А. П. Баранов, Ю. А. Баранов, Критерий степени рассеивания в задаче однородности выборок при большом числе исходов и испытаний,
Дискрет. матем., 2005, том 17, выпуск 2, 19–48

Дискретная математика

том 17 выпуск 2 * 2005

УДК 519.2

Критерий степени рассеивания в задаче однородности выборок при большом числе исходов и испытаний

© 2005 г. А. П. Баранов, Ю. А. Баранов

Для проверки однородности r независимых полиномиальных схем с одинаковым числом исходов N в неклассических условиях, когда числа наблюдений n_d, $d = 1, \dots, r$, в каждой из схем и число исходов N стремятся к бесконечности, в работе вводится статистика $I(\lambda, r)$, которая является многомерным аналогом статистики $I(\lambda)$, введенной Ридом и Кресси. При $N \to \infty$, $n_d N^{-1} \to \infty$, $d = 1, \dots, r$, получены условия асимптотической нормальности распределений $I(\lambda)$ и $I(\lambda, r)$ при любом целом фиксированном λ, $\lambda \neq 0, -1$. Выражения параметров нормировки и центрировки найдены в явном виде как для гипотезы H_0, состоящей в том, что распределения r схем одинаковы, так и для некоторого класса близких к H_0 альтернатив.

Рассматривается статистика $I(\lambda)$ — степень рассеивания, исследуемая в [1], и ее многомерный вариант $I(\lambda, r)$, вводимый в настоящей работе для решения задачи однородности r независимых полиномиальных схем $M(n_1, P_1), \dots, M(n_r, P_r)$ с N исходами, с объемами испытаний $n_1, \dots, n_r$ и N-мерными векторами вероятностей исходов $P_1, \dots, P_r$. При $\lambda = 1$ статистика $I(\lambda)$ сводится к классической статистике хи-квадрат. При $N \to \infty$, $n_d N^{-1} \to \infty$, $d = 1, \dots, r$, получены условия асимптотической нормальности распределений $I(\lambda)$ и $I(\lambda, r)$ при любом целом фиксированном λ, $\lambda \neq 0, -1$. Выражения параметров нормировки и центрировки найдены в явном виде как для гипотезы H_0, состоящей в том, что $P_1 = \ldots = P_r$, так и для некоторого класса близких к H_0 альтернатив.

Статистика $I(\lambda)$ относится, как отмечается еще в [1], к классу разделимых статистик. При фиксированном N и $n_1, \dots, n_r \to \infty$ статистика $I(\lambda)$ исследуется в [1], где показана сходимость ее распределения при разных гипотезах к центральному и нецентральному распределениям хи-квадрат. Изучение предельного поведения распределения $I(\lambda)$ при $N \to \infty$ возможно на основе общей нормальной предельной теоремы из [2]. Однако, применение результатов работы [2], а также предельных теорем из [3, 4] для разделимых статистик наталкивается на ряд проблем, связанных с необходимостью получения явных асимптотических разложений смешанных моментов пуассоновских случайных величин. Указанную проблему удается решить на основе использования представления степенной функции в виде разложения по обобщенным факториальным степеням [5] с равномерной оценкой остаточного члена [6].

Пусть $\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_r$ — N-мерные независимые между собой векторы частот исходов в соответствующих полиномиальных схемах $M(n_1, P_1), \dots, M(n_r, P_r)$,

$$\bar{\nu}_d = (\nu_{d1}, \dots, \nu_{dN}), \quad \sum_{j=1}^{N} \nu_{dj} = n_d,$$

$$P_d = (p_{d1}, \dots, p_{dN}), \quad \sum_{j=1}^{N} p_{dj} = 1, \quad d = 1, \dots, r.$$

Статистика рассеивания $I(\lambda)$, рассматриваемая в [1], для любого действительного числа $\lambda \neq 0, -1$, имеет вид

$$I(\lambda) = \sum_{d=1}^{r} I_d(\lambda), \tag{1}$$

где

$$I_d(\lambda) = \binom{\lambda+1}{2}^{-1} \sum_{j=1}^{N} \nu_{dj} \left(\left(\frac{\nu_{dj} n_0}{(\nu_{1j} + \ldots + \nu_{rj}) n_d} \right)^{\lambda} - 1 \right), \qquad n_0 = n_1 + \ldots + n_r.$$

При вычислении статистик $I_d(\lambda)$ для значений $\lambda < -1$ может возникнуть неопределенность вида $0^{1+\lambda}$, если $\nu_{dj} = 0$, требующая дополнительного соглашения о том, как определять функцию x^a при $a < 0$ в точке $x = 0$. Не углубляясь в дискуссию по этому вопросу, мы будем в дальнейшем считать, что слагаемые в $I_d(\lambda)$, соответствующие непоявившимся исходам (то есть при $\nu_{dj} = 0$), не учитываются, то есть полагаются равными нулю. Это соглашение позволяет реально вычислять значения статистик $I_d(\lambda)$ при любых λ и не оказывает существенного влияния на развиваемую далее теорию распределений этих статистик.

В [1] отмечается, что некоторые классические статистики критериев однородности являются частными случаями $I(\lambda)$. Например, легко убедиться, что при $\lambda = 1$ статистика $I(\lambda)$ является статистикой критерия хи-квадрат. Аналоги статистики степени рассеивания применяются также для проверки гипотезы принадлежности выборки заданному распределению, и в этой задаче распределение статистики $I(\lambda)$ исследовано при $n \to \infty$ как для основной гипотезы, так и для некоторого класса альтернатив. Так, при фиксированном N в [1] приведены результаты по сходимости распределения $I(\lambda)$ к центральному и нецентральному распределению хи-квадрат с $N - 1$ степенями свободы для $\lambda > -1$. Сделана также попытка рассмотрения предельного распределения статистики $I(\lambda)$ в задаче принадлежности при $N \to \infty$, однако, параметры предельных распределений получены в виде, малопригодном для конкретных применений. В [7] получены явные выражения предельных распределений в задаче принадлежности при $N \to \infty$, $n \to \infty$ и любом целом λ, $\lambda \neq 0, -1$, как для основной, так и для альтернативной гипотезы.

Распределение статистики $I(\lambda)$ в задаче однородности исследовано еще меньше. Фактически, явно проработан только случай, когда $\lambda = 1$ и N фиксировано, то есть для статистики хи-квадрат получено предельное распределение при основной и альтернативной гипотезах. Предельным распределением является в этом случае распределение хи-квадрат с $(N-1)(r-1)$ степенями свободы. Используя теоремы сходимости ([8], с. 335–340), можно также аналогично [1] доказать сходимость распределения статистики $I(\lambda)$ в задаче однородности и при фиксированном N, $\lambda > -1$ к распределению хи-квадрат с $(N-1)(r-1)$ степенями свободы.

Таким образом, в задаче однородности случай $N \to \infty$, $n_1, \ldots, n_r \to \infty$ для статистики $I(\lambda)$, в том числе и для статистики хи-квадрат ($\lambda = 1$), до настоящего времени не исследован. Ситуация, когда $N \to \infty$, для задачи однородности ранее рассматривалась в [9], где исследован один из возможных критериев однородности выборок, основанный на квадратичной разделимой статистике, отличный от классического критерия хи-квадрат, при $N \to \infty$, $n_d \to \infty$, $n_d/N \to \alpha(d)$, $\alpha(d) > 0$, $d = 1, \ldots, r$. Оценена его эффективность в этих условиях при различении основной и близких альтернативных гипотез. В предлагаемой работе мы рассмотрим предельное распределение статистики $I(\lambda)$ в задаче однородности r выборок при $N \to \infty$, $n_d \to \infty$ и $n_d/N \to \infty$, $d = 1, \ldots, r$, как для гипотезы H_0: $P_1 = \ldots = P_r$, так и для близких альтернатив. Для изучения случая $N \to \infty$ будем использовать основную теорему работы [2], которую для наших целей приведем в несколько ослабленном варианте.

Пусть v_{dj} — независимые в совокупности случайные величины, распределенные по закону Пуассона со средними, соответственно, $n_d p_{dj}$, $d = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, N$. Далее факт распределенности по закону Пуассона со средним α некоторой случайной величины v будем обозначать символом $v \sim \Pi(\alpha)$, а факт распределенности случайного вектора v по нормальному закону со средним 0 и ковариационной матрицей Q — символом $v \sim N(0, Q)$. Везде далее будем подразумевать под обозначением вектора вектор-строку.

Для формулировки основной теоремы работы [2] используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&n = n(N) = (n_1, \ldots, n_r), && n_1 = n_1(N), \ldots, n_r = n_r(N),\\
&\alpha_j = \alpha_j(N) = (\alpha(1j), \ldots, \alpha(rj)), && \alpha(dj) = n_d(N) p_{dj}(N),\\
&P_d = P_d(N) = (p_{d1}, \ldots, p_{dN}), && d = 1, \ldots, r,
\end{aligned}$$

$\{f_j(y, N)\}$ — множество серий k-мерных функций

$$f_j(y, N) = (f_{1j}(y, N), \ldots, f_{kj}(y, N)), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

от r-мерного целочисленного аргумента $y = (y_1, \ldots, y_r)$.

Таким образом, мы рассматриваем схему серий

$$M_1(n_1(N), P_1(N)), \ldots, M_r(n_r(N), P_r(N))$$

полиномиальных схем, и номер серии N, одновременно являющийся и числом исходов в полиномиальных схемах N-й серии, там, где это не вызовет недоразумения, будем опускать.

Полагая $V_j = (v_{1j}, \ldots, v_{rj})$, $\nu_j = (\nu_{1j}, \ldots, \nu_{rj})$, разделимой статистикой, следуя [4], будем называть случайный вектор

$$L = L_f(N) = \sum_{j=1}^{N} f_j(\nu_j),$$

распределение которого связано с условным распределением случайного вектора

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} f_j(V_j)$$

равенством

$$\mathbf{P}(L < x) = \mathbf{P}\left(\varphi < x \;\Big|\; \sum_{j=1}^{N} V_j = n\right), \tag{2}$$

где x принадлежит r-мерному евклидовому пространству $\mathbf{R}$, и неравенства между векторами означают выполнение соответствующих неравенств между координатами. Очевидно, что статистика $I(\lambda)$ относится к классу статистик, удовлетворяющих условию (2).

Введем еще ряд необходимых обозначений. Пусть

$$u_j = (u_{1j}, \dots, u_{rj}) = f_j(V_j) - V_j \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf},$$

где $\operatorname{diag}(a)$ — диагональная матрица с диагональю, равной вектору a, а матрица Q_{Vf} определяется равенством

$$Q_{Vf} = Q_{Vf}(N) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}(V_j - \alpha_j)^T f_j(V_j).$$

Пусть также

$$\sigma^2 = \sigma^2(N) = \operatorname{diag}(\sigma^2(1, N), \dots, \sigma^2(k, N)),$$

$$\sigma^2(s, N) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}(u_{sj} - \mathbf{E}u_{sj})^2, \qquad s = 1, \dots, k,$$

$$Q(N) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}(u_j - \mathbf{E}u_j)^T (u_j - \mathbf{E}u_j).$$

Теорема. *Пусть $N, n_1, \dots, n_r \to \infty$ и выполнены следующие условия.*

(A_1) *Существует такое P, что*

$$\max_{d,j} p_{dj} \leqslant P < 1,$$

(A_2) *Существует предел матриц*

$$Q = \lim_{N \to \infty} \sigma^{-1}(N) Q(N) \sigma^{-1}(N),$$

(A_3) *При $N \to \infty$*

$$\mu_4 = \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=1}^{N} \sigma^{-4}(s, N) \mathbf{E}(u_{sj} - \mathbf{E}u_{sj})^4 \to 0.$$

Тогда случайный вектор

$$\left(L - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E} f_j(V_j) \right) \sigma^{-1}(N)$$

имеет в пределе k-мерное распределение $N(0, Q)$.

