На постановку, важность и схему применения задачи о нелинейной мажорации обратили внимание автора Ю.А. Семёнов и Л.А. Перельмутер (первому из них принадлежит частный случай теоремы 1 с функцией из (4)), которым автор приносит свою искреннюю благодарность.

Ленинградский финансово-экономический институт
им. Н.А. Вознесенского

Поступило
23 V 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухвалов А.В.* – УМН, 1983, т. 38, № 6, с. 37–83. 2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 742 с. 3. *Herbst I.W., Sloan A.D.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1978, vol. 236, p. 325–360. 4. *Канторович Л.В. и др.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 548 с. 5. *Лозановский Г.Я.* В сб.: Качеств. и прибл. методы исследов. оператор. уравнений. Ярославль, 1978, с. 122–148. 6. *Nakano H.* – J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 1953, vol. 12, № 3, p. 163–210. 7. *Aliprantis C.D., Burkinshaw O.* – Math. Z., 1980, vol. 174, № 3, p. 289–298. 8. *Aliprantis C.D., Burkinshaw O.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1984, vol. 283, № 1, p. 369–381. 9. *De Pagter B.* – Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wetensch., Ser. A., 1983, vol. 86, № 2, p. 229–241.

УДК 517.95 МАТЕМАТИКА

Академик И.М. ГЕЛЬФАНД, В.С. РЕТАХ, В.В. СЕРГАНОВА

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЭЙРИ, КЛЕТКИ ШУБЕРТА И ЖОРДАНОВЫ ГРУППЫ

Цель этой публикации – изложить обобщение теории функций Эйри на многие переменные. Наш подход параллелен подходу к общей теории гипергеометрических функций, изложенному в [1–3]. Обобщенные функции Эйри определяются как решения специальных голономных систем дифференциальных уравнений на некотором расслоении на грассмановом многообразии. При этом роль, которую в [1–3] играла подгруппа диагональных матриц, в нашей теории играет другая максимальная коммутативная подгруппа матриц – жорданова (см. п. 1).

Через G_k^n обозначим грассманово многообразие k-мерных подпространств в n-мерном пространстве. В работах [1–3] важную роль играло разбиение G_k^n на так называемые страты. У нас аналогичную роль играет разбиение G_k^n на клетки Шуберта.

Подобно тому как общая теория гипергеометрических функций для G_2^4 приводит к классическому гипергеометрическому уравнению и функции Гаусса [1, 2], теория обобщенных функции Эйри для G_2^4 приводит к классическому уравнению Эйри. Решением этого уравнения является функция Эйри, описывающая асимптотику волнового поля вблизи гладкой каустики. Для G_2^5 мы получаем функцию Пирси [4], описывающую эту асимптотику вблизи точки возврата каустики, а для G_2^6 и G_2^7 – выражения для асимптотики вблизи "ласточкина хвоста" и "бабочки" соответственно. Асимптотики вблизи фокальных точек волнового поля связаны с клетками Шуберта ненулевых коразмерностей в G_3^9 и G_3^{12}.

Жорданова группа является централизатором максимальной жордановой клетки. Централизаторы других матриц, составленных из жордановых клеток мень-

Вычислительный центр МГУ

шей размерности, приводят к обобщениям различных конфлюэнтных гипергеометрических функций (Куммера, Уиттекера, Бесселя, Вебера и др.).

1. Пусть Z_k^n – многообразие матриц $z = (z_{ij})$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$, ранга k над полем вещественных или комплексных чисел. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ – произвольный набор комплексных чисел.

Определение 1. Системой обобщенных уравнений Эйри на Z_k^n с показателями однородности $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ называется система дифференциальных уравнений

$$(1_1) \quad \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \frac{\partial F}{\partial z_{lj}} = -\delta_{il} F, \qquad i, l = 1, \ldots, k,$$

$$(1_2) \quad \sum_{j=1}^{n-p} \sum_{i=1}^{k} z_{ij} \frac{\partial F}{\partial z_{ij+p}} = \alpha_p F, \qquad p = 1, \ldots, n-1,$$

$$(1_3) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z_{ip} \partial z_{jq}} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_{iq} \partial z_{jp}}, \qquad i, j = 1, \ldots, k, \qquad p, q = 1, \ldots, n.$$

Выясним смысл дифференциальных уравнений (1_1). Через $GL(n)$ обозначим группу обратимых $(n \times n)$-матриц. Определены левое действие группы $GL(k)$ и правое действие группы $GL(n)$ на Z_k^n формулой $z \to gzh$, $g \in GL(k)$, $h \in GL(n)$. Из уравнений (1_1) выводится

Предложение 1. *Если F – решение системы* (1), *то* $F(gz) = (\det g)^{-1} F(z)$.

