



УДК: 517.925+517.938.5
MSC 2010: 37J05, 34C14

Топологическая монодромия в неголономных системах

А. В. Болсинов, А. А. Килин, А. О. Казаков

В работе обсуждается феномен топологической монодромии в интегрируемых гамильтоновых и неголономных системах. Предложен эффективный метод для ее вычисления и визуализации. Проведен сравнительный анализ топологической монодромии в задачах о качении эллипсоида вращения по гладкой и шероховатой плоскости. Первая из этих систем является гамильтоновой, вторая — неголономной. Показано, что с точки зрения монодромии никаких отличий между этими системами нет, и тем самым опровергнута гипотеза Кушмана и Дюистермаата о том, что топологическая монодромия дает топологическое препятствие к гамильтонизации задачи о качении эллипсоида вращения по шероховатой плоскости.

Получено 28 марта 2013 года
После доработки 13 мая 2013 года

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, соглашение № 14.В37.21.1935 «Топологические методы в механике и гидродинамике», АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2012–2014 годы, № 1.1248.2011 «Неголономные динамические системы и проблемы управления», АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2012–2014 годы, № 1.7734.2013 «Разработка неголономных мобильных систем». Работа А. А. Килина поддержана грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук МД-2324.2013.1 «Исследование неголономных мобильных систем с учетом различных моделей трения, регулярных и хаотических режимов и управления».

Болсинов Алексей Викторович
A.Bolsinov@lboro.ac.uk
School of Mathematics, Loughborough University
United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Килин Александр Александрович
aka@rcd.ru
Казаков Алексей Олегович
Kazakovdz@yandex.ru
Институт компьютерных исследований;
лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Ключевые слова: топологическая монодромия, интегрируемые системы, неголономные системы, отображение Пуанкаре, бифуркационный анализ, фокусные особенности

Содержание

1. Введение	204
2. Топологическая монодромия в интегрируемых системах	205
2.1. Как мы собираемся монодромию вычислять?	209
3. Качение осесимметричного эллипсоида по гладкой плоскости	212
3.1. Уравнения движения и первые интегралы	212
3.2. Бифуркационный анализ	213
3.3. Анализ монодромии	215
4. Качение осесимметричного эллипсоида по абсолютно шероховатой плоскости	219
4.1. Уравнения движения и первые интегралы	219
4.2. Бифуркационный анализ	221
4.3. Анализ монодромии	223
5. Результаты проведенного анализа и выводы	224

1. Введение

Данная работа мотивирована следующим общим вопросом классической механики: чем и в какой мере динамическое поведение неголономных систем отличается от поведения гамильтоновых? С этим вопросом непосредственно связана известная проблема гамильтонизации: можно ли путем подходящего выбора пуассоновой структуры и замены времени превратить заданную неголономную систему в гамильтонову? Эта проблема весьма нетривиальна, обсуждается во многих работах (см., например, [6, 11–13, 18–21, 27, 28, 30, 31]), и имеет много различных аспектов. Одним из них является поиск топологических препятствий к гамильтонизации интегрируемых неголономных систем.

В нашей конкретной ситуации под интегрируемостью понимается существование достаточного числа таких первых интегралов системы, что их совместная неособая поверхность уровня является двумерным тором (так же, как в случае интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы) и на фазовом пространстве системы возникает слоение на инвариантные торы. Говоря о топологических препятствиях к гамильтонизации, здесь мы имеем в виду следующий содержательный и важный вопрос: можно ли в структуре такого слоения выделить те свойства, которые позволяют отличить его от аналогичных слоений, возникающих в интегрируемых гамильтоновых системах (так называемых лиувилевых слоений)?

Вблизи регулярного слоя таких препятствий, разумеется, нет. Более того, известно, что при наличии инвариантной меры система (после подходящей замены времени) гамильтонизуется (см. [1, 15]). Однако топологические препятствия могут существовать в окрестности сингулярных слоев. Одним из таких препятствий является так называемая топологическая монодромия слоения. Изучению различий между гамильтоновой и негамильтоновой

монодромией посвящена известная работа Дюистермаата и Кушмана [24], в которой дан подробный теоретический анализ монодромии в интегрируемых неголономных системах. В качестве конкретного примера неголономной системы, в которой монодромия, возникающая при обходе особого слоя, дает топологическое препятствие и гамильтонизация системы невозможна, авторы приводят задачу о качении вытянутого эллипсоида вращения по плоскости без проскальзывания.¹