Приведенная предельная теорема предполагает точное и явное вычисление матрицы Q_{Vf}, что в ряде случаев, и в том числе для статистики $I(\lambda)$, сделать весьма затруднительно. В противном случае проверить условие A_3 в ряде случаев невозможно. Применительно к параметрам полиномиальных схем такая ситуация возникает, например, когда функции $f_j(y)$ имеют вид рациональных функций и $n_d / N p_{dj} \to \infty$ хотя бы для одного d

из r-возможных и $j = 1, \dots, N$. Вместе с тем, приближенное, например, в виде конечной обозримой суммы с оценкой остаточного члена, вычисление матрицы Q_{Vf} является зачастую более простой задачей. Замена точного выражения Q_{Vf} его приближенным аналогом приводит к следующему варианту предельной теоремы.

Теорема 1. *Пусть $N, n_1, \dots, n_r \to \infty$, выполнено условие* A_1, *а также следующие условия.*

(A_2') *Существует предел матриц*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^{-1} Q_f(N) \sigma_N^{-1} = Q_f,$$

где

$$Q_f(N) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}(f_j(V_j) - \mathbf{E} f_j(V_j))^T (f_j(V_j) - \mathbf{E} f_j(V_j)),$$

$$\sigma_N^2 = \operatorname{diag}(\sigma_{1N}^2, \dots, \sigma_{kN}^2)$$

и $\sigma_{1N}^2, \dots, \sigma_{kN}^2$ — диагональ матрицы $Q_f(N)$.

(A_3') *При $N \to \infty$*

$$\mu_{4f} = \sum_{s=1}^{r} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{sN}^{-4} \mathbf{E}(f_{sj} - \mathbf{E} f_{sj})^4 \to 0.$$

(A_4) *При $N \to \infty$ имеет место сходимость матриц*

$$\rho_N = \sigma_N^{-1} Q_{Vf}^T(N) \operatorname{diag}^{-1/2}(n) \to 0.$$

Тогда распределение случайного вектора

$$\left(L - \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E} f_j(V_j)\right) \sigma_N^{-1}$$

сходится к k-мерному нормальному закону $N(0, Q_f)$.

Доказательство. Из определения матриц $Q(N)$, $Q_f(N)$ и $Q_{Vf}(N)$ следует, что они связаны равенством

$$Q(N) = Q_f(N) - Q_{Vf}^T(N) \operatorname{diag}^{-1/2}(n) Q_{Vf}(N).$$

Следовательно, из A_4 получаем, что

$$\sigma^2(s, N) = \sigma_{sN}^2 + o(\sigma_{sN}^2). \tag{3}$$

Тогда

$$\sigma^{-1}(N) Q(N) \sigma^{-1}(N) = (\sigma_N^{-1} Q_f(N) \sigma_N^{-1} - \rho_N^T \rho_N)(1 + o(1)) \tag{4}$$

и существование предела в A_2 вытекает из A_4 и A_2', причем $Q = Q_f$. Удостоверимся в выполнении условия A_3. Представим $u_j - \mathbf{E}u_j$ в виде

$$u_j - \mathbf{E}u_j = f_j(V_j) - \mathbf{E}f_j(V_j) - (V_j - \alpha_j)\operatorname{diag}^{-1/2}(n)(\operatorname{diag}^{-1/2}(n)Q_{Vf}(N)\sigma_N^{-1})\sigma_N.$$

Тогда в силу неравенства

$$(a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4)$$

и условия A_4 для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом N

$$\mathbf{E}(u_{sj} - \mathbf{E}u_{sj})^4 \leqslant 8\mathbf{E}(f_{sj}(V_j) - \mathbf{E}f_{sj}(V_j))^4 + 8\varepsilon(\sigma_{sN}^4 n_s^{-2}(\alpha_{sj}^2 + \alpha_{sj})), \quad j = 1, \dots, N,$$

из которой и (3) следует неравенство

$$\mu_4 \leqslant 8\mu_{4f} + 16\varepsilon,$$

приводящее к выполнению A_3.

Таким образом, все условия вспомогательной теоремы выполнены и справедливо заключение теоремы 1.

На первый взгляд, теорема 1 существенно ослабляет приведенную выше теорему работы [2], в первую очередь из-за условия A_4. Вместе с тем, при применении теоремы 1 не требуется строить случайные величины u_j, которые фактически проводят, так сказать, полную декорреляцию случайных величин $f_j(V_j)$ и случайных величин V_j. Действительно, $\mathbf{E}u_j^T(V_j - \alpha_j) = 0$ за счет вычитания из $f_j(V_j)$ случайной величины $V_j \operatorname{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N)$. Вместо $Q_{Vf}(N)$ можно взять его некоторый, определяемый позже, аналог $Q_{Vf}(N,1)$ и рассмотреть статистику

$$L - n\operatorname{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N,1) = L - eQ_{Vf}(N,1), \tag{5}$$

где $e = (1, \dots, 1)$ — r-мерный вектор, проведя, так сказать, частичную декорреляцию случайных величин $f_j(V_j)$ с заменой $f_j(y)$ на

$$\varphi_j(y) = f_j(y) - y\operatorname{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N,1), \qquad j = 1, \dots, N. \tag{6}$$

Условие A_4 при замене (6) имеет вид

$$\rho_N = \sigma_N^{-1}(Q_{Vf}^T(N) - Q_{Vf}(N,1))\operatorname{diag}^{-1/2}(n) \to 0, \tag{7}$$

и соответствующая матрица $Q_\varphi(N)$, из которой строится σ_N^2 для статистики (5), имеет представление

$$\begin{aligned} Q_\varphi(N) = Q_f(N) &+ Q_{Vf}^T(N,1)\operatorname{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N,1) \\ &- Q_{Vf}^T(N,1)\operatorname{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N) - Q_{Vf}^T(N)\operatorname{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N,1). \end{aligned} \tag{8}$$

Если $Q_{Vf}(N,1) = Q_{Vf}(N)$, то есть матрица $Q_{Vf}(N)$ вычисляется точно, то формула (8) приводит к равенству $Q(N) = Q_\varphi(N)$, что соответствует, так сказать, полной декорреляции, и теорема 1 эквивалентна основной теореме работы [2]. Формулы (7) и (8) показывают, что для проверки условий теоремы 1 следует выделять главные значимые члены в представлении матрицы $Q_{Vf}(N)$.

Следуя намеченному плану, мы проведем исследование статистики $I(\lambda)$, для которой одной из проблем является невозможность точного вычисления матрицы $Q_{Vf}(N)$. В идейном плане аналогичное исследование было проведено в [7] по отношению к статистике $I(\lambda)$ в более простом случае для задачи принадлежности выборки заданному распределению. По сравнению с работой [7] рассматриваемая здесь статистика имеет более сложное представление, во-первых, связанное с необходимостью рассмотрения r выборок, тогда как в задаче принадлежности выборка только одна, а во-вторых, суммируемые в (1) составляющие $I_d(\lambda)$ зависимы между собой.

В статистической литературе, например, на с. 485 в [10], отмечается, что для $r = 2$, $\lambda = 1$ представление (1) может быть упрощено и имеет вид

$$I(1) = n_1 n_2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\nu_{1j} + \nu_{2j}} \left(\frac{\nu_{1j}}{n_1} - \frac{\nu_{2j}}{n_2} \right)^2 .$$

К сожалению, других упрощений статистики (1) даже в случаях частных значений параметра λ неизвестно.

Мы получим условия сходимости распределения статистики $I(\lambda)$ фактически как следствие сходимости распределения более общей векторной статистики

$$I(\lambda, r) = (I_1(\lambda), \ldots, I_r(\lambda)). \tag{9}$$

Статистика (9), на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес. Действительно, каждая из координат вектора $I(\lambda, r)$ характеризует возможное отклонение частот исходов отдельной полиномиальной схемы от общей массы частот. Например, при $\lambda = 1$,

$$I_d(1) = n_0 \sum_{j=1}^{N} \frac{(\nu_{dj} - \nu_{d0}\nu_{0j}/n)^2}{\nu_{d0}\nu_{0j}},$$

где

$$\begin{aligned} n_0 &= n_1 + \ldots + n_r, \\ \nu_{d0} &= \nu_{d1} + \ldots + \nu_{dN}, \\ \nu_{0j} &= \nu_{1j} + \ldots + \nu_{rj}. \end{aligned} \tag{10}$$

Можно ожидать, что если одна из полиномиальных схем $M(n_d, P_d)$ имеет распределение P_d, отличное от других $P_1, \ldots, P_r$, то именно на d-м месте в векторе $I(\lambda, r)$ будет наибольшее значение. Мы обсудим этот аспект далее, после получения предельных теорем для $I(\lambda, r)$.

Представим $I_d(\lambda)$ в виде

$$I_d(\lambda) = \binom{\lambda+1}{2}^{-1} \sum_{j=1}^{N} \frac{\nu_{dj}^{\lambda+1} n_0^{\lambda}}{\nu_{0j}^{\lambda} n_d^{\lambda}} - \binom{\lambda+1}{2}^{-1} n_d \tag{11}$$

и для проведения процедуры частичной декорреляции рассмотрим статистику

$$L = \sum_{j=1}^{N} f_j(\nu_{1j}, \ldots, \nu_{rj}),$$

где

$$f_{sj} = f_{sj}(y_1, \dots, y_r) = \frac{y_s^{\lambda+1}}{(y_1 + \dots + y_r)^\lambda a_s^\lambda} \binom{\lambda+1}{2}^{-1} \tag{12}$$

и $f_{sj}(y) = 0$ при $y_s = 0$ и любом λ,

$$a_s = \frac{n_s}{n_0}, \quad s = 1, \dots, r, \qquad f_j(y) = (f_{1j}(y), \dots, f_{rj}(y)).$$

Представим вектор-функцию $f_j(y)$ с учетом (12) в матричной форме

$$f_j(y) = \binom{\lambda+1}{2}^{-1} (ey^T)^{-\lambda} (y_1^{\lambda+1}, \dots, y_r^{\lambda+1}) \operatorname{diag}^{-\lambda}(a), \tag{13}$$

где $a = (a_1, \dots, a_r)$, $e = (1, \dots, 1)$. Попутно отметим, что в [4] подобные статистики в случае независимости функций f_j от индекса j называются однородными. Нам необходимо для осуществления процедуры декорреляции вычислить составляющие матрицы

$$Q_{Vf}(N) = \sum_{j=1}^{N} Q(V, f, j, N),$$

именно,

$$\begin{aligned} Q(V, f, j, N) &= \mathbf{E}(V_j - \alpha_j)^T f_j(V_j) \\ &= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} (\mathbf{E} V_j^T(v)(v_{1j}^{\lambda+1}, \dots, v_{rj}^{\lambda+1})(eV_j)^{-\lambda} \\ &\quad - \alpha_j^T \mathbf{E}(v_{1j}^{\lambda+1}, \dots, v_{rj}^{\lambda+1})(eV_j^T)^{-\lambda}) \operatorname{diag}^{-\lambda}(a), \qquad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку очевидно, что для всех j, $j = 1, \dots, N$, матрицы $Q(V, f, j, N)$ вычисляются одинаково, аргументы j и N для упрощения записи везде далее, будем опускать. Элементы матрицы $Q(V, f)$, как это видно из (14), можно разделить на два типа, диагональные и недиагональные.