Предложение 1 показывает, что решения системы (1), по существу, зависят от k-мерных подпространств n-мерного линейного пространства, натянутых на строки матриц из Z_k^n.

Перейдем к уравнениям (1_2). Нам понадобится несколько определений. Пусть J – коммутативная группа Ли. Функция χ на J со значениями в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ называется характером группы J, если $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in J$. Назовем жордановой группой $J(n)$ подгруппу группы $GL(n)$, состоящую из матриц $[a_0, \ldots, a_{n-1}] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \tau^i$, где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ – произвольные числа, а $\tau = (\tau_{ij})$ – матрица такая, что $\tau_{i,i+1} = 1$, $\tau_{ij} = 0$ при $j - i \neq 1$.

Через $J_0(n)$ обозначим подгруппу в $J(n)$, состоящую из матриц вида $[a_0, \ldots, a_{n-1}]$, где $a_0 = 1$.

Пусть, далее, $u = 1 + b_1 T + b_2 T^2 + \ldots$ – формальный степенной ряд от переменной T. Определим многочлены $\theta_i(b_1, \ldots, b_i)$ из разложения

$$(2) \quad \log(1 - u) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(b_1, \ldots, b_i) T^i.$$

Очевидно, что

$$\theta_1 = b_1, \qquad \theta_2 = b_2 - \frac{b_1^2}{2}, \qquad \theta_3 = b_3 - b_1 b_2 + \frac{b_1^3}{3}.$$

Предложение 2. *Для каждого набора* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ *формула*

$$(3) \quad \chi_\alpha([1, a_1, \ldots, a_{n-1}]) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \theta_i(a_1, \ldots, a_i)\right)$$

определяет характер группы $J_0(n)$.

Обратно, для каждого характера χ *существует набор* α *такой, что* χ *выражается формулой* (3).

Предложение 3. *Для каждого решения F системы* (1) *и каждого* $c = [c_0, \ldots, c_{n-1}] \in J(n)$

$$F(zc) = F(z) \cdot \chi_\alpha([1, c_1 c_0^{-1}, \ldots, c_{n-1} c_0^{-1}]) c_0^{-k}.$$

Это предложение непосредственно выводится из уравнений (1_2).

2. Теорема 1. *Система* (1) *голономна и, следовательно, имеет конечное число линейно-независимых решений в окрестности каждой точки* Z_k^n.

Таким образом, система (1) аналогична системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для доказательства теоремы рассмотрим характеристическое многообразие $M_F \subset T^* Z_k^n$ (см. [2]) системы (1). Для каждой матрицы $z \in Z_k^n$ через z_t обозначим матрицу, составленную из первых t столбцов матрицы z. Пусть $W = \{z \in Z_k^n \mid \det z_k \neq 0\}$. Очевидно, подмножество W открыто и плотно в Z_k^n.

Предложение 4. *Пусть* $z \in W$. *Тогда точка* $(z, \xi) \in M_F$ *в том и только том случае, когда* $\xi = 0$. *Размерность* M_F *в любой точке* $z \in Z_k^n$ *не превосходит* kn.

Теорема 1 выводится из предложения 4.

Пусть $M_{F,z} = \{(a, \xi) \in M_F \mid a = z\}$. Сформулируем утверждение о размерности $M_{F,z}$. Сопоставим каждой точке $z \in Z_k^n$ последовательность $\pi(z) = (s_0, \ldots, s_k)$ такую, что $s_t = \max\{t \mid \operatorname{rk} z_t = i\}$, $i = 0, \ldots, k$. Пусть π – возрастающая последовательность из $k+1$ натурального числа. Множество $W_\pi = \{z \in Z_k^n \mid \pi(z) = \pi\}$ назовем клеткой Шуберта индекса π. Множество подпространств, натянутых на строки матриц из W_π, образует клетку Шуберта индекса π в многообразии k-мерных подпространств n-мерного пространства.

Предложение 5. *Размерность* $M_{F,z}$ *зависит только от клетки Шуберта, содержащей* z, *и равна* $\max\limits_{i=0,\ldots,k-1} [(s_i + k - 2i - 1)\operatorname{sgn}(s_i - i)]$.

Приведем формулу для размерности пространства решений на открытом всюду плотном множестве $W \subset Z_k^n$. В наших обозначениях W есть клетка Шуберта индекса $(0, 1, \ldots, k)$.

