Н. М. Глазунов, А. С. Голованов, А. В. Малышев,
Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1986, том 151, 40–53

https://www.mathnet.ru/znsl4983

Н.М.Глазунов, А.С.Голованов, А.В.Малышев

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ МИНКОВСКОГО О КРИТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ОБЛАСТИ $|x|^p+|y|^p<1$

§ I. Введение

Здесь дается предварительный отчет о полном доказательстве гипотезы Минковского [I8] (точнее, ее исправленного варианта, принадлежащего Дэвису [I6]) о критическом определителе $\Delta(\mathcal{D}_p)$ двумерной области $\mathcal{D}_p \subset \mathbb{R}^2=\{x,y\}$:

$$|x|^p+|y|^p<1, \tag{I}$$

зависящей от вещественного параметра $p>1$ (определение критического определителя и другие сведения из геометрии чисел см. [I0]).

Рассмотрим две $\mathcal{D}_p$ - допустимые решетки $\Lambda_p^{(0)}$ и $\Lambda_p^{(1)}$, каждая из которых содержит три пары точек, лежащих на границе $\mathcal{D}_p$, причем

$$(1,0)\in\Lambda_p^{(0)},\ (-2^{-1/p},2^{-1/p})\in\Lambda_p^{(1)} \tag{2}$$

(этими условиями решетки $\Lambda_p^{(0)}$ и $\Lambda_p^{(1)}$ определяются однозначно); пусть $\Delta_p^{(0)}=d(\Lambda_p^{(0)})$, $\Delta_p^{(1)}=d(\Lambda_p^{(1)})$ - определители этих решеток. Гипотеза (М) Минковского-Дэвиса [I8,I6] формулируется следующим образом.

ГИПОТЕЗА (М). Для любого вещественного числа $p>1$

$$\Delta(\mathcal{D}_p)=\min\{\Delta_p^{(0)},\Delta_p^{(1)}\}=\begin{cases}\Delta_p^{(1)}, & 1<p\leqslant 2,\ p\geqslant p_0,\\ \Delta_p^{(0)}, & 2\leqslant p\leqslant p_0;\end{cases} \tag{3}$$

здесь p_0 - вещественное число, однозначно определяемое условиями (ср. [20])

$$\Delta_{p_0}^{(0)}=\Delta_{p_0}^{(1)},\ 2.57<p_0<2.58. \tag{4}$$

Можно дать аналитическую формулировку гипотезы (М). Рассмотрим функцию

$$\Delta=\Delta(p,\sigma)=(\tau+\sigma)(1+\tau^p)^{-1/p}(1+\sigma^p)^{-1/p}, \tag{5}$$

заданную в области

$$\mathcal{T}:p>1,\ 1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_p,\ \sigma_p=(2^p-1)^{1/p}, \tag{6}$$

плоскости $\{p, \sigma\}$, где σ – некоторый вещественный параметр; здесь $\tau = \tau(p,\sigma)$ – функция, однозначно определяемая условиями

$$A^p + B^p = 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_p, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= A(p,\sigma,\tau) = (1+\tau^p)^{-1/p} - (1+\sigma^p)^{-1/p}, \\ B &= B(p,\sigma,\tau) = \tau(1+\tau^p)^{-1/p} + \sigma(1+\sigma^p)^{-1/p}; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

τ_p определяется уравнением

$$2(1-\tau_p)^p = 1 + \tau_p^p, \quad 0 < \tau_p < 1 \tag{9}$$

При данном p с ростом σ от I до σ_p функция $\tau = \tau(p,\sigma)$ строго монотонно убывает от τ_p до 0; $0 < \tau_p < 1/3$. В этих обозначениях

$$\Delta(p,1) = \Delta_p^{(1)}, \quad \Delta(p,\sigma_p) = \Delta_p^{(0)}, \tag{10}$$

и гипотеза (М) равносильна [15] следующему аналитическому утверждению.

ГИПОТЕЗА (МА). Для любых вещественных чисел p и σ с условиями $p > 1$, $p \neq 2$, $1 < \sigma < \sigma_p$

$$\Delta(p,\sigma) > \min\{\Delta(p,1), \Delta(p,\sigma_p)\} \tag{11}$$

Возможен и другой (особенно полезный для p , близких к I), (p,τ) – вариант гипотезы Минковского: при данном p уравнение (7) определяет на отрезке $0 \leq \tau \leq \tau_p$ функцию $\sigma = \sigma(p,\tau)$, а правая часть (5) – функцию

$$\Delta = \Delta_1(p,\tau) = (\tau+\sigma)(1+\tau^p)^{-1/p}(1+\sigma^p)^{-1/p}, \tag{12}$$

заданную в области

$$p > 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_p. \tag{13}$$

В этих обозначениях

$$\Delta_1(p,0) = \Delta(p,\sigma_p) = \Delta_p^{(0)}, \quad \Delta_1(p,\tau_p) = \Delta(p,1) = \Delta_p^{(1)} \tag{14}$$

и гипотеза (М) равносильна следующему аналитическому утверждению.