Пусть $Q(V, f) = \{q_{ds}(1)\}$, где d — номер строки, s — номер столбца, ξ_1, ξ_2, ξ_3 — вспомогательные независимые между собой случайные величины,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_{0j} = \alpha_j e^T, \alpha_j = (n_1 p_{1j}, \dots, n_r p_{rj}), \\ v_0 &= v_{0j} = v_{1j} + \ldots + v_{rj} = v_1 + \ldots + v_r \end{aligned}$$

и

$$x_d = x_{dj} = n_d p_{dj} \alpha_{0j}^{-1} = n_d p_d \alpha_0^{-1} = \alpha(d) \alpha_0^{-1}, \quad 0 < c_1 < a_d, \quad x_{dj} < c_2 < 1, \tag{15}$$

где $d = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, N$.

Тогда для диагональных элементов справедливо представление

$$\begin{aligned} q_{dd}(1) &= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} a_d^{-\lambda} \left(\mathbf{E} \frac{v_d^{\lambda+2}}{v_0^\lambda} - \alpha(d) \mathbf{E} \frac{v_d^{\lambda+1}}{v_0^\lambda} \right) \\ &= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} a_d^{-1} ((\mathbf{E}(\xi_1 + \xi_2)^{-\lambda} \xi^{\lambda+2} - y_1 \alpha_0 \mathbf{E}(\xi_1 + \xi_2)^{-\lambda} \xi_1^{\lambda+1}), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$y_1 = x_d, \quad \xi_1 \sim \Pi(y_1\alpha), \quad \xi_2 \sim \Pi((1-y_1)\alpha),$$

а для недиагональных элементов

$$q_{ds}(1) = \binom{\lambda+1}{2}^{-1} a_s^{-\lambda}\left(\mathbf{E}\frac{v_s^{\lambda+1}v_d}{v_0^\lambda} - \alpha(d)\mathbf{E}\frac{v_s^{\lambda+1}}{v_0^\lambda}\right)$$

$$= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} a_s^{-1}((\mathbf{E}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)^{-\lambda}\xi_1^{\lambda+1}\xi_2 - y_1\alpha_0\mathbf{E}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)^{-\lambda}\xi_1^{\lambda+1}), \quad (17)$$

где $y_1 = x_d$, $y_2 = x_s$, $d, s = 1, \dots, r$,

$$\xi_1 \sim \Pi(y_1\alpha_0), \quad \xi_2 \sim \Pi(y_2\alpha_0), \quad \xi_3 \sim \Pi((1-y_1-y_2)\alpha_0).$$

Представления (16) и (17) и ограничение (15) необходимы нам для того, чтобы воспользоваться результатами работы [6], где, в частности, получено разложение по степеням α смешанных моментов

$$\begin{aligned}\mu(m,k_1,k_2) &= \mathbf{E}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)^m\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\\
&= \alpha^{m+k_1+k_2}y_1^{k_1}y_2^{k_2} + \alpha^{m+k_1+k_2-1}y_1^{k_1-1}y_2^{k_2-1}(y_1k_2(k_2-1)\\
&\quad + y_2k_1(k_1-1) + y_1y_2m(m-1+2(k_2+k_1)))\\
&\quad + \alpha^{m+k_1+k_2-2}y_1^{k_1-2}y_2^{k_2-2}P_4(y_1,y_2)\\
&\quad + \alpha^{m+k_1+k_2-3}y_1^{k_1-3}y_2^{k_2-3}P_6(y_1,y_2)\\
&\quad + O(\alpha^{m+k_1+k_2-4}),\end{aligned} \quad (18)$$

где $P_j(y_1, y_2)$ — конкретные полиномы от двух аргументов y_1, y_2 степени не большей, чем j, с коэффициентами, зависящими от m, k_1, k_2, явный вид которых можно получить из [6] при $\alpha \to \infty$, $0 < c_1 < y_{1,2} < c_2 < 1$ и любых целых m, k_1, k_2. Применив (18) к (16) и (17) с помощью ЭВМ, реализующей простые преобразования: замену переменных в выражениях и приведение подобных членов, получаем, что

$$\begin{aligned}q_{dd}(1) &= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} x_d\alpha_0\left(\frac{x_d}{a_d}\right)^\lambda(\lambda+1-x_d\lambda)\\
&\quad + \left(\frac{x_d}{a_d}\right)^\lambda(x_1-1)(x_d+\lambda(x_d-1)) + O(\alpha_0^{-1}), \quad (19)\\
q_{ds}(1) &= -\binom{\lambda+1}{2}^{-1}\lambda\alpha_0x_dx_s\left(\frac{x_s}{a_s}\right)^\lambda\\
&\quad + \left(\frac{x_s}{a_s}\right)^\lambda(\lambda x_d + x_d - \lambda) + O(\alpha_0^{-1}), \qquad d,s = 1,\dots,r.\end{aligned}$$

Выражения (19) с помощью обозначений

$$z = z_j\,\mathrm{diag}(z_{1j},\dots,z_{rj}), \qquad z_{dj} = \left(\frac{x_{dj}}{a_d}\right)^\lambda,$$

$$X = X_j = (x_{1j},\dots,x_{rj}) = (x_1,\dots,x_r),$$

$$W = \mathrm{diag}(1,\dots,1,), \quad d = 1,\dots,r, \quad j = 1,\dots,N,$$

позволяют представить матрицу $Q(V, f)$ в обозримом виде

$$Q(V, f) = Q(V, f, 1) + Q(V, f, 2) + O(1/\alpha_0),$$

где

$$\begin{aligned} Q(V, f, 1) &= Q_j(V, f, N, 1) \\ &= \alpha_0 \binom{\lambda + 1}{2}^{-1} ((\lambda + 1)\operatorname{diag}(X) - \lambda X^T X)Z, \\ Q(V, f, 2) &= Q_j(V, f, N, 2) \\ &= ((\lambda + 1)X^T X - \lambda X^T e - (\lambda + 1)\operatorname{diag}(X) + \lambda W)Z. \end{aligned} \tag{20}$$

Вспоминая про зависимость $Q(V, f), Z, X$ и α от номера исхода j и номера серии N, получаем представление для матрицы $Q_{Vf}(N)$

$$Q_{Vf}(N) = Q_{Vf}(N, 1) + Q_{Vf}(N, 2) + O\left(\frac{N}{n\omega}\right), \tag{21}$$

где

$$Q_{Vf}(N, 1) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(V, f, N, 1),$$

$$Q_{Vf}(N, 2) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(V, f, N, 2), \qquad \omega = \min_{d,j} p_{dj}.$$

При ограничении (15)

$$Q_{Vf}(N, 1) = O(n_0), \qquad Q_{Vf}(N, 2) = O(N),$$

и мы получили некоторое разложение матрицы $Q_{Vf}(N)$ по убывающим составляющим.

Теперь проведем частичную декорреляцию случайных величин $f_j(v_j)$ по формуле (6) и рассмотрим условия, при которых выполняется (7). Для этого сначала по формуле (8) вычислим $Q_\varphi(N)$, используя полученное ранее разложение (21):

$$\begin{aligned} Q_\varphi(N) = Q_f(N) &- Q_{Vf}^T(N, 1)\operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N, 1) \\ &- Q_{Vf}^T(N, 1)\operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N, 2) \\ &- Q_{Vf}^T(N, 2)\operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N, 1) + O(N/(n\omega)). \end{aligned} \tag{22}$$

В условиях предположения (15) продолжим вычисление не полученной до сих пор в явном виде матрицы

$$Q_f(N) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(f), \tag{23}$$

где

$$Q_j(f) = \{q_{ds}(2, j)\},$$

$$\begin{aligned} Q_j(f) = \binom{\lambda + 1}{2}^{-2} &\operatorname{diag}^{-\lambda}(a)(\mathbf{E}(eV_j^T)^{-2\lambda}(v_{1j}^{\lambda+1}, \dots, v_{rj}^{\lambda+1})^T (v_{1j}^{\lambda+1}, \dots, v_{rj}^{\lambda+1}) \\ &- \mathbf{E}(eV_j^T)^{-\lambda}(v_{1j}^{\lambda+1}, \dots, v_{rj}^{\lambda+1})^T \mathbf{E}(eV_j^T)^{-\lambda}(v_{1j}^{\lambda+1}, \dots, v_{rj}^{\lambda+1}))\operatorname{diag}^{-\lambda}(a). \end{aligned}$$

Далее, также для сокращения записи, номер j будем опускать и рассмотрим отдельно диагональные и недиагональные элементы с использованием вспомогательных независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 и результатов по смешанным моментам работы [6]. Тогда для диагональных элементов справедливы равенства

$$q_{dd}(2) = \binom{\lambda+1}{2}^{-2} a_d^{-2\lambda} \left(\mathbf{E}\frac{v_d^{2\lambda+2}}{v_0^{2\lambda}} - \mathbf{E}^2\frac{v_d^{\lambda+1}}{v_0^{\lambda}}\right)$$
$$= \binom{\lambda+1}{2}^{-2} a_d^{-2\lambda} \left(\mathbf{E}(\xi_1+\xi_2)^{-2\lambda}\xi_1^{2\lambda+2} - \mathbf{E}^2(\xi_1+\xi_2)^{-\lambda}\xi_1^{\lambda}\right) \tag{24}$$

(здесь y_1, ξ_1, ξ_2 такие же, как в (16)), а для недиагональных элементов

$$q_{ds}(2) = \binom{\lambda+1}{2}^{-2} a_d^{-\lambda} a_s^{-\lambda} \left(\mathbf{E}\frac{v_d^{\lambda+1} v_s^{\lambda+1}}{v_0^{2\lambda}} - \mathbf{E}\frac{v_d^{\lambda+1}}{v_0^{\lambda}}\mathbf{E}\frac{v_s^{\lambda+1}}{v_0^{\lambda}}\right)$$
$$= \binom{\lambda+1}{2}^{-2} a_d^{-\lambda} a_s^{-\lambda} \mathbf{E}(\xi_1+\xi_2+\xi_2)^{-2\lambda}\xi_1^{\lambda+1}\xi_2^{\lambda+1}$$
$$- \mathbf{E}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)^{-\lambda}\xi_1^{\lambda+1}\mathbf{E}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)^{-\lambda}\xi_2^{\lambda+1} \tag{25}$$

(здесь y_1, y_2, ξ_1, ξ_2, ξ_3 такие же, как в (17)).

