации миража имеют единую функцию ранга, нормальные конфигурации входят в один нормальный страт. Множество $\Sigma \subset \mathbf{R}^N$ не нормальных конфигураций миража назовем *дискриминантом*.

Пусть I — конфигурационная координата степени n для соответствующего нормального страта. Для каждой нормальной конфигурации S_t миража рассмотрим элемент $\Delta_{[I]}(t)$ канонического базиса в n-цепях конфигурации, отвечающий вершине $[I]$. На $\mathbf{R}^n$ рассмотрим произвольную аналитическую дифференциальную n-форму ω_t, аналитически зависящую от $t \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 2. *Функция*

$$\int\limits_{\Delta_{[I]}(t)} \omega_t, \tag{4}$$

определенная на $\mathbf{R}^N \setminus \Sigma$, *продолжается на дискриминант до аналитической функции на* $\mathbf{R}^N$.

Следствие. *Объем элементов канонического базиса аналитически зависит от конфигурации из миража.*

Теорема доказана в п. 2.4.

2. Комплексификация. Для доказательства теоремы необходимо комплексифицировать все объекты. Конфигурация в $\mathbf{C}^n$, ее функция ранга, мираж (семейство конфигураций в $\mathbf{C}^n$, параметризованных $\mathbf{C}^N$), дискриминант миража $\Sigma \subset \mathbf{C}^N$ определяются аналогично вещественному случаю.

Пусть S — конфигурация в $\mathbf{C}^n$, $\mathscr{S}$ — ее мираж. Скажем, что конфигурация и мираж *вещественны*, если функции, составляющие конфигурацию, вещественны на $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{C}^n$. Для вещественной конфигурации в $\mathbf{C}^n$ назовем ее *действительной частью* конфигурацию в $\mathbf{R}^n$, заданную функциями $\{\alpha_j|_{\mathbf{R}^n}\}$.

Пусть $A \subset \mathbf{C}^n$ — объединение гиперплоскостей конфигурации в $\mathbf{C}^n$.

Лемма 6. *Если S — вещественная конфигурация, то* $H_k(\mathbf{R}^n;\ A \cap \mathbf{R}^n) \to H_k(\mathbf{C}^n, A)$ — *изоморфизм для любого k.*

Доказательство. Семейство отображений $h_s\colon z \mapsto \operatorname{Re} z + s \cdot i \cdot \operatorname{Im} z$, где $s \in [0, 1]$, устанавливает ретракцию $(\mathbf{C}^n, A) \to (\mathbf{R}^n, A \cap \mathbf{R}^n)$.

Видимый базис в n-цепях действительной части конфигурации S естественно порождает базис в $H_n(\mathbf{R}^n, A \cap \mathbf{R}^n)$.

Следствие. *Видимый базис действительной части порождает базис в* $H_n(\mathbf{C}^n, A)$.

3. Монодромия тривиальна. Пусть $\mathscr{S}$ — мираж в $\mathbf{C}^n$, A_t — объединение гиперплоскостей конфигурации S_t миража.

Лемма 7. *Объединение пространств* $\bigcup\limits_{t \in \mathbf{C}^N \setminus \Sigma} H_n(\mathbf{C}^n, A_t)$ *вместе с естественной проекцией на* $\mathbf{C}^N \setminus \Sigma$ *составляют локально тривиальное расслоение.*

Доказательство стандартно.

Расслоение обозначим через π. Расслоение имеет естественную связность Гаусса — Манина.

Теорема 3. *Если мираж вещественен, то монодромия расслоения тривиальна.*

Замечание. Условие вещественности можно отбросить ценой усложнения доказательств.

Доказательство. Достаточно проверить тривиальность монодромии при обходе вокруг неособой точки дискриминанта. Последнее следует из формулируемого ниже предложения 1.