ГИПОТЕЗА ($МА_I$). Для любых вещественных чисел p и τ с условиями $p > 1$, $p \neq 2$, $0 < \tau < \tau_p$

$$\Delta_1(p,\tau) > \min\{\Delta_1(p,0), \Delta_1(p,\tau_p)\} \tag{15}$$

Цель нашего исследования - доказательство следующего предложения.

ТЕОРЕМА. Гипотеза Минковского (M) справедлива.

Для доказательства теоремы достаточно доказать равносильные ей утверждения (MA) или (MA_I). В § 2 мы напоминаем результаты исследований [2,17,14] , где утверждение (MA) доказано в случаях

$$p \geqslant 2.035, \ 1.0099 \leqslant p \leqslant 1.996. \tag{16}$$

В § 3 рассмотрена окрестность $p=2$. С помощью ЭВМ доказано утверждение (MA) в случае

$$1.99 \leqslant p \leqslant 2.05, \tag{17}$$

за исключением очень малой окрестности точки $p=2, \sigma=\sigma_p=\sqrt{3}$:

$$2 < p \leqslant 2.000019, \ \tilde{\sigma} \leqslant \sigma < \sigma_p, \ \sigma_p - \tilde{\sigma} < 0.0000053. \tag{18}$$

Исследования, описываемые в § 3, принадлежат Н.М.Глазунову и А.В.Малышеву [7] ; см.также [4,5,6] . Наконец, в § 4 рассмотрены оставшиеся значения параметра p : окрестность $p=1$

$$1 < p \leqslant 1.01 \tag{19}$$

и окрестность (18) точки $p=2, \sigma=\sigma_p$. Исследования, описываемые в § 4, принадлежат А.С.Голованову (они частично опубликованы в тезисах [8]), который существенно модернизировал план исследования (MA) и (MA_I), предложенный в [5] .

Исследованиям по гипотезе Минковского (M) посвящены работы [1,2,4-9,11-17,19,20] . Помимо указанных выше результатов отметим работу В.Г.Кухарева [11,12] , который доказал гипотезу Минковского (M) для

$$p = 1.3, \ 1.4, \ 1.5, \ 1.6, \ 1.7, \ 3, \ 4,5 \tag{20}$$

(в случае $p=4$ гипотеза (M) была ранее доказана Морделлом [19]) и разработал довольно общую методику проверки гипотезы для наперед заданного числа p .

§ 2. Доказательство гипотезы Минковского для $1.0099 \leqslant p \leqslant 1.996$ и $p \geqslant 2.05$

В работе [17] доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого вещественного числа $p \geqslant 6$ справедлива гипотеза (MA), т.е. при $1 < \sigma \leqslant \sigma_p$

$$\Delta(p,\sigma) > \Delta(p,1) = \Delta_p^{(1)} \tag{21}$$

Для доказательства этого предложения рассматриваются функции

$$g(p,\sigma) = -(1+\sigma^p)^{1+1/p}(B^{p-1} - \tau^{p-1}A^{p-1})\,\frac{\partial\Delta(p,\sigma)}{\partial\sigma}, \tag{22}$$

так что

$$\operatorname{sign}\frac{\partial\Delta(p,\sigma)}{\partial\sigma} = -\operatorname{sign} g(p,\sigma) \tag{23}$$

и

$$h(p,\sigma) = \frac{\partial g(p,\sigma)}{\partial\sigma}. \tag{24}$$

Доказывается (см. [I7]), что при $p \geqslant 6$

$$h(p,\sigma) < 0, \qquad \text{если } 1 \leqslant \sigma \leqslant 1 + \frac{1}{5p}, \tag{25}$$

$$g(p,\sigma) < 0, \qquad \text{если } 1 + \frac{1}{5p} \leqslant \sigma \leqslant 1 + \frac{1.37}{\sqrt{p}}, \tag{26}$$

$$\Delta(p,\sigma) > \Delta_p^{(1)}, \qquad \text{если } 1 + \frac{1.37}{\sqrt{p}} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_p \tag{27}$$

Если учесть, что

$$g(p,1) = g(p,\sigma_p) = 0, \tag{28}$$

то из (25)-(27) с учетом (22)-(24) следует (2I). Оценки (25)-(27) получены без применения ЭВМ.

В статьях [I4] доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого вещественного числа p, $2.035 \leqslant p \leqslant 6$ или $1.0099 \leqslant p \leqslant 1.996$, справедлива гипотеза (МА).