Так же, как и для (16), (17), применим формулу (18) к равенствам (24) и (25) и аналогично (19) с помощью ЭВМ получим разложения

$$q_{dd}(2) = \alpha z_d^2 x_d (x_d + (\lambda+1)^2(1-x_d))\binom{\lambda+1}{2}^{-2}$$
$$+ \binom{\lambda+1}{2}^{-1} (\lambda+1) z_d^2 (3x_d^2\lambda + 3\lambda - 6x_d\lambda + 2x_d^2 - 2x_d) + O\left(\frac{1}{\alpha_0}\right),$$
$$q_{ds}(2) = -\alpha_0 z_d z_s x_d x_s (2+\lambda)\lambda \binom{\lambda+1}{2}^{-2}$$
$$- \binom{\lambda+1}{2}^{-1} (\lambda+1) z_d z_s (\lambda x_d + \lambda x_s - 3\lambda x_d x_s - 2x_d x_s) + O\left(\frac{1}{\alpha_0}\right). \tag{26}$$

Аналогично (20)

$$Q(f) = Q(f,1) + Q(f,2) + O(1/\alpha_0),$$

где

$$Q(f,1) = Q_j(f,N,1) = \alpha_0 \binom{\lambda+1}{2}^{-2} Z((\lambda+1)^2 \operatorname{diag}(X) - \lambda(\lambda+2)X^T)XZ,$$
$$Q(f,2) = Q_j(f,N,2)$$
$$= Z\left(\frac{2}{\lambda}(3\lambda+2)X^T X + 6W - 2X^T e - 2e^T X - 4\frac{2\lambda+1}{\lambda}\operatorname{diag}(X)\right)Z. \tag{27}$$

Снова вспоминая зависимость $Q(f)$, Z, X и α от номера исхода j и номера серии N, получаем представление для матрицы $Q_f(N)$, аналогичное (21):

$$Q_f(N) = Q_f(N,1) + Q_f(N,2) + O(N/(n\omega)), \tag{28}$$

где

$$Q_f(N,1) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(f,N,1),$$
$$Q_f(N,2) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(f,N,2).$$

Нетрудно видеть, что и здесь

$$Q_f(N,1) = O(n_0),$$
$$Q_f(N,2) = O(N).$$

Теперь мы имеем представления для всех составляющих матрицы $Q_\varphi(N)$. Подставим в (22) выражение (21) с учетом (20) и выражение (28) с учетом (27). Опять представим $Q_\varphi(N)$ в виде разложения

$$Q_\varphi(N) = Q_\varphi(N,1) + Q_\varphi(N,2) + O(N/(n_0\pi)), \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_\varphi(N,1) &= \sum_{j=1}^{N} Q_j(\varphi,N,1),\\
Q_\varphi(N,2) &= \sum_{j=1}^{N} Q_j(\varphi,N,2),\\
Q(\varphi,1) &= Q_j(\varphi,N,1) = Q(f,1) - Q^T(V,f,1)\,\mathrm{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N,1),\\
Q(\varphi,2) &= Q_j(\varphi,N,2) = Q(f,2) - Q^T(V,f,1)\,\mathrm{diag}^{-1}(n)Q_{Vf}(N,2)\\
&\quad - Q^T_{Vf}(N,2)\,\mathrm{diag}^{-2}(n)Q(V,f,1).
\end{aligned} \tag{30}$$

Из (29) и (30) вытекает, что

$$Q_\varphi(N,1) = O(n_0),$$
$$Q_\varphi(N,2) = O(N).$$

Здесь настало время проверить, верно ли мы сделали все предыдущие громоздкие выкладки и насколько можно доверять ЭВМ при проведении теоретических расчетов. Для этого мы вычислим составляющие матрицы $Q_\varphi(N)$ в условиях гипотезы H_0, характеризуемых наличием равенств

$$p_j = p_{1j} = \ldots = p_{rj}, \quad \alpha_j = np_j, \quad \alpha_0 = \alpha_{0j} = n_0 p_j,$$
$$X_j = a = (a_1,\ldots,a_r), \quad Z_j = W, \quad j = 1,\ldots,N.$$

При гипотезе H_0 (см. соответственно (27),(20),(21))

$$\begin{aligned}
Q(f,1) &= n_0 p_j \binom{\lambda+1}{2}^{-1} ((\lambda+1)^2 \operatorname{diag}(a) - \lambda(\lambda+2)a^T a) \\
&= np_j \binom{\lambda+1}{2}^{-2} \operatorname{diag}(a) R^2(a) \\
Q(V,f,1) &= n_0 p_j \binom{\lambda+1}{2}^{-1} ((\lambda+1)\operatorname{diag}(a) - \lambda a^T a) \\
&= np_j \binom{\lambda+1}{2}^{-1} \operatorname{diag}(a) R(a), \\
\operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1) &= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} ((\lambda+1)W - \lambda e^T a) \\
&= \binom{\lambda+1}{2}^{-1} R(a), \\
R(a) &= (\lambda+1)W - \lambda e^T a
\end{aligned} \tag{31}$$

и $Q(\varphi,1) = 0$ вследствие того, что

$$ea^T = 1.$$

Далее, также из (27), (20), (21) следуют равенства

$$\begin{aligned}
Q(f,2) &= (6+4/\lambda)a^T a + 6W - 2a^T e - 2e^T a - (8+4/\lambda)\operatorname{diag}(a), \\
Q_{Vf}(N,2) &= N((\lambda+1)a^T a - \lambda a^T e - (\lambda+1)\operatorname{diag}(a) + \lambda W),
\end{aligned}$$

из которых вытекает представление

$$\begin{aligned}
Q_\varphi(N,2) &= NQ(f,2) - \binom{\lambda+1}{2}^{-1} ((\lambda+1)W - \lambda a^T e) Q_{Vf}(N,2) \\
&\quad - \binom{\lambda+1}{2}^{-1} Q_{Vf}^T(N,2)((\lambda+1)W - \lambda e^T a) \\
&= 2N(W + a^T a - 2\operatorname{diag}(a)).
\end{aligned} \tag{32}$$

Следовательно, из (31) и (32) вытекает равенство

$$Q_\varphi(N)\big|_{H_0} = 2N(W + a^T a - 2\operatorname{diag}(a)) + O(N/(n_0\omega)). \tag{33}$$

Для окончания проверки надо вычислить ожидаемую дисперсию статистики

$$I(\lambda) = I(\lambda, r)e^T$$

(см. (1), (9)), которая должна асимптотически при $N \to \infty$ и $n_0\omega \to \infty$ совпадать с

$$eQ_\varphi(N)e^T = 2N(r-1) + o(N), \tag{34}$$

что при $\lambda = 1$ соответствует ожидаемому значению дисперсии статистики хи-квадрат, равному

$$2(N-1)(r-1) = 2N(r-1) + O(1).$$

Проведем еще одно преобразование составляющей $Q(\varphi, 1)$, которое удалось осуществить для произвольной альтернативной гипотезы H_1, то есть при произвольном наборе векторов $P_1, \dots, P_r$:

$$\begin{aligned}
Q(\varphi, 1) &= \alpha_0 \binom{\lambda+1}{2}^{-2} \Big(Z \operatorname{diag}(X) R^2 Z - \binom{\lambda+1}{2} Z R^T \operatorname{diag} X \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1)\Big) \\
&= \alpha_0 \binom{\lambda+1}{2}^{-2} \Big(R_z - \operatorname{diag}^{-1}(n) \binom{\lambda+1}{2} Q_{Vf}(N,1)\Big)^T \\
&\quad \times \operatorname{diag}(X) \Big(RZ - \operatorname{diag}^{-1}(n) \binom{\lambda+1}{2} Q_{Vf}(N,1)\Big) \\
&\quad + Q_{Vf}^T(N,1) \operatorname{diag}(X) (RZ - \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1)),
\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
R = R(X) = R_j = R(X_j) &= (\lambda+1)W - \lambda e^T X, \\
\operatorname{diag}(X) R^2 &= R \operatorname{diag}(X) R.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что из (20), (21) вытекает соотношение

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^N \alpha_{0j} \operatorname{diag}(X_j)(R_j Z_j - \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1)) \\
&\qquad = Q_{Vf}(N,1) - \sum_{j=1}^N \operatorname{diag}(n_1 p_{1j}, \dots, n_r p_{rj}) \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1) = 0.
\end{aligned}$$

Поэтому $Q_\varphi(N, 1)$ — неотрицательно определенная симметричная матрица. Последнее замечание также является косвенной проверкой правильности проведенных громоздких выкладок. К сожалению, в силу громоздкости, матрицу $Q_\varphi(N, 2)$ удалось рассмотреть только при гипотезе H_0. Поэтому будем при альтернативе H_1 выделять в $Q_\varphi(N)$ главный вклад в виде $Q_\varphi(N, 1)$, то есть исходить из условия, что $N^{-1} Q_\varphi(N, 1) \to \infty$, что соответствует выполнению r^2 условий $N q_\varphi(N, 1, d, s) \to \infty$, $d, s = 1, \dots, r$, при $N \to \infty$, и $Q_\varphi(N, 1) = \{q_\varphi(N, 1, d, s)\}$, поскольку $Q_\varphi(N, 2) = O(N)$. Более явное представление матрицы $Q_\varphi(N, 1)$ удается получить в случае близких альтернатив H_1, чем мы сейчас и займемся.

Альтернативу H_1 к гипотезе H_0 будем называть близкой, если векторы q_j вероятностей исходов в r полиномиальных схемах удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
&q_j = (p_{1j}, \dots, p_{rj}) = q_j a^T (e + \delta(j)), \\
&\sum_{j=1}^N q_j a^T \delta(j) = 0, \qquad a = (n_1, \dots, n_r) n_0^{-1}, \\
&\delta(j) = (\delta_1(j), \dots, \delta_r(j)), \qquad j = 1, \dots, N, \\
&\max_{1 \leqslant d \leqslant r} \max_{1 \leqslant j \leqslant N} |\delta_d(j)| \to 0 \text{ при } N \to \infty.
\end{aligned} \tag{36}$$

Из (36) вытекает также, что при $p_{dj} > 0$, $d = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, N$, справедливо равенство $\delta(j) a^T = 0$. Гипотеза H_0 соответствует единственному набору значений отклонений $\delta(j) = 0$. При H_0 все координаты q_j равны между собой, $j = 1, \dots, N$, поэтому

$\delta(j) = \delta_j e$ для некоторых чисел δ_j и $q_j = q_j a^T(1+\delta_j)e$, $j = 1, \dots, N$. Тогда из равенств

$$q_j a^T = q_j a^T(1+\delta_j) e a^T, \qquad e a^T = 1$$

следует, что $\delta_j = 0$, $j = 1, \dots, N$. Далее, как и ранее, где это не вызовет недоразумения, номер исхода j будем опускать, используя, например, запись $\delta(j) = \delta$. По определению (15)

$$\begin{aligned}
X &= X_j = n_0 q_j \operatorname{diag}(a) n_0^{-1} (q_j a^T)^{-1} \\
&= (e + \delta(j)) \operatorname{diag}(a) = a + \delta(j) \operatorname{diag}(a) \\
&= a(W + \operatorname{diag}(\delta(j))) = a(W + \operatorname{diag}(\delta)), \\
e^T X &= e^T a (W + \operatorname{diag}(\delta(j))), \\
\operatorname{diag}^\lambda(X) &= \operatorname{diag}^\lambda(a) Z, \\
Z &= \operatorname{diag}^\lambda(X \operatorname{diag}^{-1}(a)) = \operatorname{diag}^\lambda(e + \delta) = (W + \operatorname{diag}(\delta)^\lambda) \\
&= W + \lambda \operatorname{diag}(\delta) + \binom{\lambda}{2} \operatorname{diag}^2(\delta) + O(\Delta^3),
\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\Delta^2 = \max_{1 \leqslant d \leqslant r} \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \delta_d^2(j).$$

Для матриц выражение $O(\Delta^2)$ понимается как выполнение оценок $O(\Delta^2)$ для каждого элемента матрицы.

