Л. И. Хедберг, V. P. Havin, N. K. Nikolski, eds. Complex analysis, operator theory and related topics: the S. A. Vinogradov memorial volume, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 4, 229–237

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 4

РЕЦЕНЗИИ

V. P. HAVIN, N. K. NIKOLSKI, EDS. COMPLEX ANALYSIS, OPERATOR THEORY AND RELATED TOPICS: THE S. A. VINOGRADOV MEMORIAL VOLUME

Рецензируемое издание — сборник статей, посвященный памяти Станислава Александровича Виноградова, ведущего члена Санкт-Петербургского семинара по анализу, умершего в 1997 г. в возрасте 56 лет. Редакторы тома В. П. Хавин и Н. К. Никольский были его близкими друзьями: первый — его бывшим учителем, а второй — товарищем по студенческим годам. Помимо научных работ, том содержит написанную редакторами вводную статью о жизни С. А. Виноградова и о его математическом творчестве, а также не публиковавшиеся ранее автореферaты его кандидатской и докторской диссертаций, переведенные В. П. Хавиным на английский язык.

С. А. Виноградов родился в Ленинграде 1 мая 1941 года. Нет необходимости напоминать российским читателям журнала о нападении фашистской Германии 22 июня того же года и о последовавшей за этим девятисотдневной блокаде Ленинграда, за время которой большая часть населения города умерла от голода. Отец Станислава Александровича погиб на фронте, но матери удалось выжить в Ленинграде и уберечь ребенка в военные и тяжелые послевоенные годы. Краткое, но волнующее описание этих событий дано в прекрасном биографическом очерке, которым начинается вводное эссе. Затем его авторы переходят к глубокому и содержательному обсуждению математических достижений С. А. Виноградова, их предыстории и их влияния на развитие той области анализа, которой он занимался. Дополняют это обсуждение два хороших обзора виноградовских результатов, полученных до 1983 г., написанные им самим.

Однако я не могу говорить о работе Станислава Александровича, не упомянув об интеллектуальном окружении, в котором она проходила, в особенности потому, что редакторы не акцентируют на этом внимания. Когда будет написана история российской математики второй половины двадцатого века, Санкт-Петербургский семинар по анализу заслуженно займет в ней особое место. Он был основан в начале 60-х годов В. П. Хавиным, в то время молодым доцентом, для нескольких студентов, в том числе Никольского и Виноградова. Через несколько лет к Хавину присоединился Никольский, и семинар разросся до такой степени, что в середине восьмидесятых насчитывал от 40 до 50 активных участников, удивительно многие из которых теперь стали математиками с мировым именем. Говоря словами Ж.-П. Кахана из его статьи в настоящем издании: „Грустно видеть, как рассеялась по всему миру великолепная школа, к которой принадлежал [Виноградов]. С другой стороны, никогда ленинградская школа анализа не была более известна, чем сейчас, и именно по той причине, что ее представители присутствуют повсюду".

Чем же объясняется такой успех? Сторонний наблюдатель может предположить, что тому было несколько причин: сохранение в математике и других областях умственной деятельности дореволюционных традиций Санкт-Петербурга, воплощенных такими учеными, как В. И. Смирнов; способность советского режима, несмотря на многочисленные его провалы, поддерживать систему образования, в которой воспитывалась интеллектуальная элита; личность Виктора Хавина; то, что он очень рано смог привлечь таких замечательных студентов, как Никольский и Виноградов, за которыми вскоре последовали С. В. Хрущёв, В. В. Пеллер, Н. А. Широков и многие другие.

Такова была среда, в которой Виноградов стал математиком и провел всю свою математическую жизнь. По этой причине его собственное влияние выходит далеко за рамки опубликованных им работ. Редакторы указывают в своем эссе, что помимо официального руководства шестью аспирантами он работал постоянно и без формальностей с половиной членов семинара, и многие из его важных достижений рассеяны по статьям его друзей. Кроме того, он никогда не стремился к публикациям в престижных журналах; бóльшая часть результатов, полученных им, появилась в „Записках" Ленинградского отделения Института Стеклова, не слишком широко известных в первые годы.