Это предложение доказывается уже с применением ЭВМ. Полосы

$$2.035 \leqslant p \leqslant 6 \quad \text{и} \quad 1.0099 \leqslant p \leqslant 1.996$$

разбиваются на малые прямоугольники,

$$[\underline{p},\overline{p};\underline{\sigma},\overline{\sigma}]: \underline{p} \leqslant p \leqslant \overline{p},\ \underline{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \overline{\sigma},\ \overline{p} = \underline{p} + \delta_p,\ \overline{\sigma} = \underline{\sigma} + \delta_\sigma, \tag{29}$$

и для каждого такого прямоугольника оцениваются $\Delta(p,\sigma)$, $g(p,\sigma)$, $h(p,\sigma)$. Ключом для этих оценок были оценки

$$\underline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\tau} \tag{30}$$

для $\tau=\tau(\rho,\sigma)$ в условиях (29) (здесь монотонности по ρ нет). Оценки (30) получаются с помощью простого, но эффективного итерационного процесса (см.[I4]). При оценках $\Delta(\rho,\sigma)$, $g(\rho,\sigma)$, $h(\rho,\sigma)$ используются ЭВМ. Программирование на языке АЛГОЛ и счет были проведены К.И.Гришмановской на ЭВМ БЭСМ-6 ЛОЦЭМИ (ныне ИСЭП) АН СССР. Общее время счета - около 50 часов.

§ 3. О гипотезе Минковского в окрестности $\rho=2$

В работе [5] доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого вещественного числа ρ, $1.99\leqslant\rho\leqslant2.05$, $\rho\neq2$

$$\Delta(\rho,\sigma)>\min\left\{\Delta_\rho^{(0)};\ \Delta_\rho^{(1)}\right\},\quad \text{если } \Sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\Sigma_2, \tag{3I}$$

где

$$\Sigma_1=1.001802,\quad \Sigma_2=1.7281. \tag{32}$$

В цитированной статье [5] описан метод исследования гипотез (МА) и (МА$_\mathrm{I}$) для значений параметра ρ, не охваченных предложениями I и 2. Этот метод является развитием метода статей [I4]. Он также предусматривает применение ЭВМ. Снова нужная часть области Υ разбивается на малые прямоугольники вида (29) и в этих прямоугольниках находится оценка $\Delta(\rho,\sigma), g(\rho,\sigma), h(\rho,\sigma)$, а также величин

$$\Delta'_\rho=\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta(\rho,\sigma),\quad g'_\rho=\frac{\partial}{\partial\rho}g(\rho,\sigma),\quad h'_\rho=\frac{\partial}{\partial\rho}h(\rho,\sigma) \tag{32}$$

(здесь возможен и (ρ,τ) - вариант метода). Основная часть доказательства предложения - получение таким путем неравенства (при $1.99\leqslant\rho\leqslant2.05$)

$$g'_\rho=\frac{\partial}{\partial\rho}g(\rho,\sigma)>0,\quad \Sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\Sigma_2. \tag{33}$$

На самом деле в [5] получен более точный результат.

Программирование на языке ПЛ-I и организация вычислений были проведены Н.М.Глазуновым на ЭВМ ЕС-I060 ИК АН УССР. Общее время счета - около 8 часов.

Дальнейшее применение этого метода позволило получить [6,7]

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого вещественного числа ρ, $1.99\leqslant\rho\leqslant2.05$, $\rho\neq2$, имеет место гипотеза (МА):

$$\Delta(\rho,\sigma)>\min\left\{\Delta_\rho^{(0)},\ \Delta_\rho^{(1)}\right\},\quad \text{если } 1<\sigma<\sigma_\rho, \tag{34}$$

за исключением (ρ,σ) из области

$$P_{2,\sqrt{3}}=\{2\le p\le 2.000019,\ d\le \sigma\le \sigma_p^*\},\quad d=1.7320476\,. \qquad (35)$$

Заметим, что $\sigma_p^* - d < 0.0000053$. Более подробно остановимся на доказательстве предложения 4. Область $1.99\le p\le 2.05$ разбиваем на подобласти

$$Л_{2+}=\{2\le p\le 2.05,\ 1\le \sigma\le \Sigma_1\},$$
$$C_{2+}=\{2\le p\le 2.05,\ \Sigma_1\le \sigma\le \Sigma_2\},$$
$$\Pi_{2+}=\{2\le p\le 2.05,\ \Sigma_2\le \sigma\le \sigma_p\},$$
$$Л_{2-}=\{1.99\le p\le 2,\ 1\le \sigma\le \Sigma_1\},$$
$$C_{2-}=\{1.99\le p\le 2,\ \Sigma_1\le \sigma\le \Sigma_2\},$$
$$\Pi_{2-}=\{1.99\le p\le 2,\ \Sigma_2\le \sigma\le \sigma_p\},$$

и доказываем:

$$\ell^{(0)}(p,\sigma)>0,\quad \text{если } (p,\sigma)\in Л_{2+};\ \ell^{(0)}(p,\sigma)=\Delta(p,\sigma)-\Delta_p^{(0)}; \qquad (36)$$

$$g(p,\sigma)>0,\quad \text{если } (p,\sigma)\in C_{2+}; \qquad (37)$$

$$h(p,\sigma)<0,\quad \text{если } (p,\sigma)\in \Pi_{2+}\setminus P_{2,\sqrt{3}}; \qquad (38)$$

$$h(p,\sigma)<0,\quad \text{если } (p,\sigma)\in Л_{2-}; \qquad (39)$$

$$g(p,\sigma)<0,\quad \text{если } (p,\sigma)\in C_{2-}; \qquad (40)$$

$$\ell^{(1)}(p,\sigma)>0,\quad \text{если } (p,\sigma)\in \Pi_{2-};\ \ell^{(1)}(p,\sigma)=\Delta(p,\sigma)-\Delta_p^{(1)}. \qquad (41)$$