Формула (35) показывает, что для получения разложения выражения $Q(\varphi, 1)$ по степеням δ достаточно получить лишь первые два члена разложений RZ и $\operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N, 1)$, то есть найти представление последних выражений с точностью до $O(\Delta^2)$, поскольку

$$RZ - \binom{\lambda+1}{2} \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N, 1) = O(\Delta^2)$$

вследствие (31). Это замечание существенно уменьшает громоздкость выкладок. Тогда из (36) вытекает разложение

$$\begin{aligned}
\operatorname{diag}^{-1}(n) Q(V, f, N, 1) \binom{\lambda+1}{2} &= \operatorname{diag}(q) R(X) Z \\
&= \operatorname{diag}(q)(R(a) + \lambda R(a) \operatorname{diag}(\delta) - \lambda e^T a \operatorname{diag}(\delta) + O(\Delta^2)).
\end{aligned} \tag{38}$$

Из определения $\delta(j)$, равенств (36) и (37) следует, что

$$\sum_{j=1}^N q_j^T a \operatorname{diag}(\delta(j)) = O(\Delta^2),$$

$$\sum_{j=1}^N q_j \operatorname{diag}(\delta(j)) = \sum_{j=1}^N q_j a^T \delta(j) \operatorname{diag}(\delta(j)) = O(\Delta^2).$$

Применение последних равенств и оценок в представлении (38) приводит к разложению

$$\binom{\lambda+1}{2} \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N, 1) = \sum_{j=1}^N \binom{\lambda+1}{2} \operatorname{diag}^{-1}(n) Q(V, f, N, 1) = R(a) + O(\Delta^2). \tag{39}$$

Остается отметить, что

$$R(X)Z = (R(a) - \lambda e^T a \operatorname{diag}(\delta))Z = R(a) + \lambda(R(a) - e^T a) \operatorname{diag}(\delta) + O(\Delta^2)$$

и

$$R(X)Z - \binom{\lambda+1}{2} \operatorname{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1) = \lambda(R(a) - e^T a) \operatorname{diag}(\delta) + O(\Delta^2)$$
$$= \lambda(\lambda+1)(W - e^T a) \operatorname{diag}(\delta) + O(\Delta^2),$$

и тогда из (35) и (37) вытекает разложение для слагаемых, образующих $Q_\varphi(N,1)$,

$$Q(\varphi,1) = 2d_0 \operatorname{diag}(\delta)(\operatorname{diag}(a) - a^T a) \operatorname{diag}(\delta) + O(\alpha_0 \Delta^3), \tag{40}$$

где $\alpha_0 = n_0 q a^T$. Последние равенства непосредственно приводят к представлению $Q_\varphi(N,1)$ в виде

$$Q_\varphi(N,1) = \sum_{j=1}^{N} Q_j(\varphi,1)$$
$$= 2n_0 \sum_{j=1}^{N} q_j a^T \operatorname{diag}(\delta(j))(\operatorname{diag}(a) - a^T a) \operatorname{diag}(\delta(j)) + O(n_0 \Delta^3). \tag{41}$$

Из (32), (33) и определения близкой альтернативы H_1 также следует, что

$$Q_\varphi(N,2) = 2N(W + a^T a - 2\operatorname{diag}(a)) + O(N\Delta).$$

Поэтому

$$Q_\varphi(N) = 2(W + a^T a - 2\operatorname{diag}(a))$$
$$+ 2n_0 \sum_{j=1}^{N} q_j a^T (\delta(j))(\operatorname{diag}(a) - a^T a) \operatorname{diag}(\delta(j)) + O(n_0 \Delta^3) + o(N) \tag{42}$$

и можно выписать явные выражения

$$\sigma_N^2 = \operatorname{diag}(Q_\varphi(N)) = \operatorname{diag}(\sigma_{1N}^2, \dots, \sigma_{rN}^2), \tag{43}$$
$$\sigma_{dN}^2 = 2(1 - a_d)^2 N + 2n_0 a_d (1 - a_d) \sum_{j=1}^{N} q_j a^T \delta_d^2(j) + O(n_0 \Delta^3) + o(N).$$

При рассмотрении статистики $I(\lambda)$ роль σ_N^2 играет выражение $eQ_\varphi(N)e^T$. С помощью (40) находим разложение

$$e(Q(\varphi,1) + Q(\varphi,2))e^T = 2(r-1) + 2\alpha_0 \delta \operatorname{diag}(a) \delta^T + O(\alpha_0 \Delta^3) + o(1).$$

Тогда получаем, что

$$eQ_\varphi(N)e^T = 2N(r-1) + 2n_0 \sum_{j=1}^{N} q_j a^T \delta(j) \operatorname{diag}(a) \delta^T(j) + O(n_0 \Delta^3) + o(N). \tag{44}$$

Приступим теперь к рассмотрению выражения

$$\mu_d(4) = \mu_{dj}(4) = \mathbf{E}(\varphi_{dj}(V_j) - \mathbf{E}\varphi_{dj}(V_j))^4,$$

где

$$\varphi_j(y) = (\varphi_{1j}(y), \dots, \varphi_{rj}(y))$$

— вектор-функция, определенная в (6). В соответствии с (6)

$$\varphi_{dj}(y) = \binom{\lambda+1}{2}^{-1} \frac{y_d^{\lambda+1}}{(ye^T)^\lambda a_d^\lambda} - y\,\mathrm{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1)e_d^T,$$

где $e_d = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ и в этом векторе число нулей перед единицей равно $d-1$.

Из (39) следует, что

$$\begin{aligned}\binom{\lambda+1}{2} \mathrm{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1)e_d^T &= R(a)e_d^T + \Theta_d\Delta^2 \\ &= (\lambda+1)e_d^T - \lambda a_d e^T + \Delta^2\Theta_d, \qquad (45)\end{aligned}$$

где Θ_d — некоторые матрицы, имеющие для всех d, $d = 1, \dots, r$, и N ограниченные некоторой общей постоянной c элементы. Поэтому

$$\begin{aligned}\mu_d(4) &\leqslant 4(\mu_d + c^2\Delta^4\mathbf{E}(Ve^T - \mathbf{E}Ve^T)^4)\binom{\lambda+1}{2}^{-4}, \\ \mu_d &= \mathbf{E}(\Psi_d(V) - \mathbf{E}\Psi_d(V))^4, \qquad (46) \\ \Psi_d(y) &= \frac{y_d^{\lambda+1}}{a_d^\lambda(ye^T)^\lambda} - (\lambda+1)y_d + \lambda a(ye^T).\end{aligned}$$

При гипотезе H_0 величина $\Delta = 0$ и

$$\mu_d(4) \leqslant 4\mu_d\binom{\lambda+1}{2}^4.$$

Формула (18) позволяет получить разложение для $\mathbf{E}\Psi_d(V)$. Эту операцию, опуская индекс d и делая в (18) замену переменных $y_1 = x$, $y_2 = 1 - x$, мы провели с помощью ЭВМ, используя пакет прикладных программ `Maple 7`. Полученное разложение имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Psi(V) &= a^{-\lambda}\mu(-\lambda, \lambda+1, 0) - (\lambda+1)x\alpha + a\lambda\alpha\Big|_{y_1=x, y_2=1-x} \\ &= \left(x\left(\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda - 1\right) + (a-x)\lambda\right)\alpha - \binom{\lambda+1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda (x-1) \\ &+ \binom{\lambda+1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda \frac{x-1}{4x\alpha}(3x\lambda + 2x - 3\lambda + 2) \\ &- \binom{\lambda+1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda \frac{x-1}{8x^2\alpha^2}(x^2\lambda^3 - x^2\lambda^2 - 8x^2\lambda - 4x^2 \\ &- 2x\lambda^3 + 6x\lambda^2 + 2x\lambda - 4x + \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) + O(\alpha^{-3}) \qquad (47)\end{aligned}$$

Далее нам также будет необходимо разложение $\mathbf{E}\Psi(V)$ при близких альтернативах, поэтому мы получим представление для $\mathbf{E}\Psi(V)$ при параметрах $x = a(1+\delta)$ как разложение по степеням a и δ до δ^2 включительно, полагая в $\mathbf{E}\Psi(V)$

$$x = a(1+\delta),$$
$$x^\lambda = a^\lambda\left(1 + \lambda\delta + \binom{\lambda}{2}\delta^2\right),$$

проводя разложение с точностью до $O(\alpha\Delta^3) + O(\Delta^2) + O(\alpha^{-3})$. Мы приведем здесь только разложение с точностью до $\theta = O(\alpha\Delta^3) + O(\Delta^2) + O(\alpha^{-1})$, которое имеет вид

$$\mathbf{E}\Psi(V) = \binom{\lambda+1}{2}(1 - a + (\lambda + a(\lambda+1))\delta + a\delta^2\alpha) + O(\alpha\Delta^3) + \theta.$$

Нам также потребуется более точное относительно δ разложение для вычисления μ_d. Вычислим $\mathbf{E}\Psi(V)$, полагая в (47)

$$x = a(1+\delta),$$
$$x^\lambda = a^\lambda\left(1 + \lambda\delta + \binom{\lambda}{2}\delta^2 + \binom{\lambda}{3}\delta^3 + \binom{\lambda}{4}\delta^4\right).$$

Это разложение используется далее при выводе (50).

Сложнее обстоит дело с получением разложения для величины μ_d, которую представим в виде

$$\mu_d = \mu_d(x_d) = \sum_{k=1}^{4}(-1)^{4-k}\mathbf{E}^{4-k}\Psi_d(V)\mathbf{E}\Psi_d^k(V), \tag{48}$$

где

$$\mathbf{E}\Psi_d^k(V) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{s=0}^{i}\frac{k!}{(k-i)!\,(i-s)!\,s!}a^{i-s-\lambda(k-i)}$$
$$\times(-1)^s(\lambda+1)^s\lambda^{i-s}\mathbf{E}v_0^{i-s-\lambda(k-i)}v_d^{k+s-i+\lambda(k-i)}, \qquad v_0 = v_1 + \ldots + v_r.$$

Соотношение (18) дает разложение по степеням α с точностью до $O(\alpha^{k-4})$ для $\mathbf{E}v_0^{-\lambda(k-i)+i-s}v_d^{\lambda(k-i)+k-i+s}$. Тогда и μ_d можно путем подстановки соответствующих разложений для $\mathbf{E}\Psi_d(V)$ и $\mathbf{E}\Psi_d^k(V)$ в (48) привести к следующему общему виду:

$$\mu_d(x_d) = c(4,d)\alpha_0^4 + c(3,d)\alpha_0^3 + c(2,d)\alpha_0^2 + c(1,d)\alpha_0 + O(1), \tag{49}$$

где $c(k,d)$ — коэффициенты, зависящие от λ, a_d, x_d.

Сделав замену переменных, как при вычислении $\mathbf{E}\Psi_d(V)$, опуская для краткости индекс d, получим с помощью ЭВМ разложение для $\mu(x)$, естественно, приводя автоматически подобные члены и строя разложения по α. Это разложение весьма громоздко и его распечатка здесь не приводится.