Теорема 2. *В окрестности каждой точки* $z \in W$ *система* (1) *при* $\alpha_{n-1} \neq 0$ *имеет* $\binom{n-2}{k-1}$ *линейно-независимых регулярных решений.*

3. Для доказательства теоремы 2 перепишем систему (1) в координатах (v_{ij}), трансверсальных к траекториям группы $GL(k)$. Полученная система представляет и самостоятельный интерес.

Пусть V_k^n – пространство всех матриц $v = (v_{ij})$, $i = 1, \ldots, k$, $j = k+1, \ldots, n$. Каждая матрица $z \in W$ под действием группы $GL(k)$ однозначно приводится к матрице вида $(\mathbf{1}_k, v)$, где $\mathbf{1}_k$ – единичная матрица, а $v \in V_k^n$. Таким образом, определено взаимно однозначное соответствие между подпространствами, натянутыми на строки матриц из W, и матрицами из V_k^n.

Предложение 6. *Система* (1) *определяет следующую систему дифференциальных уравнений на* V_k^n (*мы полагаем* $v_{ij} = \delta_{ij}$ *при* $i \leqslant k$, $v_{ij} = 0$ *при* $i > k$):

$$\sum_{j=p+1}^{n} \sum_{i=1}^{k} v_{i\,j-p} \frac{\partial F}{\partial v_{ij}} = \alpha_p F, \qquad p = k, \ldots, n-1,$$

$$(4) \qquad \sum_{j=p+1}^{n} \sum_{i=1}^{k} (v_{i\,j-p} - v_{i+p\,j}) \frac{\partial F}{\partial v_{ij}} = \alpha_p F, \qquad p = 1, \ldots, k,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v_{ip}\, \partial v_{jq}} = \frac{\partial^2 F}{\partial v_{iq}\, \partial v_{jp}}, \qquad i, j = 1, \ldots, k, \qquad p, q = k+1, \ldots, n.$$

Теореме 2 равносильна

Теорема 2′. *Число d линейно-независимых решений системы* (4) *при* $\alpha_{n-1} \neq 0$ *в окрестности произвольной точки из* V_k^n *равно* $\binom{n-2}{k-1}$.

Оценка $d \leqslant \binom{n-2}{k-1}$ выводится из общей теории голономных систем (ср. [2]), оценка d снизу вытекает из приводимой в п. 4 теоремы 3.

4. Начнем с конструкций, изложенных в [6, 8]. Пусть $P_v(t)$ – произвольный полином от переменных $v \in \mathbf{C}^N$, $t \in \mathbf{C}^p$. Через μ_v обозначим сумму чисел Милнора по всем особым точкам полинома при фиксированном v и переменном t.

Пусть $M_{a,v} = \{t \mid \operatorname{Re} P_v(t) \geqslant a\}$, $N_{a,v} = \{t \mid \operatorname{Re} P_v(t) = a\}$. Через $H_p(a, v)$ обозначим группу относительных гомологий $H_p(M_{a,v}, N_{a,v})$. Для каждого $v \in \mathbf{C}^N$ существует число a_0 такое, что $H_p(a, v) \cong \mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}$ (μ_v раз) при $a < a_0$.

При $b < a < a_0$ определено каноническое отображение $H_p(b, v) \to H_p(a, v)$. Пусть $H_p(v)$ – индуктивный предел $H_p(a, v)$ при $a \to -\infty$. Очевидно, что $H_p(v)$ изоморфна прямой сумме μ_v экземпляров $\mathbf{Z}$.

Для каждой точки v, лежащей в достаточно малой окрестности фиксированной точки v_0, существует канонический изоморфизм $\kappa_v\colon H_p(v_0) \xrightarrow{\sim} H_p(v)$, индуцированный связностью Гаусса–Манина [3].

Пусть $v = (v_{ij})$, $i = 1, \ldots, k$, $j = k+1, \ldots, n$; $t = (t_1, \ldots, t_{k-1})$. Положим $w_l = t_l$ для $l = 1, \ldots, k-1$, $w_{l-1} = v_{1l} + v_{2l}t_1 + \ldots + v_{kl}t_{k-1}$ для $l = k+1, \ldots, n$. Пусть $P_v(t)$ задан формулой

$$P_v(t) = \sum_{l=1}^{n-1} \alpha_l \theta_l(w_1, \ldots, w_l),$$

где многочлены θ_l определены разложением (2).

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ *– базис в* $H_{k-1}(v_0)$, $v_0 \in V_k^n$. *Для* $1 \leqslant m \leqslant \mu$ *функции*

$$\Phi_m(v) = \int_{\kappa_v(\gamma_m)} \exp P_v(t)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1}$$

определены в некоторой окрестности точки v_0 *и образуют набор линейно-независимых решений системы* (4).