Для доказательства (36)-(41) - следуя плану, описанному в [5] - мы каждую из областей $Л_{2+}$, C_{2+}, Π_{2+}, $Л_{2-}$, C_{2-}, Π_{2-} покрываем прямоугольниками вида (29), где "шаги" δ_p и δ_σ выбираются достаточно (для целей решения задачи) малыми. В каждом таком прямоугольнике рассматриваем соответствующую функцию (и, при необходимости, ее производные по p). Для формул, выражающих $\ell^{(0)}$, $\ell^{(1)}$, g, h и их производные по p через суммы произведений "атомов" $s_i=\sigma^{p-i}$, $t_i=\tau^{p-i}$, $a_i=(1+\sigma^p)^{-i-1/p}$, $b_i=(1+\tau^p)^{-i-1/p}$, $A=b_0-a_0$, $B=\tau b_0+\sigma a_0$, $\alpha_i=A^{p-i}$, $\beta_i=B^{p-i}$ $(i=0,1,2,\ldots)$, применяется простейший вариант интервального анализа (ср. [14]), позволяющий построить формулы для оценок снизу $\underline{\ell^{(0)}}$, $\underline{\ell^{(1)}}$, $\underline{g}$, $\underline{(\ell^{(0)})'_p}$, $\underline{g'_p}$, $\underline{h'_p}$ и сверху $\overline{g}$, $\overline{h}$, $\overline{(\ell^{(1)})'_p}$, $\overline{g'_p}$, $\overline{h'_p}$ в заданном прямоугольнике вида (29). Эти оценки, в конечном итоге, выражаются через $\underline{p}$, $\overline{p}$, $\underline{\sigma}$, $\overline{\sigma}$, $\underline{\tau}$, $\overline{\tau}$; при этом оценки $\underline{\tau}$, $\overline{\tau}$ вида (30) получаются с помощью итерационного процесса [14] . Малые δ_p, δ_σ приводят к большому объему вычислений с необходимо высокой и гарантированной точностью. Это предопределяет применение ЭВМ.

Оценки (37) и (40) были доказаны в [5] : они следуют из (33), если учесть, что $q(2,\sigma)=0$, $1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_p$.

Для доказательства (36) достаточно доказать, что

$$\ell^{(0)}>0,\ (p,\sigma)\in\Lambda^{(1)}_{2+}=\{2{,}0002\leqslant p\leqslant 2{,}05,\ 1\leqslant\sigma\leqslant\Sigma_1\},$$

$$(\ell^{(0)})'_p>0,\ \ (p,\sigma)\in\Lambda^{(2)}_{2+}=\{2\leqslant p\leqslant 2{,}0002,\ 1\leqslant\sigma\leqslant\Sigma_1\}.$$

Эти оценки получаются разбиением $\Lambda^{(1)}_{2+}$ и $\Lambda^{(2)}_{2+}$ на прямоугольники вида (29) и доказательством, что в каждом таком прямоугольнике

$$\ell^{(0)}>0,\ \text{если}\ (p,\sigma)\in\Lambda^{(1)}_{2+},\ \delta_p=\delta_\sigma=10^{-4};$$
$$(\ell^{(0)})'_p>0,\ \text{если}\ (p,\sigma)\in\Lambda^{(2)}_{2+},\ \delta_p=10^{-5},\ \delta_\sigma=10^{-4}.$$

Для доказательства (4I) достаточно доказать, что

$$\ell^{(1)}>0,\ (p,\sigma)\in\Pi^{(1)}_{2-}=\{1{,}99\leqslant p\leqslant 1{,}99954,\ \Sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_p\},$$

$$(\ell^{(1)})'_p<0,\ (p,\sigma)\in\Pi^{(2)}_{2-}=\{1{,}99954\leqslant p\leqslant 2,\ \Sigma_2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_p\}.$$

Эти оценки получаются покрытием $\Pi^{(1)}_{2-}$ и $\Pi^{(2)}_{2-}$ прямоугольниками вида (29) и доказательством, что в каждом таком прямоугольнике $\ell^{(1)}>0$, если $(p,\sigma)\in\Pi^{(1)}_{2-}$,

$$\delta_p=10^{-4},\ \delta_\sigma=10^{-5}\quad \text{при}\ 1{,}99\leqslant p\leqslant 1{,}9946,$$
$$\delta_p=\delta_\sigma=10^{-5}\quad \text{при}\ 1{,}9946\leqslant p\leqslant 1{,}9989,$$
$$\delta_p=10^{-5},\ \delta_\sigma=10^{-6}\quad \text{при}\ 1{,}9989\leqslant p\leqslant 1{,}99954;$$

$$(\ell^{(1)})'_p<0\quad,\ \text{если}\ (p,\sigma)\in\Pi^{(2)}_{2-},\ \delta_p=10^{-5},\ \delta_\sigma=10^{-6}.$$