Другая поразительная, по меньшей мере для рецензента, черта — значение шведской математической школы, в особенности Л. Карлесона, для работы С. А. Виноградова и других членов семинара (это видно и по статьям, составляющим том). Человек неосведомленный мог бы предположить, что между Санкт-Петербургом и соседней с ним Швецией в шестидесятых и семидесятых годах существовал постоянный обмен визитами. В действительности контактов между членами семинара и шведскими математиками не было до начала семидесятых, а затем долгое время они были скудны. Лишь в середине восьмидесятых некоторым членам семинара были разрешены поездки на Запад, а для тех из них, за которыми числились какие-либо „недостатки", например еврейство, это произошло еще позже. Даже переписка была почти невозможной из-за абсурдных правил безопасности. Виноградов посетил Швецию в 1990 г.; вторая поездка была запланирована на июнь 1996 года, но ей помешали первые признаки болезни, которая оказалась смертельной.

В основе значительной части исследований С. А. Виноградова лежит проблема „свободной интерполяции“ (термин, по-видимому, обязан своим появлением семинару). Это — общее понятие, не имеющее точного определения, но объединяющее ряд различных задач. Оно в подробностях рассматривается в редакторском эссе, а также в автореферате докторской диссертации Виноградова, озаглавленной „Свободная интерполяция в пространствах аналитических функций“.

Достаточно простым примером здесь служит теорема Рудина–Карлесона. Пусть A — пространство голоморфных в круге $\mathbb{D}$ функций, допускающих непрерывное продолжение на замкнутый круг $\overline{\mathbb{D}}$. Если K — компактное подмножество границы $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$, то каждая непрерывная функция на K может быть продолжена до функции из пространства A тогда и только тогда, когда мера Лебега множества K равна нулю, и тогда о пространстве непрерывных функций $C(K)$ говорят, что оно свободно интерполируется пространством A. Виноградов совместно с Хрущёвым детально изучил то, как эта теорема переносится на гораздо более сложный случай голоморфных функций на круге $\mathbb{D}$ с равномерно сходящимися рядами Тейлора (пионерский результат в этом контексте принадлежит Д. Оберлину).

Другой пример — это знаменитая теорема Карлесона 1958 г. об интерполяции. Если F — замкнутое подмножество круга $\mathbb{D}$, то в общем случае нельзя сказать ничего конкретного о пространстве $H^\infty|_F$ сужений на F ограниченных аналитических функций в круге $\mathbb{D}$, только очень специальные функции на множестве F имеют продолжение до функции из $H^\infty(\mathbb{D})$. Но когда последовательность F становится достаточно редкой, точнее, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет так называемому условию Карлесона–Ньюмэна, такое продолжение возможно для любой ограниченной функции на F, и о пространстве $l^\infty(F)$ говорят, что оно свободно интерполируется пространством $H^\infty(\mathbb{D})$. Среди других многочисленных результатов (частью полученных в сотрудничестве с Хавиным) Виноградов нашел новое доказательство теоремы Карлесона, основанное на том, что теперь известно под названием „критерий Виноградова–Сеничкина“ ограниченности некоторых интегральных операторов.

Отчасти вдохновленный доказательством Виноградова, П. Кусис предоставил для настоящего издания интересный способ вывода теоремы Карлесона из классической теоремы Пика об интерполяции на конечном множестве точек. Мысль о таком доказательстве, несомненно, приходила в голову многим, но, по-видимому, предыдущие попытки завершились неудачей.

Свободная интерполяция, на этот раз для аналитических классов Гёльдера, также рассматривается в работе бывшего ученика Виноградова А. М. Коточигова.

В силу двойственности, задачи свободной интерполяции тесно связаны с оценками для операторов вложения. Действительно, исходное доказательство теоремы Карлесона об интерполяции основано на его же фундаментальной теореме вложения, которая дает прозрачное геометрическое описание положительных мер μ в круге $\mathbb{D}$, для которых пространство Харди $H^p(\mathbb{D})$ вложено в пространство $L^p(\mu)$. Условие, не зависящее от p при $0 < p < \infty$, попросту состоит в том, что существует константа C такая, что $\mu(B(x,r) \cap \mathbb{D}) \leqslant Cr$ для всех кругов $B(x,r)$ с центром $x \in \partial\mathbb{D}$ и радиусом $r > 0$. Меры с этим свойством обычно называются мерами Карлесона. Если точную нижнюю границу таких постоянных C обозначить через $\|\mu\|_C$, то существует константа C_p такая, что $\|f\|_{L^p(\mu)} \leqslant C_p \|\mu\|_C \|f\|_{H^p}$ для всех $f \in H^p$.

