Дискретная математика

том 3 выпуск 3 * 1991

УДК 519.954

НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ВРЕМЕННО́Й СЛОЖНОСТИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ ОБ УНИКАЛЬНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ

Л.В. Носов

Рассматривается целочисленная задача об уникальности элементов, которая формулируется следующим образом: проверить, найдется ли среди данных n целых чисел хотя бы одна пара равных между собой. Доказано, что $\Omega(n \log n)$ является нижней границей временно́й сложности этой задачи в модели линейного дерева решений. Получены нижние границы временно́й сложности нескольких геометрических задач, к которым она сводится.

При исследовании нижних границ временно́й сложности широко используется метод сведения задачи, для которой нижняя граница известна, к рассматриваемой. Задача об уникальности элементов наряду с некоторыми другими, в частности, сортировкой, составляет базис для подобных исследований. Нижние границы временно́й сложности многих комбинаторных геометрических задач (например, задач о пересечениях и близости [1, с. 342, 236]) получены с ее помощью. В ряде случаев для этих целей необходима задача об уникальности элементов в дискретной постановке. Исследование нижней границы временно́й сложности последней нетривиально в отличие, например, от сортировки дискретных данных. В то же время, ряд авторов (в том числе и автор этой статьи) использовали без обоснования оценку $\Omega(n \log n)$ в качестве нижней границы ее временно́й сложности [2, 3, 4].

В настоящей работе исследуются нижняя граница временной сложности целочисленной задачи об уникальности элементов, а также нижние границы нескольких комбинаторных геометрических задач, к которым она сводится.

Задача об уникальности элементов формулируется следующим образом: проверить, найдется ли среди данных n чисел хотя бы одна пара равных между собой. Если исходные данные действительные, то эта задача является частным случаем задачи о принадлежности: для любого $x \in \mathbf{R}^n$ проверить справедливость условия $x \in \bigcup_{j \in J} M_j$, где $\mathbf{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\{M_j\}_{j \in J}$ – множество открытых попарно отделимых областей в $\mathbf{R}^n$, J – конечное множество индексов. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $J = S_n$ (S_n – множество подстановок на n-элементом множестве), $M_\pi = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_{\pi(1)} < x_{\pi(2)} < \ldots < x_{\pi(n)}, \pi \in S_n\}$.

Известно, что $\Omega(\log |J|)$ является нижней границей временно́й сложности задачи о принадлежности, если в качестве модели вычислений выбрать: линейное дерево решений [5]; алгебраическое дерево решений [6, 7]. Поэтому $\Omega(n \log n)$ яв-

© Л.В. Носов, 1991

ляется нижней границей временно́й сложности задачи об уникальности элементов для действительных чисел. Вопрос о нижней границе в случае целых чисел открыт, поскольку не каждый алгоритм, который решает задачу для целых чисел, решает ее для действительных чисел. Приведем пример такого алгоритма. Пусть A – произвольный алгоритм, решающий задачу об уникальности элементов для действительных чисел. Определим алгоритм $\bar{A}$ следующим образом:

1) решаем с помощью алгоритма A задачу для чисел $2x_1 + 1, 2x_2, \ldots, 2x_n$;

2) если находится хотя бы одна пара равных между собой чисел, то алгоритм завершает работу;

3) в противном случае проверяем на равенство следующие пары чисел: (x_1, x_2), $(x_1, x_3), \ldots, (x_1, x_n)$.

Понятно, что алгоритм $\bar{A}$ решает задачу об уникальности элементов для любых n целых чисел. В то же время существуют n действительных не равных между собой чисел, среди которых алгоритм $\bar{A}$ находит пару равных.

Задача об уникальности элементов для множества целых чисел является частным случаем следующей целочисленной задачи о принадлежности:

для любого $x \in \mathbf{Z}^n$ проверить справедливость условия $x \in \bigcup_{j \in J} (M_j \cap \mathbf{Z}^n)$, где $\mathbf{Z}^n$ – n-мерная целочисленная решетка, $M_j \cap \mathbf{Z}^n \neq \phi$, $j \in J$.

Исследуем нижнюю границу временно́й сложности целочисленной задачи о принадлежности, если в качестве модели вычислений используется линейное дерево решений. Во внутренних узлах линейного дерева решений размещаются условия вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$, где f – линейная функция, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – входные данные. Листьям соответствует решение задачи (в случае задачи о принадлежности им соответствуют ответы "да" или "нет"). Выполнение алгоритма начинается с корня дерева решений и заканчивается при достижении листа. В каждом внутреннем узле выполняется проверка размещенного в нем условия и, в зависимости от результата проверки, происходит переход к следующему узлу. Высота дерева характеризует временную сложность алгоритма для худшего случая.