Хорошо известно, однако, что аналогичная задача в случае бесконечно гладкой плоскости (то есть когда трение обращается в нуль) гамильтоновой является. В этой гамильтоновой системе имеется совершенно аналогичный особый слой с «обычной», то есть гамильтоновой, монодромией. В связи с этим было бы очень интересно увидеть динамические различия в поведении этих двух довольно схожих систем. Поскольку монодромия является грубой топологической характеристикой, то эффект должен хорошо наблюдаться. Наши предварительные теоретические рассуждения, однако, никаких принципиальных различий в поведении этих двух систем не выявили. Поэтому мы решили провести более подробный и аккуратный анализ топологической монодромии для двух этих систем. Именно это исследование составляет содержание настоящей работы.

Структура работы такова. В следующем разделе мы напоминаем понятие монодромии для интегрируемых систем и обсуждаем некоторые ее свойства в случае гамильтоновых систем, в частности, следуя работе [24], делаем акцент на различии между гамильтоновым и негамильтоновым случаями. Затем мы обсуждаем один из возможных способов практического вычисления монодромии в системах с вращательной симметрией, основанный на анализе некоторых свойств отображения Пуанкаре для специальным образом выбранного сечения. В последующих разделах мы применяем этот способ для исследования монодромии в двух интегрируемых задачах о качении вытянутого эллипсоида вращения: на гладкой плоскости (гамильтонов случай) и на шероховатой плоскости (неголономный случай).

Основной вывод работы заключается в том, что с точки зрения монодромии эти две системы устроены совершенно одинаково. В частности, никаких препятствий для гамильтонизации второй из них монодромия не дает. Более того, наш анализ фактически приводит к заключению об изоморфности слоений на инвариантные торы в этих двух задачах. Это, однако, не означает, что монодромия оказывается бесполезной в проблеме гамильтонизации. Напротив, она позволяет сузить «сектор поиска» подходящей пуассоновой структуры. Об этом идет речь в заключительной части работы.

2. Топологическая монодромия в интегрируемых системах

Понятие монодромии в интегрируемых (гамильтоновых) системах было введено Дюистермаатом в [26] как одно из препятствий к существованию глобальных переменных действие–угол. Поскольку это понятие носит чисто топологический характер, то есть полностью определяется свойствами слоения на инвариантные торы, то его легко перенести на случай неголономных интегрируемых систем.

¹Вот цитата из [24]: “Because the monodromy going around this heteroclinic cycle is the identity, the rolling prolate ellipsoid of revolution can not be made into a Hamiltonian system, even though it is time reversible and energy conserving. This is an example where a global invariant (namely, monodromy) has been used to show that a 4-dimensional conservative time reversible system is not Hamiltonian”. К сожалению, подробных пояснений к этому заключению работа не содержит, поэтому затруднительно не только указать на возможные неточности, но даже понять строгую математическую формулировку приведенного выше утверждения.

Мы напомним определение монодромии в интересующем нас случае (различные обобщения обсуждаются в [32]). Рассмотрим интегрируемую динамическую систему, фазовое пространство которой расслоено на двумерные инвариантные многообразия (торы). Особые слои мы игнорируем (выбрасываем). Выберем какой-либо конкретный тор T_0 и некоторую его деформацию T_t , $t \in [0, 1]$, такую, что $T_1 = T_0$. Другими словами, мы рассматриваем замкнутый путь в пространстве параметров (то есть значений первых интегралов), задающий такую деформацию, после завершения которой тор возвращается в исходное положение.

Далее мы фиксируем пару базисных циклов λ_0, μ_0 на исходном торе T_0 и в процессе деформации непрерывным образом меняем их, получая в итоге семейство циклов λ_t, μ_t , при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ образующих базис на торе T_t . Когда деформация завершится, на торе $T_1 = T_0$ мы получим некоторую пару базисных циклов λ_1, μ_1 . Ясно, что если деформация происходила внутри малой окрестности тора T_0 , то полученные циклы будут гомологичны исходным циклам λ_0, μ_0 , то есть λ_0 и λ_1 могут быть непрерывно продеформированы друг в друга внутри тора T_0 (аналогично для μ_0 и μ_1). Однако если семейство торов T_t уходило «далеко» от начального тора T_0 , то может случиться так, что новые циклы λ_1, μ_1 будут совсем другими, существенно отличающимися от λ_0, μ_0 . Они, однако, по-прежнему будут образовывать базис и поэтому с точностью до гомотопии будут связаны с исходными некоторой целочисленной унимодулярной матрицей:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Эта матрица и называется матрицей монодромии, отвечающей рассмотренной деформации. Если она не является единичной, то говорят о нетривиальной монодромии.