Отвечая на вопрос Виноградова, И. Вербицкий доказывает карлесоновскую оценку для $L^p(\mu)$-нормы интегралов Пуассона в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ с константой C_p, не зависящей от размерности n при $p > 2$. Рассуждения напоминают виноградовское доказательство для $p = 2$, но в этом случае постоянная в неравенстве зависит от размерности. Идея состоит в том, чтобы заменить неравенство на не зависящую от размерности оценку слабого типа для $p = 2$, а затем использовать интерполяционную теорему Марцинкевича. Вопрос в случае $1 < p \leqslant 2$ по-прежнему остается открытым.

Рассмотрим какое-нибудь пространство функций, аналитических в круге $\overline{\mathbb{D}}$ и непрерывных в $\overline{\mathbb{D}}$, граничные значения которых удовлетворяют тому или иному условию гладкости. Замкнутое множество $E \subset \partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$ называется множеством Карлесона, если $L(E) = -\int_{\mathbb{T}} \log \operatorname{dist}(t, E)\,dt = \infty$. Начиная со знаменитой статьи Карлесона 1952 г., для большого количества таких пространств было доказано, что граничные множества единственности совпадают с множествами Карлесона. Следовательно, если E — множество Карлесона, то можно говорить о восстановлении функции f, априори лежащей в таком пространстве, по ее значениям на множестве E. Кроме того, если множество E не является множеством Карлесона, а функция f обращается в нуль на E, можно интересоваться оценками для $|f(z)|$ во внутренних точках в терминах величины $L(E)$ так, чтобы при $L(E) \to \infty$ из таких оценок вытекала единственность. К этим задачам обращается в своей статье И. В. Виденский и решает их в условиях, охватывающих многие пространства типа Харди и Бесова. Доказательство опять основано на теореме вложения Карлесона. Идея такой формулы восстановления восходит к Т. Карлеману (1926) и была разработана Г. М. Голузиным и Н. В. Крыловым в 1933 г.

В силу классической оценки Харди и Литтлвуда пространство $H^p(\mathbb{D})$, $p > 1$, вкладывается в L^q-пространство (весовое пространство Бергмана) с весом $(1-|z|)^\alpha$, $\alpha > -1$, если $q = p(2+\alpha)$. В элегантной статье, опубликованной посмертно, Е. М. Дынькин доказал, что эта теорема допускает обращение для рациональных функций фиксированной степени, полюса которых находятся за пределами единичного круга. В качестве следствий, из этого результата получаются еще несколько обратных оценок. Например, если обычное пространство Соболева в круге $\mathbb{D}$ обозначить через $W_q^1(\mathbb{D})$, то рациональные функции r степени n удовлетворяют следующему неравенству при $p > 2$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$, причем показатель $\frac{1}{2}$ точный:

$$\|r\|_{W_q^1(\mathbb{D})} \leqslant Cn^{1/2}\|r\|_{L^p(\mathbb{D})}.$$

Для доказательства используются неожиданно сложные средства, в частности карлесоновская конструкция из теоремы о короне.

Пространства Бергмана в более общих областях рассматриваются в статье В. Л. Олейника, который приводит условия типа карлесоновских на меры μ, обеспечивающие вложение L^p-пространств гармонических и аналитических функций со степенным весом в $L^q(\mu)$.