Далее, для близких альтернатив также вычисляем представление $\mu(x)$ при $x = a(1+\delta)$ и

$$x^\lambda = a^\lambda\left(1 + \lambda\delta + \binom{\lambda}{2}\delta^2 + \binom{\lambda}{3}\delta^3 + \binom{\lambda}{4}\delta^4\right),$$

которое с точностью до $O(1) + O(\alpha\Delta^3) + O(\alpha^2\Delta^5)$ имеет вид

$$\mu(a(1+\delta)) = 192\binom{\lambda+1}{2}^4 \alpha^2 a^2 (1-a)^2 \delta^4 + O(\alpha\Delta^2) + +O(1) + O(\alpha^2\Delta^5). \tag{50}$$

Мы рассматривали только близкие к основной гипотезе альтернативы ($\Delta^2 \to 0$). Это было связано, с одной стороны, с возможностью упрощения равенств (35) и (21), а с другой стороны, с упрощением оценок $\mu_d(4)$ вследствие равенства (45). Для произвольных δ_j в представлении функции $\varphi_{dj}(y)$ упрощение декоррелирующего слагаемого получить не удается, из (20) и (21) следует только, что

$$y\,\mathrm{diag}^{-1}(n) Q_{Vf}(N,1) e_d^T = y_d(\lambda+1)\sum_{j=1}^{N} z_{dj} p_{dj} - \lambda y \sum_{j=1}^{N} z_{dj} p_{dj} x_{dj} X_j^T.$$

Вместе с тем, и упрощения выражения для $Q(\varphi,1)$ из (35) и тем более для $Q(\varphi,2)$ до обозримых представлений достичь не удалось. Поэтому мы далее ограничимся только гипотезой H_0 и близкими альтернативами H_1. На этом мы закончили подготовительные исследования к доказательству основных результатов настоящей работы.

Для упрощения записи в дальнейшем изложении введем дополнительно случайный r-мерный вектор $\bar\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$, имеющий распределение

$$\mathbf{P}(\bar\Delta = \delta(j)) = q_j a^T, \quad j = 1, \ldots, N, \quad \mathbf{E}\bar\Delta = 0,$$

и будем предполагать, что существуют пределы

$$\lim_{N\to\infty} 2NB_N^{-2} = g^2(1), \tag{51}$$

$$\lim_{N\to\infty} 2n_0 \mathbf{E}\,\mathrm{diag}^2(\bar\Delta) B_N^{-2} = g(2), \tag{52}$$

$$\lim_{N\to\infty} 2n_0 B_N^{-1} \mathbf{E}(\bar\Delta^T\bar\Delta) B_N^{-1} = g(3), \tag{53}$$

$$\lim_{N\to\infty} n_0^{-1}\,\mathrm{diag}(n) = a, \tag{54}$$

где

$$B_N^2 = \mathrm{diag}(B_{1N}^2, \ldots, B_{rN}^2),$$
$$B_{dN}^2 = 2(1-a_d)^2 N + 2n_0 a_d (1-a_d)\mathbf{E}\Delta_d^2.$$

Теорема 2. *Пусть при $N \to \infty$ и $n_0 = n_0(N) = n_1 + \ldots + n_r \to \infty$ вероятности исходов r независимых соответствующих близкой альтернативе H_1 полиномиальных схем*

$$M(n_1, P_1), \ldots, M(n_r, P_r), \quad p_{dj} = (1+\delta_d(j)) \sum_{s=1}^{r} p_{sj} a_s, \quad d = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяют условию A_1 *при $P \to 0$ и ограничению*

$$\frac{\sqrt{N}}{n_0^3 \min_{1\leqslant j\leqslant N} p_{dj}^3} = o(1), \qquad d = 1, \ldots, r, \tag{55}$$

а вектор объемов испытаний

$$n = (n_1, \dots, n_r) = n_0 a$$

удовлетворяет условию (15).

Тогда для близких альтернатив, соответствующих условиям

$$\mathbf{E}\Delta_d^2 = o(n_0^{-1/2}), \qquad d = 1, \dots, r, \tag{56}$$

$$\Delta^2 = \max_{1\leqslant d\leqslant r} \max_{1\leqslant j\leqslant N} \delta_d^2(j) = O(\min_{1\leqslant d\leqslant r} \mathbf{E}\Delta_d^2), \tag{57}$$

распределение случайной величины

$$(I(\lambda, r) - A_N)B_N^{-1},$$

где

$$A_N = n_0 a \operatorname{diag}(\mathbf{E}\Delta_1^2, \dots, \mathbf{E}\Delta_r^2) + N(e - a) + \sum_{j=1}^{N} (\lambda + (\lambda + 1)\operatorname{diag}(a))\delta(j) + \theta_N,$$

$$\theta_N = O\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n_0 q_j a^T}\right),$$

асимптотически нормально со средним 0 *и ковариационной матрицей*

$$G = g(1)(W + a^T a - 2\operatorname{diag}(a))g(1) + g(2)\operatorname{diag}(a) - \operatorname{diag}(a)g(3)\operatorname{diag}(a).$$

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 1 для r-мерной разделимой статистики

$$L_\varphi = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(\nu_j),$$

где $\varphi_j(y)$ — r-мерные функции от r-мерного аргумента, определенные равенством (12), а $Q_{Vf}(N, 1)$ определена равенствами (20), (21). Статистика $I(\lambda, r)$ связана со статистикой L_φ равенством

$$I(\lambda, r) = L_\varphi + eQ_{Vf}(N, 1) - n\binom{\lambda + 1}{2}^{-1}.$$

Из условий (55) и (15) вытекает, что при $N \to \infty$

$$\min_{1\leqslant d\leqslant r} \min_{1\leqslant j\leqslant N} n_d p_{dj} \to \infty$$

и из оценки $\min_{d,j} p_{dj} \leqslant 1/N$ следует, что $n^6 N^{-7} \to \infty$ и $n/N \to \infty$. Поэтому мы можем воспользоваться ранее полученными разложениями моментов (18). Для близкой альтернативы H_1 из (43), (56), (57) получаем, что

$$\sigma_{dN}^2 = (2(1 - a_d)^2 N + 2n_0 a_d (1 - a_d)\mathbf{E}\Delta_d^2)(1 + o(1)). \tag{58}$$

Равенство (47) в условиях (55), (56), (57) приводит к оценке

$$\mathbf{E}\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(V_j) - n\binom{\lambda+1}{2}^{-1} + eQ_{Vf}(N,1) - A_N = O(n\Delta^3) + O(N(n_0\omega)^{-3}) + O(N\Delta^2)$$
$$= o(\min_{1\leqslant d\leqslant r}\sigma_{dN}),$$

которая вытекает из соотношений

$$\begin{aligned}
N(n_0\pi)^{-3} &= o(\sqrt{N}),\\
N\Delta^2 &= O(N\min_{1\leqslant d\leqslant r}\mathbf{E}\Delta_d^2) = O(N/\sqrt{n}) = o(\sqrt{N}),\\
\pi &= \min_{1\leqslant d\leqslant r}\min_{1\leqslant j\leqslant N} p_{dj},\\
n_0\Delta^3 &= O(n_0\Delta\max_{1\leqslant d\leqslant r}\mathbf{E}\Delta_d^2)\\
&= O((n_0\Delta\max_{1\leqslant d\leqslant r}\mathbf{E}\Delta_d^2)^{1/2}\sqrt{n_0}\Delta^2)\\
&= o(n_0\Delta\max_{1\leqslant d\leqslant r}\mathbf{E}\Delta_d^2).
\end{aligned}\tag{59}$$

Условие A_2' вытекает из (42), (51)–(54), (59) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sigma_N^{-1}Q_\varphi(N)\sigma_N^{-1} &= B_N^{-1}(1+o(1))(2N(W+a^Ta-2\operatorname{diag}(a))\\
&\quad+2n_0\sum_{j=1}^{N}q_ja^T\operatorname{diag}(\delta(j))(\operatorname{diag}(a)-a^Ta)\operatorname{diag}(\delta(j))\\
&\quad+o(N))+O(n_0\Delta^3)B_N^{-1}(1+o(1)) = G(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Ковариационная матрица Q_φ предельного r-мерного нормального распределения равна G. Очевидно, что G — действительно матрица ковариаций с недиагональными элементами, по модулю не большими 1, поскольку $a_d + a_s < 1$, $d, s = 1,\dots,r$.

Проверим выполнение условия A_4 с применением равенств (7) и (21):

$$\begin{aligned}
\rho_N &= \sigma_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{E}\varphi_j^T(V_j)(V_j-\alpha_j)\operatorname{diag}^{-1/2}(n)\\
&= \sigma_N^{-1}Q_{Vf}(N,2)\operatorname{diag}^{-1/2}(n) + O\left(\frac{N}{n_0\omega}N^{-1/2}n_0^{-1/2}\right)\\
&= O\left(\frac{N^{1/2}}{n_0} + \left(\frac{N}{n}\right)^{1/2}\frac{1}{n_0\omega}\right) = o(1).
\end{aligned}\tag{60}$$

Используя (47), выражение для θ_N можно выписать более точно, с точностью до

$$O(N\Delta^2) + O\left(\sum_{j=1}^{T}\frac{1}{(n_0q_ja^T)^3}\right) = o(\sqrt{N}).$$

Из (50) и (46) вытекает неравенство

$$\mu_d(4) \leqslant c(\Delta^4\alpha_0^2 + \alpha_0\Delta^2 + 1), \qquad \alpha_0 = n_0qa^T.$$

Последнее неравенство позволяет с учетом (54) начать проверку выполнения условия A_3'. Справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_{dj}(4) \leqslant c\left(n_0\Delta^4 \sum_{j=1}^{N}(q_j a^T)^2 + n_0\Delta^2 + N\right). \tag{61}$$

По условиям доказываемой теоремы величина P, фигурирующая в A_1, стремится к нулю и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{N}(q_j a^T)^2 \leqslant P \to 0.$$

Тогда из (57) получаем, что

$$n_0\Delta^4 \sum_{j=1}^{N}(q_j a^T)^2 = o(n_0^2 \min_{1\leqslant d\leqslant r} \mathsf{E}^2\Delta_d^2)$$

и

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_{dj}(4) = o(B_{dN}^4),$$

то есть выполнено условие A_3', чем и заканчивается доказательство.

Сделаем несколько замечаний, касающихся условий теоремы 2.

Замечание 1. Ограничение (51) может быть ослаблено и заменено на требование существования произвольного целого положительного s такого, что

$$n_0\omega N^{-1/(2s)} \to \infty$$

при $\omega = \min_{d,j} p_{d,j}$ и $N \to \infty$. Тогда выражение для приближения $\sum_{j=1}^{N} \mathsf{E}\varphi_j(V_j)$ следует вычислить более точно, до s-го члена включительно, используя разложение типа (18). Последнее можно сделать, применяя следствие 3 из [6].

Замечание 2. Выражение для Θ_N можно более точно выписать в явном виде, используя (47), с точностью до

$$O(N\Delta^2) + O\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n_0 q_j a^T)^3}\right) = o(\sqrt{n_0}).$$

Замечание 3. Условия (51), (56), (57) в общем случае независимы между собой. Вместе с тем, условие $P \to 0$ в теореме 2 при рассмотрении гипотезы H_0 оказывается избыточным.