Пусть $S_v = \{\alpha_j, j = 1, \ldots, N-1, \alpha_{N,v}\}$ — конфигурация, зависящая от $v \in \mathbf{C}$, у которой все гиперплоскости, кроме одной, фиксированы, а одна движется параллельно себе:

$$\alpha_j(z) = a_j^k z_k + b_j \quad \text{при} \quad j \leqslant N-1, \quad \alpha_{N,v}(z) = a_N^k z_k + v,$$

где a, b — числа, числа a вещественны. Предположим, что конфигурация $\{\alpha_j, j = 1, \ldots, N-1\}$ нормальна, конфигурация S_0 не нормальна, множество B точек, где гиперплоскости $A_1, \ldots, A_{N-1}, A_{N,0}$ пересекаются не нормально, есть $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ для некоторого $k \leqslant n$.

Предложение 1. *Монодромия в $H_n(\mathbf{C}^n, A_v)$ при обходе v вокруг $v = 0$ тривиальна.*

Доказательство. Простейший случай $k = n$, B — — точка. После переноса начала координат в B и вещественной линейной замены координат имеем $\alpha_j = z_j$, $j = 1, \ldots, n$, $\alpha_{N,v} = z_1 + \ldots + z_n + v$. Таким образом, $A_1, \ldots, A_n$ — координатные гиперплоскости.

Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ — открытое множество. Скажем, что класс из $H_n(\mathbf{C}^n, A_v)$ *хорошо представим* в D, если он представим сингулярной n-цепью, пересечение которой с D либо пусто, либо совпадает с замыканием одной из компонент связности множества $D \cap (\mathbf{R}^n \setminus (A_v \cap \mathbf{R}^n))$.

Лемма 8. *Существует окрестность D начала координат в $\mathbf{C}^n$, обладающая свойством: при всяком вещественном v, близком к нулю, существует базис в $H_n(\mathbf{C}^n, A_v)$, хорошо представимый в D.*

Доказательство легко следует из леммы 6.

Проверим тривиальность монодромии хорошо представленного класса. Пусть $D = \{z \in \mathbf{C}^n \mid |z| \leqslant \varepsilon\}$ — шар, $0 < v \ll \varepsilon \ll 1$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — вектор вида $\sigma_1 = \ldots = \sigma_k = 1$, $\sigma_{k+1} = \ldots = \sigma_n = -1$, где k — некоторое число со свойством $0 \leqslant k \leqslant n$. Положим $\Gamma_\delta(v) = \{z \in \mathbf{R}^n \mid \sigma z_1 \geqslant 0, \ldots, \sigma z_n \geqslant 0, z_1 + \ldots + z_n + v \geqslant 0\}$. Достаточно проверить тривиальность монодромии элемента $[\Gamma_\delta(v)] \in H_n(D, \partial D \cup (D \cap A_v))$. Зададим явно деформацию элемента, параметризовав цепь $\Gamma_\sigma(v)$ в окрестности начала координат n-кубом $0 \leqslant s_j \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$, а затем меняя v в формуле параметризации

$$\begin{aligned} z_j &= s_j, \ j = 1, \ldots, k, \\ z_{k+1} &= -s_{k+1}(v + z_1 + \ldots + z_k), \\ z_n &= -s_n(v + z_1 + \ldots + z_{n-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

Формула (5) доказывает предложение в случае, когда B — точка. Общий случай легко сводится к этому, так как на трансверсали к B имеем рассмотренную ситуацию.

Отметим важное следствие формул (5). При $v < 0$ *исчезающим циклом* назовем симплекс $\Delta(v) = \{z \in \mathbf{R}^n \mid z_1 \geqslant 0, \ldots, z_n \geqslant 0, z_1 + \ldots + z_n + v \leqslant 0\}$.

Лемма 9. *Пусть $0 < v \ll 1$. Класс $[\Gamma_\sigma(v)] \in H_n(D, \partial D \cup (D \cap A_v))$ в расслоении гомологий перенесем параллельно в пространство $H_n(D, \partial D \cup (D \cap A_{-v}))$. Тогда*

$$[\Gamma_\sigma(v)] \mapsto [\Gamma_\sigma(-v)] + (-1)^k [\Delta(-v)],$$

где ориентация цепей индуцирована ориентацией в $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. См. (5).