Для доказательства (39) достаточно доказать, что

$$h<0,\ (p,\sigma)\in\Lambda^{(1)}_{2-}=\{1{,}99\leqslant p\leqslant 1{,}99954,\ 1\leqslant\sigma\leqslant\Sigma_1\},$$

$$h'_p>0,\ (p,\sigma)\in\Lambda^{(2)}_{2-}=\{1{,}99954\leqslant p\leqslant 2,\ 1\leqslant\sigma\leqslant\Sigma_1\}.$$

Эти оценки получаются разбиением $\Lambda^{(1)}_{2-}$ и $\Lambda^{(2)}_{2-}$ на прямоугольники вида (29) и доказательством, что в каждом таком прямоугольнике

$$\overline{h} < 0 \quad , \text{ если } (p,\sigma)\in \Lambda^{(1)}_{2-},\ \delta_p=\delta_\sigma=10^{-5};$$
$$\underline{h'_p} > 0 \quad , \text{ если } (p,\sigma)\in \Lambda^{(2)}_{2-},\ \delta_p=\delta_\sigma=10^{-5}.$$

Наконец, для доказательства (38) достаточно доказать, что

$$h<0 \quad , \text{ если } (p,\sigma)\in \Pi^{(1)}_{2+}=\{2{,}0002\leq p\leq 2.05,\ \Sigma_2\leq\sigma\leq\sigma_p\},$$
$$h'_p<0 \quad , \text{ если } (p,\sigma)\in \Pi^{(2)}_{2+}\setminus P_{2,\sqrt{3}},$$

где $\Pi^{(2)}_{2+}=\{2\leq p\leq 2.0002,\ \Sigma_2\leq\sigma\leq\sigma_p\}$, а $P_{2,\sqrt{3}}$ определено (35). Эти оценки получаются покрытием $\Pi^{(1)}_{2+}$ и $\Pi^{(2)}_{2+}$ прямоугольниками вида (29) и доказательством, что в каждом таком прямоугольнике

$$\overline{h}<0 \quad , \text{ если } (p,\sigma)\in \Pi^{(1)}_{2+},\ \delta_p=10^{-4},\ \delta_\sigma=10^{-5};$$
$$\overline{h'_p}<0 \quad , \text{ если } (p,\sigma)\in \Pi^{(2)}_{2+}\setminus P_{2,\sqrt{3}},$$
$$\delta_p=\delta_\sigma=10^{-4} \text{ при } 2\leq p\leq 2{,}0002,\ \Sigma_2\leq\sigma\leq 1{,}7314,$$
$$\delta_p=\delta_\sigma=10^{-5} \text{ при } 2\leq p\leq 2{,}0002,\ 1{,}7313\leq\sigma\leq 1{,}73199,$$
$$\delta_p=10^{-5},\ \delta_\sigma=10^{-7} \text{ при } 2\leq p\leq 2.0002,\ 1{,}73198\leq\sigma\leq 1{,}7320195,$$
$$\delta_p=10^{-5},\ \delta_\sigma=10^{-7} \text{ при } 2.00019\leq p\leq 2.0002,\ 1{,}73198\leq\sigma\leq\sigma_p,$$
$$\delta_p=10^{-6},\ \delta_\sigma=10^{-7} \text{при } 2\leq p\leq 2.00019,\ 1{,}7320194\leq\sigma\leq\sigma_p\ ,\ (p,\sigma)\notin P_{2,\sqrt{3}}.$$

Предложение 4 – оценки (34) – следует из оценок (37)-(4I), если учесть предложение 2 и тривиальные равенства

$$\ell^{(0)}(2,\sigma)=\ell^{(1)}(2,\sigma)=g(2,\sigma)=h(2,\sigma)=0,\ 1\leq\sigma\leq\sigma_p .$$

Программирование на языке ПЛ – 1 с помощью расширенной версии пакета программ [3] , выбор интервалов δ_p и δ_σ и организация вычислений на ЭВМ ЕС-I060 ИК АН УССР были проведены Н.М.Глазуновым. Общее время счета 48.6 часа.

§ 4. Доказательство гипотезы Минковского в окрестности $p=1$ и в области $P_{2,\sqrt{3}}$

Этот параграф завершает доказательство гипотезы (М). Отдельно рассмотрим полосу (I9) и окрестность $P_{2,\sqrt{3}}$ точки $p=2$, $\sigma=\sqrt{3}$, определенную (35). Имеем (см. [8])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любого вещественного числа p , $1<p\leq 1{,}01$, справедлива гипотеза (MA_I), т.е. при $0<\tau<\tau_p$

$$\Delta_1(p,\tau)>\Delta_1(p,\tau_p)=\Delta^{(1)}_p . \tag{42}$$

Для доказательства предложения 5 обозначим:

$g_1 = g_1(p,\tau) = g(p,\sigma)$, $\ell_1^{(1)}(p,\tau) = \ell^{(1)}(p,\sigma) = \Delta_1(p,\tau) - \Delta_p^{(1)}$,