Теорема 3. *Пусть $N \to \infty$, $n_0 = n_0(N)$ и вероятности исходов r независимых полиномиальных схем соответствуют гипотезе H_0, то есть $P_1 = \ldots = P_r$ и $P_1 = (p_1, \ldots, p_N)$. Тогда при выполнении условий* A_1, (15), (54), (55) *распределение статистики*

$$(I(\lambda, r) - A_N^0)B_{0N}^{-1},$$

где

$$A_N^0 = N(e-a) + \frac{1}{12}(e(3\lambda^2 + 11\lambda + 10) + 6\lambda a(1-\lambda) + a\,\mathrm{diag}(a)(3\lambda^2 - \lambda + 2))$$
$$\times \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n_0 p_j} + \frac{1}{24}(e(\lambda^4 + 10\lambda^3 + 37\lambda^2 + 60\lambda + 36) + a(23\lambda^2 - 3\lambda^4 + 30\lambda)$$
$$+ a\,\mathrm{diag}(a)(10\lambda - 3\lambda^2 - 10\lambda^3 + 3\lambda^4)$$
$$+ a\,\mathrm{diag}^2(a)(7\lambda^2 - 4\lambda - \lambda^4 - 4 + 2\lambda^3))\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(n_0 p_j)^2},$$
$$B_{0N}^2 = 2N\,\mathrm{diag}^2(e-a),$$

асимптотически нормально со средним 0 *и ковариационной матрицей*

$$Q_{0\varphi} = \mathrm{diag}^{-1}(e-a)(W - 2\,\mathrm{diag}(a) + a^T a)\,\mathrm{diag}^{-1}(e-a).$$

Доказательство. Повторим доказательство теоремы 2 со следующими уточнениями. Формула (43) приводит нас к аналогу равенства (59) в следующем виде

$$\sigma_{dN}^2 = 2(1-a_d)^2 N(1+o(1)),$$

и равенство (48) в условиях (55) и (15) к оценке

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}\varphi_j(V_j) - A_{0N} = o(N^{1/2}).$$

При гипотезе H_0 вид матрицы $Q_\varphi(N)$ получен в (33). Тогда

$$\sigma_N^{-1} Q_\varphi(N)\sigma_N^{-1} \to Q_{0\varphi}.$$

Отметим, что при гипотезе H_0 пределы (51)–(53) существуют,

$$\mathbf{E}\Delta e_d^2 = 0, \quad g(1) = \mathrm{diag}(e-a), \quad g(2) = 0, \quad g(3) = 0, \quad G = Q_{0\varphi}.$$

Оценка (60) имеет место как при гипотезе H_1, так и при H_0, в том числе и для

$$\sigma_N^2 = 2N\,\mathrm{diag}^2(e-a)(1+o(1)).$$

Тогда $\rho \to 0$ при $N \to \infty$, и остается оценить величину $\mu_d(4)$, которая при гипотезе H_0 оценивается, как видно из (46), величиной μ_d, и здесь уже не требуется, чтобы $P \to 0$.

Применим формулу (50). Полагая $\delta = 0$, получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_{dj}(4) = O(N) = o(\sigma_{dN}^4),$$

которая приводит к завершению доказательства в силу возможности применения к статистике $I(\lambda, r)$ при гипотезе H_0 теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $N \to \infty$, $n_0 = n_0(N)$ и справедлива гипотеза H_0. Тогда при выполнении условий* A_1, (15) *и* (55) *распределение статистики*

$$(I(\lambda) - A_{0N})(2N(r-1))^{-1/2},$$

где

$$\begin{aligned} A_{0N} = N(r-1) &+ \frac{1}{12}(r(3\lambda^2+10\lambda+10)+6\lambda(1-\lambda)+\|a\|^2(3\lambda^2-\lambda+2))\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_0 p_j} \\ &+ \frac{1}{24}\Bigg(r(\lambda^4+10\lambda^3+37\lambda^2+60\lambda+36)+23\lambda^2-3\lambda^4+30\lambda \\ &+ \|a\|^2(10\lambda-3\lambda^2-10\lambda^3+3\lambda^4) \\ &+ (7\lambda^2-4\lambda-\lambda^4-4+2\lambda^3)\sum_{d=1}^{r}a_d^3\Bigg)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(n_0 p_j)^2}, \end{aligned}$$

асимптотически нормально со средним 0 *и дисперсией* 1.

Доказательство. Проверим выполнимость условий теоремы 1 с использованием равенств

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= I(\lambda, r)e^T, \\ eQ_\varphi(N)e^T(2N(r-1))^{-1} &= (r-1)^{-1}e(W + a^Ta - 2\,\mathrm{diag}(a))e^T(1+o(1)) \\ &= (1+o(1)), \end{aligned}$$

последнее из которых вытекает из (33). В отличие от теоремы 3, условие (54) здесь не требуется. Дальнейшая проверка остальных условий теоремы 1 аналогична проверке при доказательстве теоремы 3.

Теорема 2 непосредственно может быть применена для изучения предельного распределения статистики $I(\lambda)$, в том числе и при гипотезе H_1. Однако, при этом придется требовать существования пределов (51)–(54), а это требование представляется избыточным в случае статистики $I(\lambda)$. Поэтому мы, аналогично доказательству теоремы 2, проведем непосредственное исследование статистики $I(\lambda)$ на основе теоремы 1, используя ранее полученные выражения (50), (47), (44).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *за исключением требования существования пределов* (51)–(54). *Тогда распределение статистики*

$$(I(\lambda) - A_{1N})B_N^{-1}(1),$$

где

$$\begin{aligned} B_N^2(1) &= 2N(r-1) + n_0 a\mathbf{E}\,\mathrm{diag}^2(\bar{\Delta})e^T, \\ A_{1N} &= N(r-1) + n_0 a\mathbf{E}\,\mathrm{diag}^2(\bar{\Delta})e^T + \sum_{j=1}^{N}\delta(j)(\lambda e^T + (\lambda+1)a^T) + \theta_{1N}, \\ \theta_{1N} &= O\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_0 q_j a^T}\right), \end{aligned}$$

асимптотически нормально со средним 0 *и дисперсией* 1.

Доказательство. Применим теорему 1 к статистике

$$L = \sum_{j=1}^{N} e\varphi_j^T(\nu_j)$$

Тогда из (44), (55) и (57) следуют соотношения

$$\sigma_N^2 = eQ_\varphi(N)e^T = B_N^2(1)(1+o(1)),$$

$$\sum_{j=1}^{N} e\mathbf{E}\varphi_j^T(v_j)eA_N^T = o(\sqrt{N}) = o(B_N(1)),$$

$$eA_N^T = A_{1N}.$$

Условие A_4 вытекает из (60), поскольку

$$\rho_N = \sigma_N \mathbf{E}\varphi_j^T(v_j)(v_j - \alpha_j)\operatorname{diag}^{-1/2}(n) = o(1).$$

Остается только отметить, что из (61) вытекает оценка

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}(e\varphi_j^T(v_j) - e\varphi_j^T(v_j))^4 = O\left(\sum_{d=1}^{r}\sum_{j=1}^{N}\mu_{d_j}(4)\right)$$

$$= o\left(\left(N + 2n_0 \sum_{d=1}^{r} \mathbf{E}\Delta_d^2\right)^2\right)$$

и, следовательно, в силу (15), условие A_3' также выполнено.

Замечание 4. Приведенные выражения для параметров центрирования A_{1N} и нормирования $B_{0N}(1)$ статистики $I(\lambda)$ показывают, что при некоторых типах полиномиальных схем $M(n_1, P_1), \ldots, M(n_r, P_r)$ величина $A_{1N}B_N^{-1}$ может зависеть от λ. При этом величины $(A_{1N} - A_{0N})B_{0N}^{-1}$, $(A_{1N} - A_{0N})B_{1N}^{-1}$, определяющие ошибки первого и второго родов, будут определяться в основном значениями величины $2\lambda\sum_{j=1}^{N}\delta(j)e^T$.

Замечание 5. С использованием (47) выражение для θ_{1N} можно более точно выписать в явном виде с точностью до

$$O(N\Delta^2) + O\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{(n_0 q_j a^T)^3}\right) = o(\sqrt{N}).$$

Мы уже отмечали справедливость равенств $\delta(j)a^T = 0$, $j = 1, \ldots, N$, вытекающую из определения (36), поэтому

$$2\lambda\sum_{j=1}^{N}\delta(j)e^T = 0,$$

если $a = e/r$, то есть для ситуации, когда $n_1 = \ldots = n_r$, разности $A_{1N} - A_{0N}$ не зависят от λ. Равенство

$$2\lambda\sum_{j=1}^{N}\delta(j)e^T = 0$$

также справедливо, если

$$q_j a^T = (p_{1j}, \dots, p_{rj}) a^T = 1/N, \qquad j = 1, \dots, N,$$

поскольку

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta(j) = \sum_{j=1}^{N}\delta(j)(q_j a^T) = 0.$$

Вместе с тем, можно также рассмотреть ситуации, аналогичные примеру и следствию 3 из [7], демонстрирующие отмеченную зависимость $A_{1N} - A_{0N}$ от λ и показывающие, что увеличение значения λ может приводить к повышению эффективности различения гипотез H_0 и H_1 при применении критерия, основанного на статистике $I(\lambda)$. Мы не будем здесь этого делать, а рассмотрим один, вытекающий из теоремы 2, результат, относящийся к r-мерной статистике $I(\lambda, r)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *кроме существования пределов* (51)–(54), *а вместо* (53) *потребуем существование предела*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}^{-1/2}\operatorname{diag}^2(\bar\Delta)\mathbf{E}\bar\Delta^T\bar\Delta\mathbf{E}^{-1/2}\operatorname{diag}^2(\bar\Delta) = g(\Delta).$$

Тогда, если

$$\frac{n_0\mathbf{E}\Delta_d^2}{N^2} \to \infty, \qquad d = 1, \dots, r. \tag{62}$$

то заключение теоремы 2 *имеет место при*

$$\begin{aligned} A_N &= n_0 a\mathbf{E}\operatorname{diag}^2(\bar\Delta),\\ B_N^2 &= 2n_0\operatorname{diag}(a)\mathbf{E}\operatorname{diag}^2(\bar\Delta)\operatorname{diag}(e-a),\\ G &= \operatorname{diag}^{-1/2}(e-a)(W - \operatorname{diag}^{1/2}(a)g(\Delta)\operatorname{diag}^{1/2}(a))\operatorname{diag}^{-1/2}(e-a). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство заключается, во-первых, в использовании условия (62) для вычисления пределов:

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{N\to\infty} 2NB_N^{-2} = 0,\\ g(2) &= \lim_{N\to\infty} 2n_0\mathbf{E}\operatorname{diag}^2(\bar\Delta)(2n_0)^{-1}\mathbf{E}^{-1}(\operatorname{diag}^2(\bar\Delta))\operatorname{diag}^{-1}(a)\operatorname{diag}^{-1}(e-a)\\ &= \operatorname{diag}^{-1}(a),\\ g(3) &= \lim_{N\to\infty}(2n_0)(2n_0)^{-1}\operatorname{diag}^{-1/2}(a)\mathbf{E}^{-1/2}\operatorname{diag}^2(\bar\Delta)\mathbf{E}(\bar\Delta)^T\bar\Delta\\ &\qquad\times\mathbf{E}^{-1/2}\operatorname{diag}^2(\bar\Delta)\operatorname{diag}^{-1/2}(a)\\ &= \operatorname{diag}^{-1/2}(a)\operatorname{diag}^{-1/2}(e-a)g(\Delta)\operatorname{diag}^{-1/2}(a)\operatorname{diag}^{-1/2}(e-a). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} G &= g(2)\operatorname{diag}(a) - \operatorname{diag}(a)g(3)\operatorname{diag}(a)\\ &= \operatorname{diag}^{-1/2}(e-a)(W - \operatorname{diag}^{1/2}(a)g(\Delta)\operatorname{diag}^{1/2}(a))\operatorname{diag}^{-1/2}(e-a). \end{aligned}$$

Во-вторых, оно состоит в использовании для θ_N вытекающей из (47) оценки

$$|\theta_N B_N^{-1}| = o(1).$$

Рассмотрим возможные статистические применения полученных результатов. Применение статистики $I(\lambda)$ в критерии однородности не вызывает особых затруднений, для этого следует воспользоваться теоремами 4 и 5. В зависимости от различных предположений о малости величин $\mathbf{E}\Delta_d^2, d = 1, \ldots, r$, то есть отличий распределений $P_1, \ldots, P_r$ полиномиальных схем $M(n_1, P_1), \ldots, M(n_r, P_r)$ от среднего распределения

$$P_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0N}), \quad p_{0j} = \sum_{d=1}^{r} p_{dj} a_d, \quad j = 1, \ldots, N,$$

чувствительность критерия, основанного на статистике $I(\lambda)$, будет различна и определяется величинами $(A_{1N} - A_{0N})B_{0N}^{-1}, (A_{1N} - A_{0N})B_{1N}^{-1}$.