4. Каноническая коцепь ковариантно постоянна. Пусть $\mathscr{S}$ — вещественный мираж в $\mathbf{C}^n$, I — координата вершины конфигурации миража. Над дополнением к дискриминанту миража рассмотрим векторное расслоение π^* со слоем $H^n(\mathbf{C}^n, A_t)$. Определим сечение расслоения, которое обозначим через sect [I]. Для этого рассмотрим действительную часть произвольной вещественной нормальной конфигурации S_t миража. Рассмотрим каноническую коцепь $\Delta^{[I]}$, отвечающую вершине $[I]$ действительной части. Коцепь определяет элемент в $H^n(\mathbf{R}^n, A_t \cap \mathbf{R}^n)$ и, следовательно, элемент в $H^n(\mathbf{C}^n, A_t)$. В качестве $\mathrm{sect}^{[I]}$ возьмем ковариантно постоянное сечение, порожденное этим элементом.

Т е о р е м а 4. *Сечение* $\mathrm{sect}^{[I]}$ *не зависит от выбора вещественной нормальной конфигурации миража.*

Другими словами, всякая каноническая коцепь ковариантно постоянна.

Теорема 4 легко следует из леммы 9.

С л е д с т в и е 1. *Соотношения в канонической системе одинаковы для всех нормальных конфигураций миража в* $\mathbf{R}^n$ (определение канонической системы в п. 1.4).

Из следствия 1 вытекает, что соотношения в канонической системе одинаковы для всех нормальных конфигураций связной компоненты замыкания нормального страта конфигураций в $\mathbf{R}^n$.

С л е д с т в и е 2. *Справедлива теорема* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 2. Каждая каноническая коцепь ковариантно постоянна. Поэтому канонический базис в коцепях ковариантно постоянен. Следовательно, канонический базис в цепях ковариантно постоянен. Форма ω_t индуцирует аналитическое сечение расслоения π^*, поэтому интеграл (4) определяет мероморфную функцию. Очевидно, что она ограничена и потому голоморфна.

5. Приложение. Рассмотрим линейное отображение $p\colon \mathbf{R}^{n+k} \to \mathbf{R}^n$ максимального ранга. Предположим, что компактно пересечение $\Gamma_t = p^{-1}(t) \cap \cap \mathbf{R}_+^{n+k}$ слоя и положительного октанта в прообразе. В каждом слое рассмотрим конфигурацию, порожденную ограничением на слой координатных функций на $\mathbf{R}^{n+k}$. Легко видеть, что все конфигурации принадлежат одному миражу. Пусть I — конфигурационная координата вершины конфигурации этого миража. Легко видеть, что множество всех $t \in \mathbf{R}^k$, при которых Γ_t имеет вершину с координатой I,— выпуклый k-мерный конус в $\mathbf{R}^k$. Обозначим характеристическую функцию конуса через $\chi_I\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$. Множество всех конфигурационных координат степени n для нормальных конфигураций миража обозначим через J.

Т е о р е м а 5 (И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский [3]). *Пусть* ω — *аналитическая дифференциальная* n*-форма на* $\mathbf{R}^{n+k}$. *Рассмотрим функцию* $\Phi(t) = \int\limits_{\Gamma_t} \omega$. *Тогда существуют аналитические функции* $\Phi_I\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, $I \in J$, *для которых* $\Phi = \sum\limits_{I \in J} \chi_I \Phi_I$.

Теорема 5 — следствие теоремы 2, если в качестве Φ_I взять с правильным знаком $\int\limits_{\Delta_{[I]}} \omega$, где $\Delta_{[I]}$ — элемент канонического базиса в цепях конфигурации слоя.

З а м е ч а н и е. Настоящая статья — результат продумывания доклада А. В. Зелевинского о теореме 5.

§ 3. Комбинаторная связность

В настоящем параграфе определена комбинаторная связность — отождествлены цепи нормальных конфигураций миража. Ее интуитивное определение состоит в следующем. Произвольный координатный октант, исходящий из вершины одной нормальной конфигурации, отождествляется с соответствующим октантом другой. Далее отождествление продолжается по линейности. Можно проверить, что ограниченные цепи переходят в ограниченные.