где τ и σ для данного p однозначно определяют друг друга условиями (7): $\tau = \tau(p,\sigma)$, $\sigma = \sigma(p,\tau)$. Полосу

$$1 < p \leqslant 1{,}01, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p \tag{43}$$

покрываем тремя областями

$$Л_1 = \{ 1 < p \leqslant 1{,}01, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 0{,}002 \},$$

$$C_1 = \{ 1 < p \leqslant 1{,}01, \ 0{,}002 \leqslant \tau \leqslant 0{,}2 \},$$

$$П_1 = \{ 1 < p \leqslant 1{,}01, \quad 0{,}2 \leqslant \tau \leqslant 0{,}334 \}.$$

(заметим, что $\tau_p < \tau_1 = 1/3$). Достаточно доказать неравенства

$$\frac{\partial^2 \ell_1^{(1)}(p,\tau)}{\partial p^2} < 0 \quad , \qquad \text{если } (p,\tau) \in Л_1, \tag{44}$$

$$\frac{\partial g_1(p,\tau)}{\partial p} < 0 \quad , \qquad \text{если } (p,\tau) \in C_1, \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 \ell_1^{(1)}(p,\tau)}{\partial p^2} < 0 \quad , \qquad \text{если } (p,\tau) \in П_1, \tag{46}$$

ибо

$$\ell_1^{(1)}(1,\tau) = g_1(1,\tau) = 0, 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_p \ ,$$

и по предложению 2

$$\ell_1^{(1)}(1{,}01,\tau) = \ell^{(1)}(1.01,\sigma) > 0, 0 < \tau < \tau_p ,$$

откуда

$$\ell_1^{(1)}(p,\tau) > 0, \ 0 < \tau \leqslant 0.002, \ 0{,}2 \leqslant \tau < \tau_p ; \ g_1(p,\tau) < 0, \ 0.002 \leqslant \tau \leqslant 0{,}2 ,$$

что приводит к неравенству (42).

Для доказательства неравенств (44)-(46) поступаем, как и ранее (§§ 2,3): покрываем области $Л_1$, C_1, $П_1$ малыми прямоугольниками вида

$$[\underline{p}, \overline{p}; \underline{\tau}, \overline{\tau}] : \underline{p} \leqslant p \leqslant \overline{p}, \ \underline{\tau} \leqslant \tau \leqslant \overline{\tau}, \tag{47}$$

для каждого такого прямоугольника оцениваем сверху величины $\frac{\partial^2 \ell_1^{(1)}}{\partial p^2}$, $\frac{\partial g_1}{\partial p}$, доказывая, что

$$\frac{\overline{\partial^2 \ell_1^{(1)}}}{\partial p^2} < 0, \text{ если } [\underline{p}, \overline{p}; \underline{\tau}, \overline{\tau}] \subset Л_1; \qquad (48)$$

$$\frac{\overline{\partial g_1}}{\partial p} < 0, \text{ если } [\underline{p}, \overline{p}; \underline{\tau}, \overline{\tau}] \subset C_1; \qquad (49)$$

$$\frac{\overline{\partial^2 \ell_1^{(1)}}}{\partial p^2} < 0, \text{ если } [\underline{p}, \overline{p}; \underline{\tau}, \overline{\tau}] \subset П_1. \qquad (50)$$

Эти оценки получаются при следующем выборе прямоугольников (47):

$$\underline{p} = 1, \ \overline{p} = 1.01, \qquad (5I)$$

так что тривиально

$$\underline{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \overline{\sigma}, \ \underline{\sigma} = 1, \ \overline{\sigma} = \sigma_{1.01} = 1.0137724\ldots \qquad (52)$$

а) для $Л_1$:

$$\underline{\tau} = 0, \ \overline{\tau} = 0.002; \qquad (53)$$

б) для C_1:

$$\underline{\tau} = \tau_{i-1}, \overline{\tau} = \tau_i \ (i = 1, \ldots, 25), \qquad (54)$$

$$\tau_0 = 0.002, \tau_1 = 0.003, \tau_2 = 0.005, \tau_3 = 0.0075, \tau_4 = 0.01, \tau_5 = 0.015,$$
$$\tau_6 = 0.02, \tau_k = \tau_{k-1} + 0.01 \ (k = 7, \ldots, 23), \tau_{24} = 0.195, \ \tau_{25} = 0.2;$$

в) для $П_1$:

$$\underline{\tau} = \tau_{i-1}, \overline{\tau} = \tau_i \ (i = 1, \ldots, 7), \qquad (55)$$

$$\tau_0 = 0.2, \ \tau_i = \tau_{i-1} + 0.02 \ (i = 1, \ldots, 6), \ \tau_7 = 0.334$$

Для доказательства неравенств (48)-(50) мы строим формулы для $\frac{\partial g_1}{\partial p}$ и $\frac{\partial^2 \ell_1^{(1)}}{\partial p^2}$, выражающие эти производные – в конечном итоге – через p, τ и σ. Нужные оценки (48)-(50) получаются применением интервальных вычислений к прямоугольникам (47) при исходных оценках (47) с (5I),(53)-(55) и (52). При этом используется ЭВМ.