Каждый лист l линейного дерева, решающего целочисленную задачу о принадлежности, определяет множество $D_l \subseteq \mathbf{Z}^n$ следующим образом: $x \in D_l$ тогда и только тогда, когда при подаче x на вход алгоритма он завершается по достижении листа l. Наховем *целочисленно-выпуклым множеством* в $\mathbf{R}^n$ пересечение некоторого выпуклого множества с $\mathbf{Z}^n$. Тогда каждое множество D_l является по определению целочисленно-выпуклым. Докажем следующее предложение.

Предложение 1. *Если выполняются условия*:

1) *каждая область M_j – конус*;

2) *в уравнениях разделяющих (области M_j) гиперплоскостей все коэффициенты целые*;

то высота любого линейного дерева, решающего целочисленную задачу о принадлежности, не меньше, чем $\log |J|$.

Доказательство. Предложение будет доказано, если показать, что в любом линейном дереве решений T, решающем целочисленную задачу о принадлежности, число листьев не меньше, чем $|J|$ (тогда высота T не превосходит $\log |J|$).

Рассмотрим множество листьев L дерева T, которые соответствуют ответу "да" на вопрос "$x \in \bigcup_{j \in J} (M_j \cap \mathbf{Z}^n)$?" Докажем, что $|L| \geqslant |J|$.

Выберем в каждом множестве $M_j \cap \mathbf{Z}^n$ произвольный элемент x^j. В силу отделимости областей M_{j_1} и M_{j_2} на отрезке, соединяющем x^{j_1} и x^{j_2}, всегда найдется точка x^{j_1, j_2}, которая не принадлежит $\bigcup_{j \in J} M_j$. В качестве x^{j_1, j_2} выберем точку пересечения этого отрезка с одной из разделяющих гиперплоскостей.

Заметим, что из условия 1) вытекает, что в уравнениях разделяющих гиперплоскостей свободные члены равны нулю. Отсюда, а также в силу условия 2) и выбора x^j, следует, что существует такое целое $\delta_{j_1, j_2} \neq 0$, что $\delta_{j_1, j_2} x^{j_1, j_2} \in \mathbf{Z}^n$. Положим $\delta = \prod_{j_1 \neq j_2} \delta_{j_1, j_2}$. Понятно, что $|\delta| x^{j_1, j_2} \notin \bigcup_{j \in J} (M_j \cap \mathbf{Z}^n)$, так как области M_j являются конусами.

Рассмотрим множество $\{|\delta| x^j\}_{j \in J}$. Поскольку M_j – конус, $|\delta| x^j \in M_j \cap \mathbf{Z}^n$. Поэтому $|\delta| x^j$ принадлежит некоторому D_l, $l \in L$. Докажем, что никакие две точки $|\delta| x^{j_1}$ и $|\delta| x^{j_2}$, $j_1 \neq j_2$, не могут принадлежать одному и тому же D_l. Тогда $|L| \geqslant |J|$.

Если предположить, что $|\delta| x^{j_1}$ и $|\delta| x^{j_2}$ принадлежат некоторому D_l, $l \in L$, то точка $|\delta| x^{j_1, j_2}$ также принадлежит D_l (поскольку D_l – целочисленно-выпуклое множество, а $|\delta| x^{j_1, j_2}$ лежит на отрезке, соединяющем $|\delta| x^{j_1}$ и $|\delta| x^{j_2}$, и имеет целочисленные координаты). Однако точка $|\delta| x^{j_1, j_2}$ не может принадлежать D_l, так как она не принадлежит $\bigcup_{j \in J} (M_j \cap \mathbf{Z}^n)$. Предложение 1 доказано.

Следствие 1. *Нижняя граница временно́й сложности задачи об уникальности элементов для целых чисел в модели линейного дерева решений равна* $\Omega(n \log n)$.

Доказательство. Условия предложения 1 выполняются для целочисленной задачи об уникальности элементов. Поэтому нижняя граница временно́й сложности равна $\Omega(\log |J|) = \Omega(\log n!) = \Omega(n \log n)$.

Перейдем к исследованию нижних границ временной сложности геометрических задач. Будем говорить, что *задача A линейно сводима к задаче B*, если выполняются следующие условия:

1) задачи A и B решаются в модели линейного дерева решений;

2) входные данные задачи A линейно преобразуются во входные данные задачи B;

3) выходу задачи B соответствует корректное решение задачи A.