П р и м е р. Мираж, состоящий из пар точек e, f на прямой. Конфигурация нормальна, если точки различны. Пространство цепей трехмерно, порождается точками и открытым отрезком l, их соединяющим. При перестановке точек комбинаторная связность переставляет нульмерные образующие, открытый отрезок переводит в замкнутый с противоположным знаком: $e \mapsto f$, $f \mapsto e$, $l \mapsto -e - l - f$.

Сначала определяется базис в пространстве цепей и аналог разложения (1). Затем формализуется понятие комбинаторной связности и приводятся ее свойства.

1. Коцепи системы координат. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_n \colon V \to \mathbf{R}$ — система аффинных координат в аффинном пространстве, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — вектор с координатами $0, 1, -1$. *σ-октантом* назовем множество $V_\delta = \{v \in V \mid \beta_j(v) = 0$, если $\sigma_j = 0$, $\beta_j(v)\,\sigma_j > 0$, если $\sigma_j \neq 0\}$. σ-октант назовем *неотрицательным*, если σ имеет неотрицательные координаты. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — вектор, у которого одна координата $*$, а другие $0, 1, -1$. *σ-углом* назовем множество $V_\sigma = \{v \in V \mid \beta_j(v) = 0$, если $\sigma_j = 0$, $\beta_j(v)\,\sigma_j > 0$, если $\sigma_j = \pm 1\}$.

Пространством *цепей* системы координат назовем векторное пространство линейных комбинаций октантов с вещественными коэффициентами. Цепь назовем *неотрицательной*, если она является линейной комбинацией неотрицательных октантов. Пространством *коцепей* назовем пространство линейных функций на цепях. *Косой* коцепью назовем коцепь, равную нулю на любом σ-угле.

П р и м е р. Для одномерного пространства V октантов три: V_0, V_1, V_{-1}. Пусть V^0, V^1, V^{-1} — двойственные коцепи. Тогда пространство косых коцепей двумерно и порождено $K^1 = V^1 - V^0$, $K^0 = V^0 - V^{-1}$.

Для всякого вектора $\delta = (\delta^1, \ldots, \delta^n)$ с координатами $0, 1$ обозначим через K^δ косую коцепь $K^{\delta_1} \otimes \ldots \otimes K^{\delta_n}$, равную на σ-октанте нулю, если хотя бы одна координата вектора $\delta - \sigma$ не равна 0 или 1, в противном случае равную 1 или -1 в зависимости от четности или нечетности числа единиц среди координат вектора $\delta - \sigma$. Коцепь K^δ назовем *стандартной*.

Л е м м а 10. 1. *Всякая коцепь на подпространстве неотрицательных цепей однозначно продолжается до косой коцепи.*

2. *Стандартные коцепи составляют базис в пространстве, двойственном к пространству неотрицательных цепей. Двойственный базис в пространстве неотрицательных цепей составляют цепи $K_\delta = \{v \in V \mid v_j \geqslant 0$, если $\delta_j = 0$, $v_j > 0$, если $\delta_j = 1\}$.*

3. *Совокупность всех стандартных коцепей составляет базис в пространстве косых коцепей.*

Доказательство несложно.

Коцепь K^δ назовем *ассоциированной* с координатным подпространством в V, заданным уравнениями $\beta_j = 0$, $j \in J$, если у вектора δ координаты $\delta_j = 1$ при $j \in J$.