Подпространства пространств Харди, инвариантные относительно оператора сдвига, привлекают большое внимание с тех пор, как А. Берлинг в 1949 г. описал их как пространства $\theta H^p = \{\theta f : f \in H^p\}$, где θ — произвольная внутренняя функция. Две работы из настоящего собрания посвящены подпространствам в H^p, инвариантным относительно оператора обратного сдвига (их называют иногда коинвариантными, а иногда — $(*)$-инвариантными). Эти пространства тоже связаны с внутренними функциями, и для них естественно обозначение $\theta^* H^p$. Статья А. Б. Александрова представляет собой первую часть исследования теорем о карлесоновском вложении для коинвариантных подпространств в H^p при $p > 0$. (Вторая часть вышла в томе 262 „Записок“ (1999).) Главная задача состоит в изучении классов $C_p(\theta)$ мер μ таких, что $\int_{\mathbb{D}} |f|^p d\mu < \infty$ при любых $f \in \theta^* H^p$. Класс мер Карлесона, очевидно, содержится во всех $C_p(\theta)$; среди прочего в статье обсуждается необходимое и достаточное условие равенства в этом включении.

В своей статье К. М. Дьяконов характеризует те ковариантные подпространства $\theta^*(H^p)$ (на прямой), которые непрерывно или компактно вложены в пространства L^q, $1 < p < q < \infty$, BMO или C_0.

Работа, предоставленная С. Хукович, С. Трейлем и А. Вольбергом, посвящена строгим двусторонним оценкам $L^2(\mathbb{R}, \omega)$-нормы квадратичной функции Лузина в терминах A_2-„нормы“ Мукенхаупта весовой функции w. Доказательство еще раз иллюстрирует важность подхода, связанного с „функцией Беллмана“, который и прежде применялся авторами этой статьи и Ф. Назаровым. См., например, необычно живо написанную статью Ф. Назарова и С. Трейля под названием „Охота на функцию Беллмана и приложения к оценкам сингулярных интегральных операторов и к другим классическим задачам гармонического анализа“, вышедшую в т.8 настоящего журнала (1996), но не указанную в списке литературы к статье, о которой сейчас идет речь.

Виноградов также внес вклад в решение задачи о делении на внутренние функции, т.е. задачи о том, в какой мере внешний множитель во внешне-внутренней факторизации аналитической функции f на $\mathbb{D}$ сохраняет свойства функции f. Н. А. Широков много писал об этом, и здесь в своей статье он полностью характеризует внешние функции, содержащиеся в пространствах аналитических функций на $\mathbb{D}$, граничные значения которых принадлежат классам („еще одному классу“), обобщающим хорошо известные пространства Зигмунда гладких функций. Этот случай, по-видимому, был достаточно неподатлив, и доказательство представляет собой технический подвиг.

Ф. А. Шамоян и Е. Н. Шубабко изучают классы N_α, $\alpha > 0$, голоморфных функций в круге $\mathbb{D}$ таких, что их характеристика Неванлинны оценивается сверху величиной $(1-r)^{-\alpha}$. Классический результат Р. Неванлинны состоит в том, что класс N_0 можно охарактеризовать с помощью факторизации, включающей произведения Бляшке. Авторы доказывают, что существует похожая характеристика классов N_α, в которую входят модифицированные произведения Бляшке. Как следствие, полностью описаны множества нулей классов N_α.

В известной статье Б. Коренблюма 1975 г. в Acta Mathematica исследуются пространства $A^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, аналитических функций f на $\mathbb{D}$ таких, что $\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|)^\alpha|f(z)| < \infty$, и описываются множества нулей таких функций в терминах некоторой функции плотности. Однако здесь оставался пробел между необходимым и достаточным условиями. Позже К. Сейпу удалось усовершенствовать методы Коренблюма и заполнить этот пробел, используя более точные граничные теоремы об искажении для конформных отображений. Статья Коренблюма в рецензируемом томе содержит замкнутое в себе изложение теории указанных нуль-множеств, которое основано на иной технике, не зависящей от оценок конформных отображений. (Рецензент обнаружил опечатку в формуле (1.2); см. выше определение пространства $A^{-\alpha}$.)

В работе С. Шиморина исследуются свойства воспроизводящих ядер гильбертовых пространств в круге. Такие ядра разлагаются в двойной степенной ряд $K(z,w) = \sum_{m,n\geqslant 0} K_{m,n} z^m \bar{w}^n$, коэффициенты которого образуют положительно-определенную матрицу. Обозначим соответственно через σ и σ^* операторы прямого и обратного сдвига на матрицах коэффициентов; в терминах самих функций K определение выглядит так:

$$(\sigma K)(z,w) = z\bar{w} \sum_{m,n\geqslant 0} K_{m,n} z^m \bar{w}^n.$$

Основной результат дает описание пространств, для которых ядра $(I-\sigma)^k K$ или $(I-\sigma^*)^k K$ тоже оказываются воспроизводящими. Результаты применяются к пространствам Дирихле и Бергмана.