Сделаем еще несколько общих замечаний по поводу монодромии, поясняющих ее природу.

Если мы рассматриваем слоение фазового пространства \mathcal{M}^4 на интегральные многообразия², отвечающие двум интегралам H и F , то удобно (как все обычно и делают) рассмотреть интегральное отображение $\Phi = (H, F): \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$, его образ $\Phi(\mathcal{M})$ и бифуркационную диаграмму $\Sigma \subset \Phi(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^2$. Тогда выбор начального тора T_0 эквивалентен выбору неособой (то есть лежащей вне Σ) точки $a \in \Phi(\mathcal{M})$. Сам тор T_0 — это прообраз точки a . Деформация тора задается выбором в образе интегрального отображения некоторой замкнутой кривой $\gamma(t)$, которая не пересекает бифуркационную диаграмму (здесь, разумеется, $\gamma(0) = \gamma(1) = a$). Кривая γ задает деформацию тора (то есть мы полагаем $\Phi^{-1}(\gamma(t)) = T_t$) и тем самым монодромию.

Если кривую γ в образе отображения момента непрерывно деформировать (так, чтобы деформация не задевала бифуркационную диаграмму), то монодромия меняться не будет. В частности, нетривиальная монодромия будет возникать только для нестягиваемых кривых γ . Такие нестягиваемые кривые существуют отнюдь не всегда, но довольно часто: например, когда бифуркационная диаграмма помимо некоторых гладких кривых содержит изолированные особые точки. В этом случае в качестве нестягиваемой кривой можно взять маленькую окружность вокруг такой точки. Именно такая ситуация нас и будет интересовать. Обсудим ее подробнее.

²Эта конструкция не изменится, если рассмотреть пятимерное пространство \mathcal{M}^5 , на котором задана динамическая система с тремя интегралами H, F_1, F_2 . Ниже мы будем рассматривать именно такой случай.

В интегрируемых системах часто встречается ситуация, когда особое интегральное многообразие имеет вид тора с перетяжкой или с несколькими перетяжками (см. рис. 1). Особые точки на слое являются в этом случае положениями равновесия системы и имеют тип фокус-фокус. Описанию топологии таких особенностей посвящен целый цикл работ [10, 24, 29], где читатель найдет подробное изложение необходимых определений и результатов. Мы ограничимся перечислением основных свойств фокусных особенностей, которые необходимы для понимания дальнейшего.

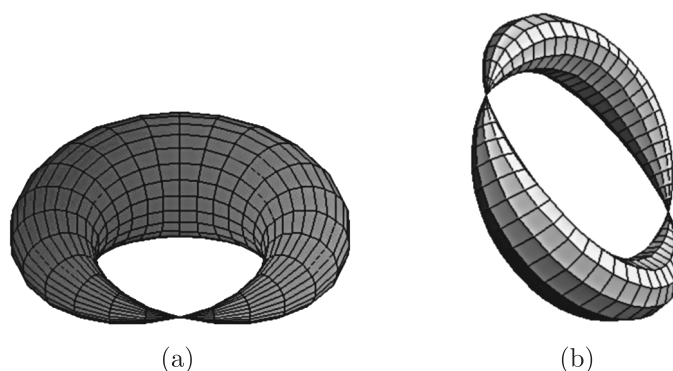


Рис. 1.

- Фокусные особые слои изолированы: рядом с ними в фазовом пространстве \mathcal{M}^4 все остальные слои являются неособыми, то есть торами. На бифуркационной диаграмме интегрального отображения они дают изолированную точку (типичные примеры: волчок Лагранжа, сферический маятник, система «бутылка шампанского»).
- Обход вокруг такой особой точки в образе интегрального отображения определяет нетривиальную деформацию тора вокруг особого слоя, поэтому можно задать вопрос о монодромии. Каждая фокусная точка на особом слое дает в монодромии один и тот же «вклад», а именно матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В гамильтоновом случае (см. [10], [29]) эти матрицы перемножаются и общая матрица монодромии будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где k — число особых точек на слое (то есть число перетяжек). В негамильтоновом случае ситуация может быть иной (см. [24]): каждая точка дает такой же вклад, но в общее произведение входит либо сама эта матрица, либо ее обратная. Другими словами, в итоге эти матрицы «частичной» монодромии могут компенсировать друг друга. Например, в случае тора с двумя перетяжками (рис. 1b) полная монодромия может оказаться тривиальной, что в гамильтоновом случае невозможно.