Если задача A линейно сводима к задаче B, то любое линейное дерево, решающее задачу B, преобразуется в линейное дерево той же высоты, решающее задачу A. Поэтому для решения задачи B требуется, по крайней мере, столько же времени, сколько необходимо для решения задачи A.

Назовем *прямоугольной фигурой* область на плоскости, ограниченную множеством простых попарно непересекающихся многоугольных контуров со сторонами, параллельными осям координат. Точка на плоскости является внутренней точкой фигуры тогда и только тогда, когда она является внутренней точкой нечетного числа многоугольников, ограниченных исходными контурами. Назовем контур *внешним*, если при его обходе по часовой стрелке внутренность фигуры остается справа, если же внутренность фигуры остается слева, то назовем контур *внутренним*. Суммарное число граничных контуров фигуры обозначим через n.

Исследование нижних границ временно́й сложности геометрических задач осуществляется путем линейного сведения к ним целочисленной задачи об уникальности элементов. Поэтому наше исследование ограничивается случаем прямоугольных фигур (известные алгоритмы решения рассматриваемых задач для прямоугольных фигур реализуются на линейном дереве решений, в то время как алгоритмы для произвольных многоугольных фигур требуют алгебраического дерева решений [4]). В перечисленных ниже задачах прямоугольная фигура задана набором своих граничных контуров.

Задача 1. Определить, является ли прямоугольная фигура совокупностью односвязных областей.

Задача 2. Вычислить площадь прямоугольной фигуры.

Задача 3. Построить разбиение прямоугольной фигуры на прямоугольники.

Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу, которая является частным случаем задачи 1.

Задача 4. Дано множество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, и попарно не пересекающимися границами. Определить, есть ли в этом множестве хотя бы одна пара пересекающихся между собой прямоугольников.

Предложение 2. *Целочисленная задача об уникальности элементов линейно сводима к задаче* 4.

Доказательство. Для каждой точки x_i из множества целых чисел $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ построим квадрат P_i со стороной $2/(3_i)$ и центром в точке x_i. Понятно, что $P_i \cap P_j = \phi$, если $x_i \neq x_j$, и $P_i \supset P_j$, если $x_i = x_j$, $i < j$.

Следствие 2. $\Omega(n \log n)$ – *нижняя граница временной сложности задач* 1–4 *в модели линейного дерева решений.*

Предложение 3. $\Omega(n \log n)$ – *нижняя граница временной сложности задач* 2 *и* 3.

Доказательство. Докажем, что задачи 2 и 3 линейно сводимы к задаче 1.

В качестве модели вычислений для решения задачи 2 рассмотрим линейное дерево, в листьях которого происходит вычисление площади фигуры согласно формулам $S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i S_i$, где S_i – площадь многоугольника, ограниченного i-м контуром фигуры; $\delta_i = 1$, если i-й контур внешний; $\delta_i = -1$, если i-й контур внутренний. Таким образом, листьям, в которых все δ_i равны 1, соответствует ответ "да", а прочим листьям ответ "нет" на вопрос, поставленный в задаче 1.

Набор прямоугольников из разбиения прямоугольной фигуры однозначно определяет ее площадь, поэтому ему соответствует некоторое множество $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$. Предложение 3 доказано.

В заключение автор выражает глубокую признательность Корнеенко Н.М. за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. – М.: Мир, 1989.
2. Rawlins G., Widmayer P., Wood D. Hole problems for rectangles in the plane // SIAM J. Disc. Math. – 1988. – V. 1, № 1. – P. 86–91.
3. Фейнберг В.З. Геометрические задачи машинной графики больших интегральных схем.– М.: Радио и связь, 1987.
4. Носов Л.В., Носова Е.Г., Рабинович Е.Б., Фейнберг В.З. Оптимальные алгоритмы взаиморасположения и покрытия плоских многоугольных областей // Изв. АН БССР. – 1985. – № 4. – С. 28–36.
5. Dobkin D.P., Lipton R.J. On the complexity under varying sets of primitives // J. of Comput. and System Sci. – 1979. – № 18. – P. 86–91.
6. Steele J.M., Yao A.C. Lower bounds for algebraic decision trees // J. of Algorithms. – 1982. – № 3. – P. 1–8.
7. Ben-Or M. Lower bounds for algebraic computation trees // 15-th Symp. on Theory of Comput. – 1983. – P. 80–86.

Статья поступила 11.09.89