Программирование на языке АЛГОЛ-68, выбор интервалов для p, τ и вычисления на ЭВМ ЕС-IO33 ЛГУ были проведены А.С.Головановым. Время счета менее 5 минут.

Эта же методика применима и к окрестности $P_{2,\sqrt{3}}$ (ср.предложение 4) точки $p = 2$, $\sigma = \sigma_p = \sqrt{3}$. Имеет место (А.С.Голованов) следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. В области $P_{2,\sqrt{3}}$ справедлива гипотеза ($МА_I$), т.е.

$$\Delta\ (\rho,\sigma) > \Delta\ (\rho,\sigma_\rho) = \Delta_\rho^{(0)}\ ;\ \text{если}\ (\rho,\sigma)\in P_{2,\sqrt{3}} \qquad (56)$$

Обозначим:

$$\ell^{(0)} = \ell^{(0)}(\rho,\sigma) = \Delta\ (\rho,\sigma) - \Delta\ (\rho,\sigma_\rho) = \Delta\ (\rho,\sigma) - \Delta_\rho^{(0)}$$

и рассмотрим прямоугольник

$$\widetilde{P} : \left\{ (\rho,\sigma) \,\middle|\, 1.99995 \leq \rho \leq 2.00019, \quad 1.732 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{2.00019} \right\}.$$

Так как $P_{2,\sqrt{3}} \subset \widetilde{P}$, то для доказательства (56) достаточно доказать, что

$$\frac{\partial^2 \ell^{(0)}(\rho,\sigma)}{\partial \rho^2} > 0,\ \text{если}\ (\rho,\sigma)\in\widetilde{P}, \qquad (57)$$

ибо $\sigma_{1.99995} < d$. Заметим, что если $(\rho,\sigma)\in\widetilde{P}$, т.е.

$$1.99995 \leqslant \rho \leqslant 2.00019,\quad 1.732 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{2.00019}, \qquad (58)$$

то

$$0 \leqslant \tau \leqslant 0.001. \qquad (59)$$

Действительно, при ρ и σ, удовлетворяющих неравенствам (58), и $\tau = 0.001$

$$\{A(\rho,\sigma,\tau)\}^\rho + \{B(\rho,\sigma,\tau)\}^\rho \geqslant \{A(\rho,\sigma,\tau)\}^{2.00019} + \{B(\rho,\sigma,\tau)\}^{2.00019},$$

$$A(\rho,\sigma,\tau) \geqslant (1+0.001^{1.99995})^{-1/1.99995} - (1+1.732^{1.99995})^{-1/2.00019},$$

$$B(\rho,\sigma,\tau) \geqslant 0.001(1+0.001^{1.99995})^{-1/1.99995} + 1.732(1+\sigma_{2.00019}^{2.00019})^{-1/1.99995},$$

так что

$$\left.\{A(\rho,\sigma,\tau)\}^\rho + \{B(\rho,\sigma,\tau)\}^\rho\right|_{\substack{1.99995 \leq \rho \leq 2.00019 \\ 1.732 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{2.00019} \\ \tau = 0.001}} > 1.$$

Поэтому при данном ρ, $1.99995 \leq \rho \leq 2.00019$, числу $\tau = 0.001$ отвечает $\sigma = \sigma(\rho, \tau = 0.001) < 1.732$, а всякому σ, удовлетворяющему (58) – значение $\tau < 0.001$, так что (59) доказано.

Для доказательства неравенства (57) мы строим формулу для $\frac{\partial^2 \ell^{(0)}(\rho,\sigma)}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \Delta\ (\rho,\sigma)}{\partial \rho^2} - \frac{d^2}{d\rho^2}\Delta_\rho^{(0)}$ (здесь используем ранее полученную формулу для первого слагаемого), выражающую эту производную через ρ, τ и σ, и применяем интервальные вычисления сразу для всего прямоугольника $\tilde{P}$, исходя из неравенств (58) и (59). Вычисления проводились А.С.Головановым на микрокалькуляторе.

§ 5. Заключительные замечания

Предложения I-6 и доказывают теорему. Тем самым гипотеза Минковского (М) полностью доказана.

Сделаем несколько замечаний. В § 4 вычислительный план работы [5] для $1 < \rho \leqslant 1.01$ и для $(\rho, \sigma) \in P_{2,\sqrt{3}}$ был существенно модернизирован: вместо рассмотрения первых производных Δ и h по ρ рассматриваются вторые производные Δ по ρ. По-видимому, можно реализовать и вычислительный план [5]. Это не делалось, ибо план § 4 оказался весьма эффективным (а в плане 5 надо, видимо, исключать "особенности" h в точках $\rho=2$, $\sigma=\sigma_\rho$ и $\rho=1$, $\tau=\tau_\rho$).

Хотелось бы, чтобы доказательство гипотезы Минковского велось по единой программе на ЭВМ (или для всех $\rho > 1$, или хотя бы для $\rho \leqslant 6$), чтобы эта программа сама организовывала вычисления и выбор интервалов δ_ρ и δ_σ (или δ_τ).