- Фокусные особенности устойчивы по отношению к (интегрируемым) деформациям системы. Так, если система зависит от параметра, то при всех малых значениях параметра фокусная особенность будет сохраняться. В частности, если мы рассматриваем не четырехмерное фазовое пространство, а семейство четырехмерных фазовых пространств, параметризованное функцией Казимира J (а в неголономном случае — просто каким-то интегралом), то мы получим семейство фокусных особенностей. В этом случае удобно рассмотреть «трехмерное» интегральное отображение, добавив к интегралам H , F дополнительный параметр J . На бифуркационной диаграмме такого отображения фокусным особым слоям будет отвечать некоторая кривая. Монодромия будет иметь смысл и в этом случае, причем в процессе деформации, делая обход вокруг этой кривой, мы можем варьировать значения всех интегралов, включая J .

Типичный пример ситуации, когда фокусная особенность обязательно возникает, — это натуральная система с гамильтонианом $H = K + V$, инвариантная относительно вращений. Тогда положение равновесия, отвечающее локальному максимуму потенциала, будет фокусной особой точкой. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для неголономных систем: инвариантность относительно вращений приводит к появлению особенностей фокусного типа (в негамильтоновом случае такие особенности подробно исследованы в [24]).

Если мы хотим, чтобы на особом слое оказалась не одна, а две фокусные точки, то нужно рассмотреть систему, обладающую дополнительной \mathbb{Z}_2 -симметрией. Как раз такая ситуация реализуется в задаче о качении вытянутого эллипсоида вращения по плоскости (причем как по гладкой, так и по шероховатой). Когда эллипсоид стоит вертикально, мы имеем положение неустойчивого равновесия. Поскольку система инвариантна относительно вращений, то оно будет фокусного типа. Верхняя и нижняя точки эллипсоида симметричны, поэтому мы получим две фокусные точки. При этом они лежат на одной и той же интегральной поверхности. Это видно из того, что если эллипсоид слегка шевельнуть, то он сначала «упадет», а затем снова встанет, причем нижняя и верхняя точки поменяются местами.

Если качение происходит по абсолютно гладкой плоскости, то система гамильтонова, и монодромия задается матрицей $A_{\text{monodr}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Про гамильтоновость аналогичной системы на шероховатой плоскости (качение без проскальзывания) ничего не известно, поэтому априори, согласно общей теореме о негамильтоновой монодромии [24], возможны два варианта:

$$A_{\text{monodr}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad A_{\text{monodr}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Если реализуется второй из них³, то гамильтонизация этой неголономной системы заведомо невозможна. Какой же из этих случаев реализуется в действительности?

Ниже мы дадим ответ на этот вопрос и при этом увидим, что сам вопрос не вполне корректно сформулирован: результат зависит от способа обхода. Дело в том, что в задаче о качении эллипсоида пространство, на котором определена система, имеет размерность 5, а система обладает тремя интегралами. Поэтому ситуация сложнее, чем в случае модельного примера, когда обход совершается вокруг изолированной точки на плоскости. Здесь

³Именно это утверждается в [24].

обход нужно делать в трехмерном пространстве и, как мы увидим ниже, возможны существенно различные варианты.

2.1. Как мы собираемся монодромию вычислять?

Обычно вычисление монодромии основано на комбинации аналитических и топологических рассуждений: сначала рассматриваются явные аналитические формулы для интегралов, а затем они анализируются с привлечением топологических соображений.