2. Косые коцепи конфигурации. Выделим ориентацию пространства V. Рассмотрим нормальную конфигурацию $\{\alpha_{j \leqslant N}\}$ в V. Индексом согласования вершины $[I]$, $I = (i_1, \ldots, i_n)$, $i_1 < \ldots < i_n$, назовем число ε_I, равное 1 или -1 в зависимости от согласования или несогласования выделенной ориентации и ориентации, заданной формой $d\alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\alpha_{i_n}$. С вершиной $[I]$ связана система координат $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}$ в V. Коцепи системы координат естественно отображаются в коцепи конфигурации, локализованные в $[I]$. Коцепь, локализованную в вершине, назовем *косой*, если она служит образом косой коцепи системы координат. *Стандартной* коцепью вершины назовем образ стандартной коцепи системы координат, умноженный на индекс согласования вершины. Через $K^{\delta, I}$ обозначим стандартную коцепь вершины I, полученную из стандартной коцепи K^δ системы координат.

Примером косой коцепи служит каноническая коцепь вершины, определенная в п. 1.4.

Совокупность всех стандартных коцепей назовем *стандартной системой* в пространстве коцепей конфигурации.

Аффинным подпространством, выделенным в вершине, назовем наименьшее аффинное подпространство, содержащее отмеченную грань вершины. Пару δ, I назовем *выделенной*, если коцепь K^δ системы координат $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}$ ассоциирована с аффинным подпространством, выделенным в вершине I. В этом случае коцепь $K^{\delta, I}$ назовем *выделенной*.

Лемма 11. *Совокупность всех выделенных стандартных коцепей составляет базис в пространстве коцепей нормальной конфигурации.*

Лемма 11 — аналог леммы 3 — легко следует из леммы 10. Базис, указанный в лемме 11, и двойственный базис в цепях конфигурации назовем *стандартными*. Элементы стандартного базиса в цепях назовем *стандартными цепями*.

Лемма 12. 1. *Пусть* $\{K^{\delta, I}\}$ — *стандартный базис в коцепях*, $\{K_{\delta, I}\}$ — *двойственный базис в цепях*, Γ — *грань конфигурации. Тогда*

$$\Gamma = \sum_I \sum_\delta K^{\delta, I}(\Gamma)\, K_{\delta, I}, \tag{6}$$

где первое суммирование идет по вершинам грани, второе — по стандартным коцепям, выделенным в вершине. Все коэффициенты $K^{\delta, I}$ (Γ) *равны* 0, 1, —1.

2. *Если* Γ — k-*мерная грань, то в формуле* (6) *для каждого* I *не более* 2^{n-k} *отличных от нуля коэффициентов.*

П.1 леммы очевиден, п.2 — следствие п.3 леммы 10. Дальнейшие свойства стандартных цепей см. в п. 3.7.

Пример. Для конфигурации общего положения вершина степени k — это вершина в $A_1 \cap \ldots \cap A_{n-k}$ вне $A_1 \cap \ldots \cap A_{n-k+1}$, т. е. вершина с конфигурационной координатой $I = (1, 2, \ldots, n-k, i_{n-k+1}, \ldots, i_n)$, где $i_{n-k+1} > n-k+1$. В этой вершине выделены стандартные коцепи $K^{\delta, I}$ с произвольным δ вида $(1, \ldots, 1, \delta_{n-k+1}, \ldots, \delta_n)$. Стандартные цепи $K_{\delta, I}$ — это k-симплексы с вершиной в $[I]$ и основанием на $A_1 \cap \ldots \cap A_{n-k+1}$. Каждый k-симплекс задан $k+1$ линейными неравенствами, часть из которых строгие, а остальные нестрогие. Основание симплекса принадлежит или не принадлежит симплексу в зависимости от того, с какой стороны от $A_1 \cap \cap \ldots \cap A_{n-k+1}$ лежит симплекс, принадлежность симплексу боковых граней определяется числами $\delta_{n-k+1}, \ldots, \delta_n$. Формула (6) в случае n-грани, не имеющей общих точек с A, принимает вид формулы (1). Доказательство этих утверждений очевидно.

3. Комбинаторная связность в коцепях. Рассмотрим мираж конфигураций в n-мерном аффинном пространстве V. Определим изоморфизм Iso пространств коцепей нормальных конфигураций миража условием: изоморфизм переводит стандартный базис в коцепях одной нормальной конфигурации в стандартный базис в коцепях другой. Этот изоморфизм и двойственный изоморфизм пространств цепей нормальных конфигураций миража назовем *комбинаторной связностью*.