И. В. Островский получает новую информацию, касающуюся недавно открытого эффекта: некоторые условия на аргументы нулей остатков степенных рядов влекут за собой ограничения на рост соответствующих аналитических функций.

Гармонические дифференциальные формы являются естественным n-мерным обобщением аналитических функций комплексной переменной. Е. Малинникова распространяет теорему Адамара о трех кругах на L^2- и L^∞-нормы гармонических p-форм в области между двумя концентрическими сферами.

В нескольких работах С. А. Виноградова рассматривалось пространство l^p_A голоморфных в $\mathbb{D}$ функций, коэффициенты Тейлора которых лежат в l^p. В частности, изучались задачи о свободной интерполяции и мультипликаторах. Его работа по мультипликаторам продолжена в статье, предоставленной В. В. Лебедевым для настоящего издания.

В. Мазья и Т. Шапошникова продолжают свои исследования операторов умножения между пространствами функций. В настоящей статье они доказывают, что, если M — пространство мультипликаторов между двумя пространствами Соболева в $\mathbb{R}^n_+$, то следом пространства M на $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ будет пространство мультипликаторов между пространствами следов для этих пространств Соболева.

Вклад Ф. Назарова в рецензируемую книгу состоит из двух статей (вторая из них написана в соавторстве с А. Подкорытовым). В первой статье доказан точный вариант леммы Турана. Общий принцип здесь состоит в том, что сужения тригонометрических полиномов на множества положительной меры на единичной окружности не могут быть слишком малы. Пусть $E \subset \mathbb{T}$ — измеримое множество, причем $|E| > 1/3$ (через $|\cdot|$ обозначена нормированная мера Лебега). Существует абсолютная константа A такая, что для всех полиномов $p(e^{i\theta}) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e^{im_k\theta}$, где m_k — различные целые числа, и для всех $0 \leqslant q \leqslant 2$ справедлива оценка

$$\|p\|_{L^q(\mathbb{T})} \leqslant e^{A(n-1)|\mathbb{T}\setminus E|}\|p\|_{L^q(E)}.$$

Этот результат неулучшаем с точностью до значения постоянной A, тогда как исходная лемма Турана и предыдущие оценки Назарова точны только для малых $|E|$.

Статья Назарова и Подкорытова посвящена совершенно другой задаче, здесь приводится элементарное доказательство того, что неравенства типа $\int(f^s - g^s)d\mu \geqslant 0$ сохраняются при увеличении s. В качестве иллюстраций даются элементарные доказательства неравенства Кита Болла 1986 г. о сечениях куба и теоремы У. Хогерупа о точных константах в неравенстве Хинчина для функций Радемахера. В теореме Болла говорится о том, что если n-мерный единичный куб пересечен гиперплоскостью, то $(n-1)$-мерный объем сечения не превышает $\sqrt{2}$, и это значение достигается только тогда, когда сечение содержит центр куба и является произведением $(n-2)$-мерного куба и диагонали единичного квадрата.

В частности, этот результат интересен тем, что он доставляет (для $n \geqslant 10$) простейшее отрицательное решение задачи Буземана и Петти 1956 г., где спрашивается, всегда ли то из двух выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$, симметричных относительно начала координат, у которого $(n-1)$-мерные центральные сечения имеют больший объем, будет и само иметь больший n-мерный объем. Сравнение единичного куба с n-мерным шаром объема чуть меньше 1 дает контрпример, поскольку $(n-1)$-мерный объем центральных сечений шара объема 1 стремится к $\sqrt{e}$ при $n \to \infty$ и превышает $\sqrt{2}$ при $n \geqslant 10$.