В задаче об эллипсоиде на шероховатой плоскости такой способ не работает, поскольку явных формул для интегралов мы не знаем. Вместо этого предлагается монодромию не вычислять, а визуализировать, используя динамику и численное интегрирование. Основная идея состоит в том, что монодромию можно восстановить, используя некоторые очень естественные динамические свойства системы (аналогичный подход был предложен в [25]). Подчеркнем, что описанная ниже конструкция может быть модифицирована для гораздо более широкого класса систем, включая неинтегрируемые. Тот эффект, который мы будем наблюдать, с интегрируемостью непосредственно не связан. Речь пойдет о некотором свойстве отображения Пуанкаре, которое является довольно грубым и поэтому, в частности, «выживает» при возмущениях системы (в том числе, разумеется, неинтегрируемых). В рассматриваемом нами интегрируемом случае этот эффект удастся интерпретировать в терминах топологической монодромии, и именно эту интерпретацию мы используем в нашем исследовании.

Итак, мы хотим исследовать монодромию, отвечающую обходу вокруг изолированной особой точки на бифуркационной диаграмме интегрального отображения $\Phi = (H, F): M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (или, что то же самое, обходу вокруг изолированного особого слоя в фазовом пространстве). Основным пример, который нас интересует, — это особый слой фокусного типа (см. рис. 1), но излагаемая ниже конструкция может работать и в более общей ситуации.

Пусть γ — замкнутый путь вокруг особой точки в образе отображения момента. В качестве γ можно рассматривать окружность достаточно малого радиуса, а в качестве параметра — угол $\alpha \in [0, 2\pi]$. Рассмотрим прообраз γ при интегральном отображении. Каждая точка кривой γ отвечает инвариантному тору, поэтому в целом прообразом γ будет некоторое трехмерное многообразие Q^3 . С топологической точки зрения Q^3 представляет собой расслоение над окружностью γ со слоем T^2 .

Описать топологию Q^3 очень просто с использованием как раз монодромии A_{monodr} . Нужно взять сначала прямое произведение $T^2 \times [0, 2\pi]$, а затем склеить основания этого цилиндра, то есть отождествить торы $T^2 \times \{0\}$ и $T^2 \times \{2\pi\}$ по «линейному» отображению, которое в стандартных угловых координатах задается матрицей A_{monodr} . Наша цель — восстановить эту матрицу.

Решение этой задачи существенно облегчается в том случае, когда система обладает дополнительной $SO(2)$ -симметрией. Фокусные особенности этому свойству всегда удовлетворяют (см. [29]), а в наших задачах о качении эллипсоида вращательная симметрия обусловлена геометрическими причинами, поскольку мы рассматриваем эллипсоид вращения. Мы будем использовать наличие векторного поля симметрий, траектории которого представляют собой замкнутые циклы, лежащие на интегральных поверхностях.

Это немедленно приводит к весьма специальному виду матрицы монодромии. Действительно, согласно общей конструкции, мы должны выбрать пару базисных циклов λ_0, μ_0 на инвариантном торе, а затем проследить за их деформацией при обходе вокруг особого слоя. При наличии поля симметрий в качестве одного из названных циклов, например μ_0 , мы мо-

жем выбрать траекторию поля симметрий, причем это можно сделать сразу на всех торах одновременно, то есть считать, что μ_α всегда является траекторией поля симметрий. Таким образом, после завершения обхода мы будем иметь $\mu_{2\pi} = \mu_0$, а это означает, что матрица монодромии имеет вид

$$A_{\text{monodr}} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при любом выборе дополнительного цикла λ , и весь вопрос в том, чтобы найти единственное число $k \in \mathbb{Z}$.

Для этого мы используем тот факт, что помимо структуры расслоения на (инвариантные) торы на Q^3 имеется дополнительная структура, а именно исходная динамическая система. Нашу идею удобнее объяснить при помощи картинки (см. рис. 2). На рисунке изображено прямое произведение $T^2 \times [0, 2\pi]$ с отмеченными базисными циклами $\lambda_i, \mu_i, i = 0, 2\pi$, на верхнем и нижнем основаниях. Пунктирными линиями на рисунке изображены фазовые траектории системы. Чтобы получить Q^3 , верхнее и нижнее основания цилиндра нужно склеить по линейному отображению, которое в указанных базисах задается формулой

$$\begin{pmatrix} \lambda_{2\pi} \\ \mu_{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix},$$

где $k \in \mathbb{Z}$ (это число нам нужно определить). Здесь μ — однозначно определенный цикл, переходящий при склейке в себя. В частности, если рассмотреть цилиндр, соединяющий циклы μ_0 и $\mu_{2\pi}$ (другими словами, мы рассматриваем все семейство циклов $\mu_\alpha, \alpha \in [0, 2\pi]$), то при общей склейке оснований $T^2 \times \{0\}$ и $T^2 \times \{2\pi\}$ эти циклы нам нужно будет отождествить, и мы получим в результате некоторый двумерный тор T_{transv} , лежащий внутри Q^3 и составленный из μ -циклов.