Теорема 6. Iso *сохраняет стандартную систему в коцепях нормальной конфигурации* (*всякую коцепь* $K^{\delta, I}$ *переводит в коцепь* $K^{\delta, I}$).

Доказательство см. в п. 3.5.

4. Удачный многогранник и его параллельные переносы. Независимо определим двойственную связность в цепях. Для этого введем понятие удачного многогранника. Рассмотрим в V семейство конфигураций $S_v = \{\alpha_{j, v}, j \leqslant N\}$, зависящих от параметра $v \in \mathbf{R}$ и имеющих единую функцию ранга. Гиперплоскость с номером j конфигурации S_v обозначим через $A_{j, v}$. Предположим, что $v = 0$ — изолированная точка множества значений параметра v, при которых конфигурация не нормальна.

Временно, в этом и следующем пунктах, будем рассматривать не только ограниченные грани конфигурации, определенные в п. 1.2, но и неограниченные грани, специально это оговаривая.

Пусть $0 < \varepsilon \ll 1$. Рассмотрим выпуклый k-мерный (быть может, неограниченный) замкнутый многогранник, лежащий в пересечении $n - k$ гиперплоскостей конфигурации $S_{-\varepsilon}$, граница которого лежит в объединении $(n - k + 1)$-кратных пересечений гиперплоскостей из $S_{-\varepsilon}$.

Скажем, что многогранник *удачный* (*удачно деформируется*), если определяемая ниже конфигурация S_v^0, зависящая от параметра v, нормальна в окрестности определяемого ниже множества Γ_v, зависящего от параметра v, при всех $v \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. А именно, пусть многогранник лежит в $A_{j_1, -\varepsilon} \cap \ldots \cap A_{j_{n-k}, -\varepsilon}$ где $(j_1, \ldots, j_{n-k}) \subset (1, \ldots, N)$. Пусть p — число $(k - 1)$-мерных граней многогранника. Пусть многогранник выделяется в указанном $(n - k)$-кратном пересечении неравенствами $\alpha_{h_1, -\varepsilon} \geqslant 0, \ldots, \alpha_{h_s, -\varepsilon} \geqslant 0$, $\alpha_{h_{s+1}, -\varepsilon} \leqslant 0, \ldots, \alpha_{h_p, -\varepsilon} \leqslant 0$, где $1 \leqslant s \leqslant p$, $(h_1, \ldots, h_p) \subset (1, \ldots, N) \setminus (j_1, \ldots, j_{n-k})$. В качестве конфигурации S_v^0 возьмем конфигурацию, образованную на $A_{j_1, v} \cap \ldots \cap A_{j_{n-k}, v}$ ограничением линейных функций $\alpha_{h_1, v}, \ldots, \alpha_{h_p, v}$. В качестве множества Γ_v возьмем подмножество в $A_{j_1, v} \cap \ldots \cap A_{j_{n-k}, v}$, выделенное неравенствами $\alpha_{h_1, v} \geqslant 0, \ldots, \alpha_{h_s, v} \geqslant 0$, $\alpha_{h_{s+1}, v} \leqslant 0, \ldots, \alpha_{h_p, v} \leqslant 0$.

Если многогранник удачный, определим его параллельный перенос из конфигурации $S_{-\varepsilon}$ в конфигурацию S_ε, взяв в качестве перенесенного многогранника множество Γ_ε.

П р и м е р ы. 1. Всякий замкнутый координатный октант произвольной вершины конфигурации $S_{-\varepsilon}$ — удачный многогранник. 2. Замкнутая грань удачного многогранника удачна.

Л е м м а 13. *Пусть $v \in [-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon]$, I — конфигурационная координата вершины конфигурации S_v, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — вектор с координатами 0, 1. Рассмотрим значение стандартной коцепи $K^{\delta, I}$ конфигурации S_v на многограннике Γ_v, рассматриваемом как цепь конфигурации S_v. Тогда это значение не зависит от v.*

Доказательство очевидно.