Можно думать и об общей программе исследования с помощью ЭВМ поведения "не слишком плохой" функции двух переменных по ее нескольким частным производным в некоторой области ее задания.

Видимо, с помощью ЭВМ можно доказать и усиление гипотезы Минковского- гипотезу (МАУ), сформулированную в статье [5].

Мы вели интервальный счет, пользуясь имеющимся математическим обеспечением ЭВМ (трансляторы, счет элементарных функций и т.д.). Вычисления всегда велись с большим запасом точности, а цепочки вычислений были не слишком велики, так что ошибки округления в имеющемся математическом обеспечении практически не влияют на результаты (суждения о знаке функций). Однако хотелось бы, чтобы была создана специальная система математического обеспечения (для данной ЭВМ), рассчитанная на интервальный счет, на вычисления с гарантированной точностью.

В доказательство гипотезы Минковского существенно входит предложение I (см. [2,17]). Поэтому А.Б.Воронецкий является полноправным соавтором доказательства этой гипотезы.

Литература

I. Воронецкий А.Б., Гришмановская К.И., Малышев А.В. Использование ЭВМ для доказательства не-которых предложений геометрии чисел. – В кн.: Тезисы докладов Всес.конф. по актуальным вопросам теории чисел. Самарканд, 1972, с.22-23.

2. Воронецкий А.Б., Малышев А.В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p<1$ для $p\geqslant 6$. – В кн.: Тезисы докладов Всес.конф. "Проблемы аналитической теории чисел и ее применений". Вильнюс, 1974, с.50-55.

3. Глазунов Н.М. О пакете программ для исследования алгебраических кривых. – В кн.: Тезисы докладов Всес.симпоз. "Искусственный интеллект и автоматизация исследований в математике". Киев, 1978, с.17-18.

4. Глазунов Н.М., Малышев А.В. Гипотеза Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p<1$. – В кн.: Тезисы докладов Всес.конф. "Теория трансцендентных чисел и ее приложения". М., 1983, с.35-36.

5. Глазунов Н.М., Малышев А.В. К гипотезе Минковского о критическом определителе. – Кибернетика, 1985, № 5, с.10-14.

6. Глазунов Н.М., Малышев А.В. Применение ЭВМ к гипотезе Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p<1$. Окрестность $p=2$. – В кн.: Тезисы докладов Всес.конф. "Теория чисел и ее приложения". Тбилиси, 1985, с.43-45.

7. Глазунов Н.М., Малышев А.В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p<1$ в окрестности $p=2$. – Докл. АН УССР, 1986 (в печати)

8. Голованов А.С. Применение ЭВМ к гипотезе Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p<1$. Окрестность $p=1$. – В кн.: Тезисы докладов Всес.конф. "Теория чисел и ее приложения". Тбилиси, 1985, с.47-48.

9. Гришмановская К.И., Малышев А.В., Пачев У.М., Фидарова А.Ч. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p<1$ в случае $5\leqslant p\leqslant 6$. – В кн.: Исследования по теории чисел. 4. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1977, т.67, с.95-107.

10. Касселс Дж.В.С. Введение в геометрию чисел. М., 1965. 421 с.

11. Кухарев В.Г. О критическом определителе области $|x|^p+|y|^p\leqslant 1$. – Докл.АН СССР, 1966, т.169, № 6, с.1273-1275.

12. К у х а р е в В.Г. Исследования по гипотезе Минковского о критическом определителе области $|x|^p+|y|^p \leqslant 1$. – Вестник Ленингр.ун-та, 1968, № 12, с.34-50.
13. К у х а р е в В.Г. Критический определитель области $|x|^p+|y|^p \leqslant 1$. – Изв.ВУЗ"ов. Математика, 1971, № 2 (105), с.62-70.
14. М а л ы ш е в А.В. О применении ЭВМ к доказательству одной гипотезы Минковского из геометрии чисел. I-II. – В кн.: Модули и представления. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1977, т.71, с.163-180. – Исследования по теории чисел. 5. Зап.науч.семин. ЛОМИ, 1979, т.82, с.29-32.
15. C o h n H. Minkowski's conjectures on critical lattices in the metric $\{|\xi|^p+|\eta|^p\}^{1/p}$. – Ann.of Math.(2), 1950, v.51, p.734-738.
16. D a v i s C.S. Note on a conjecture by Minkowski. – J.London Math.Soc., 1948, v.23, p.172-175.
17. M a l y s h e v A.V., V o r o n e t s k y A.B. The proof of Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p+|y|^p<1$ for $p>6$. – Acta arithm., 1975, v.27, p.447-458.
18. M i n k o w s k i H. Diophantische Approximationen. Leipzig, 1907, viii + 235 S.
19. M o r d e l l L.J. Lattice points in the region $|Ax^4+By^4| \leqslant 1$. – J.London Math.Soc., 1941, v.16, p.152-156.
20. W a t s o n G.L. Minkowski's conjectures on the region $|x|^p+|y|^p \leqslant 1$. I-II. – J.London Math.Soc., 1953, v.28, p.305-309, 402-410.