Этот тор не является инвариантным. Наоборот, он трансверсален исходной динамической системе, поэтому его можно взять в качестве глобального сечения Пуанкаре для потока на Q^3 (см. [14]).

Давайте теперь посмотрим на топологию Q^3 с другой стороны. Нетрудно видеть, что, разрезав Q^3 вдоль тора T_{transv} , мы снова получим прямое произведение $T^2 \times I$ (где I — некоторый интервал), но теперь в качестве тора T^2 будет выступать не инвариантный тор, а наоборот, трансверсальный T_{transv} . С чисто топологической точки зрения это наблюдение эквивалентно тому, что Q^3 имеет две различные структуры T^2 -расслоения над окружностью: в первом случае слоями будут инвариантные торы, а во втором — трансверсальные.

Рассмотрим второе (трансверсальное) представление. Каким отображением задается склейка в этом случае? Для трансверсального тора ответ очевиден: это в точности отображение Пуанкаре, задаваемое потоком, —

$$\sigma: T_{\text{transv}} \rightarrow T_{\text{transv}}. \quad (2.2)$$

Это отображение также некоторым образом преобразует базисные циклы на сечении Пуанкаре T_{transv} . Преобразование снова задается некоторой целочисленной матрицей. Остается заметить, что эта матрица будет той же самой, что и матрица монодромии. Этот факт можно «увидеть» непосредственно (см. рис. 2); он, кроме того, сразу следует из чисто топологических соображений (например, из подсчета фундаментальной группы многообразия Q^3 с использованием двух разных склеек).

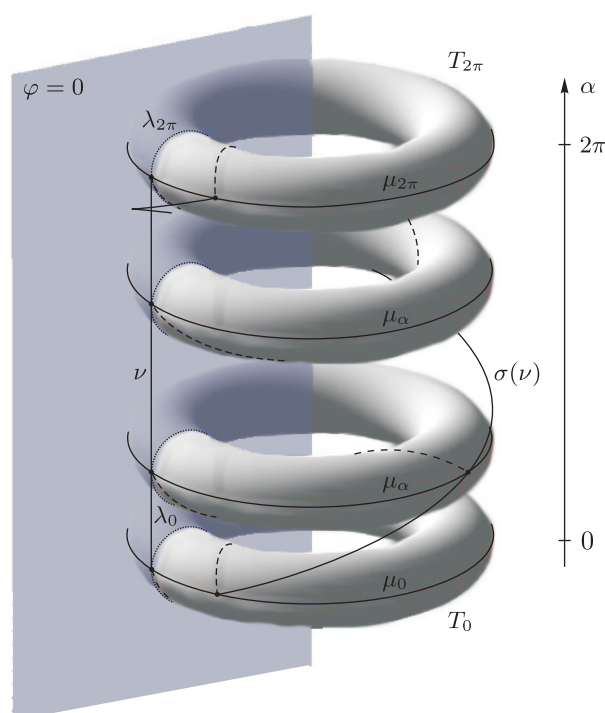


Рис. 2. Многообразие Q^3 с изображенными на нем базисными циклами μ_α , ν и $\sigma(\nu)$.

Основной вывод из проведенного рассуждения таков:

При наличии вращательной симметрии внутри многообразия Q^3 можно выделить глобальное трансверсальное сечение Пуанкаре T_{transv} , представляющее собой двумерный тор. Искомая матрица монодромии при этом будет в точности совпадать с матрицей преобразования базисных циклов, задаваемого соответствующим отображением Пуанкаре (2.2).

Другими словами, монодромию слоения на инвариантные торы можно найти, проанализировав свойства отображения Пуанкаре, заданного на некотором подходящем образом выбранном сечении.