Предложение 7. *Если последний из показателей однородности* α_{n-1} *не равен нулю, то* $\mu_v = \binom{n-2}{k-1}$.

Предложение выводится из теоремы Кушниренко [7] или из явной конструкции образующих группы $H_{k-1}(v)$. Эта конструкция интересна сама по себе, но не приводится здесь из-за недостатка места.

Наиболее простую структуру базис $H_{k-1}(v)$ имеет при $k = 2$. Пусть $\Gamma'(p, q)$ – луч в $\mathbf{C}$ с началом в 0, проходящий через точку $e^{2\pi i p/q}$. Положим $\Gamma(p, q) = \Gamma'(p, q) \cup [0, +\infty[$. Контуры $\Gamma(p, n-1)$ при $p = 1, \ldots, n-2$ образуют базис в $H_1(v)$. Это утверждение обобщает

Предложение 8. *Пусть все числа* $\dfrac{n-1}{m-1}$ *при* $m = 2, \ldots, k$ *целые. Тогда циклы* $\prod_{m=2}^{k} \Gamma\left(p_m, \dfrac{n-1}{m-1}\right)$, *где* $p_m + 1 \leqslant \dfrac{n-1}{m-1}$, *образуют базис в* $H_{k-1}(v)$.

5. Изучим систему (4) для случая $k = 2$. Для этого запишем ее в координа-

тах, трансверсальных действию группы $J(n)$. Предположим, что $\alpha = \alpha_{n-1} \neq 0$. Пусть

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \theta_i (t, v_{13} + tv_{23}, \ldots, v_{1i+1} + tv_{2i+1}),$$

где θ_i — многочлены, определенные формулой (2). Положим $t_1 = t + \dfrac{\alpha_{n-2}}{\alpha} v_{1\,n-1}$. Тогда P записывается в виде $P = u_0 + u_1 t_1 + \ldots + u_{n-3} t_1^{n-3} + (-1)^n/(n-1) \cdot t_1^{n-1}$. Коэффициенты u_i при $i \geqslant 1$ постоянны на орбитах группы $J(n)$ в V_2^n.

Положим $f = e^{-u_0} F$.

Теорема 4. *Система* (4) *приводится к виду*

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_{i+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-4, \\ &\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_{n-3}} = u_1 f + \sum_{j=2}^{n-3} j u_j \frac{\partial f}{\partial u_{j-1}}. \end{aligned}$$

При $n = 4$ эта система сводится к уравнению Эйри $\alpha f'' - u_1 f = 0$. При $n = 5$ система сводится к двум уравнениям, первое из них — уравнение теплопроводности.

Покажем, что по существу решение системы (5) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Пусть $i = (i_2, \ldots, i_{m-1})$ — мультииндекс, $i_j \geqslant 0$ при $2 \leqslant j \leqslant m-1$. Положим $l(i) = 2i_2 + 3i_3 + \ldots + (m-1)i_{m-1}$, $i! = i_2!\, i_3! \ldots i_{m-1}!$, $u^i = u_2^{i_2} \ldots u_{m-1}^{i_{m-1}}$. Как обычно, $\varphi^{(p)}(t)$ — производная порядка p от $\varphi(t)$.

Предложение 9. *Ряд* $\sum\limits_{i=(i_2,\ldots,i_{n-3})} \varphi^{(l(i))}(u_1) \cdot \dfrac{u^i}{i!}$ *является решением системы* (5) *тогда и только тогда, когда* $\varphi(u_1)$ *— решение уравнения* $\alpha\varphi^{(n-2)} - u_1\varphi = 0$.

Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика"
Академии наук СССР, Москва

Поступило
29 VI 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И.М.* — ДАН, 1986, т. 288, № 1, с. 14–18. 2. *Гельфанд И.М., Гельфанд С.И.* — ДАН, 1986, т. 288, № 1, с. 279–283. 3. *Васильев В.А., Гельфанд И.М., Зелевинский А.В.* — ДАН, 1986, т. 290, № 2, с. 277–281. 4. *Pearcey T.* — Phil. Mag., 1946, vol. 37, p. 311–317. 5. *Лукин Д.С., Палкин Е.А.* В кн.: Распространение декаметровых волн. М., 1980, с. 37–46. 6. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с. 7. *Кушниренко А.Г.* — Функц. анал. и его прилож., 1975, т. 9, вып. 1, с. 74–75. 8. *Malgrange B.* — Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 1974, 4 ser., vol. 7, p. 405–430.