5. Комбинаторная связность в цепях. Рассмотрим мираж конфигураций в V. Мираж параметризован пространством $\mathbf{R}^N$, где N — число гиперплоскостей в конфигурациях. Пусть $\Sigma \subset \mathbf{R}^N$ — дискриминант миража. Над $\mathbf{R}^N \setminus \Sigma$ рассмотрим вещественное векторное расслоение со слоем — пространством цепей соответствующей конфигурации. В слое имеется естественная целочисленная структура.

Над каждой компонентой связности базы $\mathbf{R}^N \setminus \Sigma$ определим параллельный перенос в слоях как единственный перенос, сохраняющий целочисленную структуру.

Рассмотрим кривую, проходящую из одной компоненты связности в другую через неособую точку дискриминанта. Определим в этом случае изоморфизм слоя над начальной точкой кривой и слоя над конечной точкой.

При изменении параметров конфигурации вдоль такой кривой в конфигурации происходит простейшее вырождение. Опишем его. Рассмотрим в V линейную систему координат $z_1, \ldots, z_n$ и конфигурацию $S_v = \{\alpha_j, j = 1, \ldots, N - 1, \alpha_{N, v}\}$, зависящую от параметра $v \in \mathbf{R}$, у которой все гиперплоскости, кроме одной, фиксированы, а одна движется параллельно себе: $\alpha_j(z) = a_j^k z_k + b_j$ при $j \leqslant N - 1$, $\alpha_{N, v}(z) = a_N^k z_k + v$, где a, b — числа. Предположим, что конфигурация $\{\alpha_j, j = 1, \ldots, N - 1\}$ нормальна, конфигурация S_0 не нормальна, множество B точек, где гиперплоскости $A_1, \ldots, A_{N-1}, A_{N, 0}$ пересекаются не нормально, есть $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ для некоторого $k \leqslant n$. Определим изоморфизм пространства цепей конфигурации $S_{-\varepsilon}$ в пространство цепей конфигурации S_ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Для удачных многогранников изоморфизм определим как параллельный перенос из п. 3.4. На произвольные цепи изоморфизм распространим по линейности. Корректность определения обосновывает

Лемма 14. 1. *Всякая грань конфигурации $S_{-\varepsilon}$ есть линейная комбинация удачных многогранников.*

2. *Образ ограниченной грани — линейная комбинация ограниченных граней.*

3. *Образ k-мерной грани — линейная комбинация граней размерности не больше k.*

Доказательство. Для доказательства п. 1 достаточно непосредственно проверить заключение пункта для многогранников $\Gamma_\sigma(v)$, определенных в п. 2.3. П.2 разбирается аналогично. П.3 очевиден.

Лемма 15. *Определенное в этом пункте отображение сохраняет значения стандартных коцепей и, следовательно, является изоморфизмом.*

Лемма 15 — следствие леммы 13.

Следствия. 1. *Определенный в настоящем пункте изоморфизм двойствен изоморфизму* Iso, *определенному в п.* 3.3. 2. *Справедлива теорема* 6.

Назовем эйлеровой характеристикой k-грани число $(-1)^k$, эйлерову характеристику цепи определим по линейности.

Лемма 16. *Комбинаторная связность сохраняет эйлерову характеристику.*

Доказательство очевидно.

6. Пример параллельного переноса. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ нормальную конфигурацию $S_0 = \{\alpha_{j\leqslant N}\}$ и ее n-мерную грань Δ. Рассмотрим новую конфигурацию $S_1 = \{\alpha_j - 2\alpha_j(0),\ j = 1, \ldots, N\}$. S_0, S_1 лежат в одном мираже. Гиперплоскости конфигурации S_1 получены из гиперплоскостей конфигурации S_0 отражением в начале координат. Обозначим через Δ^* замыкание многогранника, полученного из Δ отражением в начале координат.