Получилось так, что задача Буземана–Петти была окончательно решена после того, как рецензируемая книга была сдана в печать: Г. И. Жанг нашел положительное решение для $n = 4$, тем самым исправив свой собственный контрпример. (См. Ann. Math., 149 (1999), no. 2, а также статью Р. Дж. Гарднера, А. Колдобского и Т. Шлумпрехта, там же.) Утверждение верно очевидным образом для $n = 2$, доказано для $n = 3$ Р. Дж. Гарднером в 1994 г., а контрпримеры для $5 \leqslant n \leqslant 9$ были даны Г. И. Жангом тоже в 1994 г.

С. В. Кисляков изучает одно естественное свойство (так называемую K-замкнутость) в теории интерполяции пространств вещественным методом (здесь термин „интерполяция" используется в абсолютно ином смысле, чем выше!) и обобщает результат, полученный ранее совместно с К. Шу. Это свойство связано с задачами свободной интерполяции лакунарными коэффициентами Фурье; получено новое доказательство одной теоремы Бургейна.

В очень ясно написанной статье М. Путинар и Х. С. Шапиро (который, кстати, был одним из редких западных гостей семинара в 60-е годы) рассматривают оператор Фридрихса в плоских областях. Этот оператор был неявным образом введен К. Фридрихсом в 1937 г. Он действует антилинейно из пространства Бергмана $AL^2(\Omega)$ в себя и задется равенством $F(f) = P(\bar{f})$ (где P — проектор Бергмана пространства $L^2(\Omega)$ на $AL^2(\Omega)$), а его квадрат S — линейный самосопряженный оператор. Указанные операторы тесно связаны с фундаментальными плоскими задачами теории эластичности (каковые собственно и были побудительным мотивом для Фридрихса). Еще они тесно связаны с квадратурными областями, введенными Д. Ахароновым и Шапиро в 1976 г. и с тех пор интенсивно изучавшимися. В действительности ограниченная область будет квадратурной тогда и только тогда, когда ранг соответствующего оператора S конечен. В настоящей статье авторы приводят доказательство ряда интересных спектральных и других свойств таких операторов, а также дают несколько примеров областей, где эти операторы и их спектры могут быть вычислены явным образом.

Спектральной теории операторов посвящены еще две статьи. В работе М. Соломяка изучаются весовые операторы Римана–Лиувилля на $L^p(\mathbb{R}_+)$, их ограниченность и компактность, а также их аппроксимационные числа. П. Курасов и Б. Павлов рассматривают обобщенно-сингулярные возмущения конечного ранга самосопряженных операторов, в частности задачи, которые возникают благодаря тому, что такие возмущения могут приводить не только к операторам, но и к операторным отношениям. Изучаются и соответствующие задачи рассеяния.

Во многих своих работах В. В. Пеллер исследовал взаимодействие между скалярно- или векторно-значными стационарными случайными процессами, H^2-пространствами Харди на $\mathbb{D}$ и операторами Ганкеля. Для таких процессов полного ранга были определены различные условия регулярности, измеряющие слабость зависимости отдаленного будущего от прошлого. Процессы, удовлетворяющие таким условиям регулярности, можно охарактеризовать в терминах соответствующих фазовых функций (их значения — унитарные марицы), определенных разложением на внешние множители матричнозначной спектральной плотности процесса. В своей статье в настоящем выпуске В. В. Пеллер совершенствует и упрощает ранее полученные результаты, а также получает окончательные ответы для процессов, удовлетворяющих „сильным“ условиям регулярности.

Теория случайных процессов также представлена в статье Ж.-П. Кахана. Эта статья отчасти обзорная, она посвящена мультифрактальному анализу некоторых случайных мер, возникающих как пределы случайных произведений. Глубоко изучается случай так называемого „гауссовского мультипликативного хаоса“, и поставлен ряд задач.

Из изложенного выше становится очевидным, что данная книга изобилует новыми интересными математическими результатами. Кроме того, большинство статей написаны таким образом, что они доставят удовольствие и неспециалисту. Видно, что авторы были движимы желанием оказать честь своему другу, представив лучшее из того, чем они располагали. В результате получился том, который должен занять свое место в любой хорошей математической библиотеке и который останется достойным памятником Станиславу Виноградову.

Ларс Инге Хедберг

Поступило 26 марта 2002 г.