Например, при выполнении условия (62)

$$(A_{1N} - A_{0N}) = n_0 \sum_{d=1}^{r} a_d \mathbf{E}\Delta_d^2 (1 + o(1)),$$

$$B_{1N}^2 = n_0 \sum_{d=1}^{r} a_d(1 - a_d)\mathbf{E}\Delta_d^2, \qquad B_{0N}^2 = 2N(r-1).$$

Замечание 6. На основе теоремы 2 весьма жесткое условие (62) может быть существенно ослаблено в частных случаях распределений $P_1, \ldots, P_r$ и соотношений объемов испытаний $a_1, \ldots, a_r$.

С другой стороны, если

$$n_0 \sum_{d=1}^{r} a_d(1 - a_d)\mathbf{E}\Delta_d^2 = o(N^{1/2}),$$

то гипотезы H_0 и H_1 различаться не будут, так как

$$A_{1N} - A_{0N} = o(B_{0N}),$$
$$B_{1N} = B_{0N}(1 + o(1)) = (1 + o(1))\sqrt{2N(r-1)}.$$

Интересен промежуточный случай, когда

$$n_0 \sum_{d=1}^{r} a_d(1 - a_d)\mathbf{E}\Delta_d^2 = c\sqrt{N}.$$

В этом случае

$$(A_{1N} - A_{0N})B_{0N,1N} = \frac{c\sqrt{N}}{\sqrt{r-1}}(1 + o(1)).$$

Новые возможности появляются при использовании статистики $I(\lambda, r)$ для решения задачи выделения некоторых полиномиальных схем, отличающихся от остальных, на основе теоремы 2. Рассмотрим одну из возможных ситуаций.

Пусть $P = P_2 = \ldots = P_r$, $P = (p_1, \ldots, p_N)$, а $P_1 \neq P$, и речь идет о близкой альтернативе H_1. Тогда

$$\begin{aligned} q_j a^T &= p_{1j} a_1 + (1 - a_1) p_j = p_j + a(p_{1j} - p_j) \\ &= p_j \left(1 + a_1 \frac{p_{1j}}{p_j} - 1\right) = p_j(1 + a_1 \varepsilon_j), \\ \varepsilon_j &= \frac{p_{1j}}{p_j} - 1, \\ \delta_1(j) &= (1 - a_1) \frac{\varepsilon_j}{1 + a_1 \varepsilon_j}, \\ \delta_d(j) &= -\frac{a_1 \varepsilon_j}{1 + a_1 \varepsilon_j}, \quad d = 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Delta_1^2 &= \sum_{j=1}^{N} (1 - a_1)^2 \frac{\varepsilon_j^2}{(1 + a_1 \varepsilon_j)^2} p_j (1 + a_1 \varepsilon_j) = (1 - a_1)^2 \varepsilon^2, \\ \varepsilon^2 &= \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\varepsilon_j^2}{(1 + a_1 \varepsilon_j)} = \sum_{j=1}^{N} p_j \varepsilon_j^2 + O(\max_{1 \leqslant j \leqslant N} |\varepsilon_j|^3), \\ \mathbf{E}\Delta_d^2 &= \sum_{j=1}^{N} a_1^2 \frac{\varepsilon_j^2}{(1 + a_1 \varepsilon_j)^2} p_j (1 + \varepsilon_j a_1) \\ &= a_1^2 \sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\varepsilon_j^2}{(1 + a_1 \varepsilon_j)} = a_1^2 \varepsilon^2, \quad d = 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Тогда фигурирующие в следствии 1 параметры имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Delta_1^2, \ldots, \Delta_r^2) &= ((1 - a_1)^2, a_1^2, \ldots, a_1^2)\varepsilon^2 = ((1 - 2a_1)e_1 + a_1^2 e)\varepsilon^2, \\ A_N &= n_0(a_1, \ldots, a_r) \operatorname{diag}(\mathbf{E}\Delta_1^2, \ldots, \mathbf{E}\Delta_r^2)(1 + o(1)) \\ &= n_0 \varepsilon^2 (a_1(1 - 2a_1)e_1 + a_1^2 a)(1 + o(1)) \\ &= n_0 \varepsilon^2 a_1((1 - 2a_1)e_1 + a_1 a)(1 + o(1)), \\ B_N^2 &= 2n_0 \varepsilon^2 \operatorname{diag}(a) \operatorname{diag}(e - a) \operatorname{diag}((1 - 2a_1)e_1 + a_1^2 e) \\ &= 2 \operatorname{diag}(e - a) \operatorname{diag}(A_N)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Теперь найдем предел $g(\Delta)$. Для этого вычислим

$$\mathbf{E}\Delta^T \Delta = \varepsilon^2 \begin{pmatrix} (1 - a_1)^2 & -(1 - a_1)^2 & \ldots & -(1 - a_1)^2 \\ -(1 - a_1)^2 & a_1^2 & \ldots & a_1^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -(1 - a_1)^2 & a_1^2 & \ldots & a_1^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^{-1/2} \operatorname{diag}^2(\bar{\Delta}) \mathbf{E}\Delta^T \Delta \mathbf{E}^{-1/2} \operatorname{diag}^2(\bar{\Delta}) \\ &\quad = \varepsilon^{-2} \operatorname{diag}^{-1}(1 - a_1, a_1, \ldots, a_1) \mathbf{E}\Delta^T \Delta \operatorname{diag}^{-1}(1 - a_1, a_1, \ldots, a_1) = e^T e = g(\Delta) \end{aligned}$$

и

$$G = G_\varepsilon = W - \begin{pmatrix} a_1 & & & \sqrt{a_d a_s} \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \sqrt{a_d a_s} & & & a_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-a_1 & & & -\sqrt{a_d a_s} \\ & 1-a_2 & & \\ & & \ddots & \\ -\sqrt{a_d a_s} & & & 1-a_r \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в условиях следствия 1 статистика

$$I(\lambda, r)(2n_0\varepsilon^2)^{-1/2} \operatorname{diag}^{-1}(1-a_1, a_1, \ldots, a_1) \operatorname{diag}^{-1/2}(a) \\ - \sqrt{n_0\varepsilon^2 a_1/2}(1-a_1, \sqrt{a_1 a_2}, \ldots, \sqrt{a_1 a_r})(1+o(1)) \qquad (63)$$

асимптотически имеет нормальное распределение со средним 0 и матрицей ковариации G_ε.

Каким образом можно использовать сходимость распределения статистики (63) для выделения отличной от остальных полиномиальной схемы? Во-первых, выбираем $a_1 = \ldots = a_r = 1/r$, поскольку неизвестно, какой номер имеет отличная от других схема. Во-вторых, задаем ε^2 как исходную характеристику требования различимости распределений. Затем вычисляем r-мерную статистику

$$\bar{I}(\lambda, r) = I(\lambda, r)(2n_0\varepsilon^2)^{-1/2}.$$

Вследствие сходимости распределения статистики (63) и распределение статистики $\bar{I}(\lambda, r) - \bar{A}(r)$, где

$$\bar{A}(r) = \sqrt{n_0\varepsilon^2/2}((1-a_1)^2 a_1, a_1^2 a_2, \ldots, a_1^2 a_r)(1+o(1)),$$

асимптотически нормально со средним 0 и ковариационной матрицей

$$G(1) = \operatorname{diag}(a) \operatorname{diag}(1-a_1, a_1, \ldots, a_1)(W - e^T e) \operatorname{diag}(a) \operatorname{diag}(1-a_1), a_1, \ldots, a_1).$$

При $a_d = 1/r$, $d = 1, \ldots, r$, вектор смещения имеет вид

$$\bar{A}(r) = \sqrt{\frac{n_0\varepsilon^2}{2r^2}} \left(\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2, \frac{1}{r^2}, \ldots, \frac{1}{r^2} \right)$$

и

$$G_\varepsilon = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-1/r)^3 & -(1-1/r)r^{-2} & \ldots & -(1-1/r)r^{-2} \\ -(1-1/r)r^{-2} & (1-1/r)r^{-2} & \ldots & -r^{-3} \\ & & \ddots & \\ -(1-1/r)r^{-2} & -r^{-3} & \ldots & (1-1/r)r^{-2} \end{pmatrix}. \qquad (64)$$

Таким образом, на координате смещения, где находится статистика, соответствующая выделяющейся схеме при $r \geqslant 3$, наблюдается преобладание, пропорциональное величине

$\sqrt{n_0\varepsilon^2}$, стремящейся к бесконечности при $N \to \infty$, то есть это преобладание может быть весьма велико. Интересно отметить, что при $r = 2$ обе координаты вектора смещения одинаковы, то есть выделить, на каком из двух мест стоит отличная координата, невозможно, но это и не нужно, так как при $r = 2$ вопрос выделения эквивалентен вопросу тождественности схем. При $r \geqslant 3$ координата, соответствующей отличной от других схем, имеет среднее, отличающееся от остальных на величину

$$\sqrt{\frac{n_0\varepsilon^2}{2r^2}}\left(1 - \frac{2}{r}\right).$$

Таким образом, в силу фиксированности $G(1)$, при достаточно большом $\sqrt{n_0\varepsilon^2}$ вероятность выделения схемы, отличной от остальных, будет сколь угодно близка к единице.

Список литературы

1. Read T. R. C., Cressie N. A. C., *Goodness-of-fit statistics for discrete multivariate data.* Springer, New York, 1988.
2. Быков С. И., Иванов В. А., Об условиях асимптотической нормальности многомерных рандомизированных разделимых статистик. *Дискретная математика* (1989) **1**, №2, 57–61.
3. Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Дискретные задачи в теории вероятностей. *Итоги науки и техники, серия: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика.* ВИНИТИ, Москва, 1984, т. **22**, с. 3–59.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Разделимые статистики и проверка гипотез. Случай малых выборок. *Теория вероятностей и ее применения* (1977) **23**, №4, 796–806.
5. Knuth D. E., Two notes on notation. *American Math. Monthly* (1992) **99**, 402–422.
6. Баранов А. П., Баранов Ю. А., Аппроксимация целочисленных моментов обобщенными факториальными степенями. *Дискретная математика* (2005) **17**, №1, 50–67.
7. Баранов А. П., Баранов Ю. А., Распределение статистики степени рассеивания с растущим числом исходов в критерии принадлежности. *Труды по дискретной математике* (2005) **8**, 34–51.
8. Рао С. Р., *Линейные статистические методы и их применения.* Наука, Москва, 1968.
9. Ивченко Г. И., Левин В. В., Разделимые статистики и критерии однородности для полиномиальных выборок. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1995) **2**, №6, 871–887.
10. Крамер Г., *Математические методы статистики.* Мир, Москва, 1975.

Статья поступила 20.02.2005.