Теорема 7. *Параллельный перенос в комбинаторной связности открытого многогранника Δ из конфигурации S_0 в конфигурацию S_1 дает замкнутый многогранник $(-1)^n\,\Delta^*$.*

Доказательство. На этих многогранниках одинаковы значения соответствующих стандартных коцепей.

7. Свойства стандартных цепей.

Теорема 8. 1. *Всякая стандартная цепь $K_{\delta,I}$ лежит в аффинном подпространстве, выделенном в вершине $[I]$.*

2. *Пусть задан мираж в V. Пусть $I = (i_1, \ldots, i_n)$ — конфигурационная координата. Тогда в мираже найдется нормальная конфигурация со следующим свойством. Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, для которого пара δ, I выделена, стандартная цепь $K_{\delta,I}$ есть k-мерный выпуклый многогранник, лежащий в аффинном подпространстве, выделенном в вершине $[I]$. В этом подпространстве $K_{\delta,I}$ задан линейными неравенствами, часть из которых строгие, а остальные нестрогие, при этом число неравенств равно числу $(k - 1)$-мерных граней многогранника. Для двух разных δ симметрическая разность соответствующих многогранников $(k - 1)$-мерна.*

Таким образом, для любой нормальной конфигурации элементы стандартного базиса в цепях — это выпуклые многогранники, ковариантно преобразованные комбинаторной связностью.

Доказательство. П.1 — следствие п. 2. П.2 доказывается индукцией по n. Если $I = (1, i_2, \ldots, i_n)$, то $K_{\delta,I}$ лежит в A_1 и теорема следует из предположения индукции. Пусть $[I]$ лежит вне A_1. Пусть W — наибольшее координатное подпространство в $[I]$, параллельное A_1. Используя утверждение теоремы для миража, высеченного на W, нетрудно показать существование нормальной конфигурации, для которой $K_{\delta,I}$ — требуемый многогранник. При этом $K_{\delta,I}$ устроен как прямое произведение симплекса размерности codim W и многогранника в W.

8. Целые точки. Целочисленным объемом грани конфигурации в $\mathbf{R}^n$ назовем количество точек грани, имеющих целочисленные координаты. Целочисленный объем цепи определим по линейности. Рассмотрим мираж в $\mathbf{R}^n$ и ковариантно постоянную цепь в нормальных конфигурациях миража.

Теорема 9 (совместно с А. Г. Хованским). *Целочисленный объем цепи в целочисленных конфигурациях миража является значением единого подходящего многочлена на мираже.*

Доказательство основано на [9] и будет приведено в другой статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aomoto K.* On the Structure of Integrals of Power Product of Linear Functions // Sc. Papers of the College of General Eduction. Univ. of Tokio.—1977. V. 27.— P. 49—61.
2. *Gelfand I. M., MacPherson R.* Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm // Adv. in Math.—1982. V. 44, № 3.— P. 279—312.
3. *Гельфанд И. М., Зелевинский А. В.* Алгебраические и комбинаторные аспекты общей теории гипергеометрических функций // Функцион. анализ и его прил.—1986. Т. 20, № 3.— С. 17—34.
4. *Гельфанд И. М.* Общая теория гипергеометрических функций // ДАН СССР.—1986. Т. 288, № 1.— С. 14—18.
5. *Гельфанд И. М., Гельфанд С. И.* Обобщенные гипергеометрические уравнения // ДАН СССР.—1986. Т. 288, № 2.— С. 279—283.
6. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах // Совр. пробл. мат. (ВИНИТИ).—1980. Т. 16.— С. 53—226.
7. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Теорема двойственности для общих гипергеометрических функций // ДАН СССР.— 1986. Т. 289, № 1.— С. 19—23.
8. *Васильев В. А., Гельфанд И. М., Зелевинский А. В.* Поведение общих гипергеометрических функций в комплексной области // ДАН СССР.— 1986. Т. 290, № 2.— С. 277—281.
9. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функцион. анализ и его прил.— 1977. Т. 11, № 4.— С. 56—67.

Институт нефтехимической
и газовой промышленности
им. И. М. Губкина

Поступило в редакцию
1 сентября 1986 г.