Поскольку в рассматриваемом случае матрица монодромии имеет только одну существенную компоненту $k \in \mathbb{Z}$, то нашу задачу можно решить, «визуализировав» это число k следующим образом. На сечении T_{transv} нужно выделить два базисных цикла. Один из них — это замкнутая траектория поля симметрий, которую мы выше обозначили через μ . Пусть ν — произвольный дополнительный базисный цикл. Применим отображение Пуанкаре к циклам μ и ν . Цикл μ , будучи траекторией поля симметрий, не изменится, а цикл ν перейдет в $\nu + k\mu$, то есть k раз намотается на цикл μ . Число намоток k мы сразу увидим, нарисовав на T_{transv} образ $\sigma(\nu)$ цикла ν при отображении Пуанкаре (2.2).

Именно такой способ вычисления (визуализации) монодромии мы реализуем ниже в задаче о качении эллипсоида вращения. Для ее решения нам нужно лишь правильно выбрать тор T_{transv} , трансверсальный потоку, а затем численно определить действие отображения Пуанкаре на базисные циклы. Этот подход реализован в двух следующих параграфах.

3. Качение осесимметричного эллипсоида по гладкой плоскости

3.1. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим задачу о качении динамически и геометрически осесимметричного эллипсоида по гладкой плоскости в поле тяжести. Выберем подвижную систему координат $Oe_1e_2e_3$, связанную с главными осями инерции эллипсоида, и обозначим через m его массу, а через $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_1, I_3)$ — центральный тензор инерции. Будем считать, что его центр масс совпадает с геометрическим центром, а геометрические оси совпадают с главными осями инерции. Тогда в выбранной системе координат уравнение поверхности эллипсоида примет вид $(\mathbf{r}, \mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}) = 1$, где $\mathbf{V} = \text{diag}(b_1^2, b_1^2, b_3^2)$, а b_1 и b_3 — главные полуоси эллипсоида. Здесь и далее все векторы и тензоры предполагаются заданными в подвижных осях e_1, e_2, e_3 .

Как известно [4], при качении тела по гладкой плоскости в поле тяжести уравнения эволюции момента тела относительно точки контакта \mathbf{M} и вектора нормали к плоскости γ представляются в замкнутой гамильтоновой форме

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad (3.1)$$

где

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{M})^2 - mg(\mathbf{r}, \gamma), \quad (3.2)$$

$\mathbf{a} = \gamma \times \mathbf{r}$, $\mathbf{A} = (\mathbf{I} + m\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})^{-1}$, g — ускорение свободного падения, а вектор \mathbf{r} , направленный из точки контакта в центр масс (см. рис. 3), связан с γ соотношением

$$\mathbf{r} = \frac{-\mathbf{V}\gamma}{\sqrt{(\gamma, \mathbf{V}\gamma)}}. \quad (3.3)$$

При этом эволюция оставшихся двух ортов неподвижной системы координат α и β задается квадратурами

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad \dot{\beta} = \beta \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}.$$

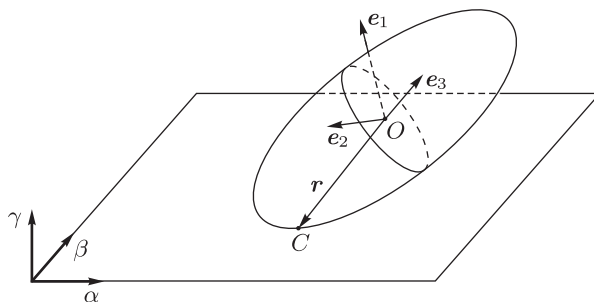


Рис. 3. Эллипсоид на гладкой плоскости.

Скобка Пуассона уравнений (3.1) определяется алгеброй $e(3)$

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk}M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -e_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$$

и обладает двумя функциями Казимира

$$F_1 = (M, \gamma), \quad F_2 = \gamma^2, \quad (3.4)$$

которые являются интегралами уравнений (3.1). Интеграл F_2 представляет собой квадрат вектора нормали и всегда равен единице. Следовательно, можно считать, что система (3.1) определяет поток в пятимерном фазовом пространстве $\mathcal{M}^5 = \{M, \gamma: \gamma^2 = 1\}$.

Как известно, в рассматриваемом случае уравнения (3.1) допускают еще один интеграл движения (интеграл Лагранжа), связанный с осевой симметрией

$$F_3 = M_3, \quad (3.5)$$

и являются интегрируемыми. Таким образом, фазовое пространство \mathcal{M}^5 расслоено (почти всюду) на двумерные инвариантные многообразия, которые параметризуются значениями интегралов $H = h$, $F_1 = p_\psi$, $F_3 = p_\varphi$. Здесь и далее H , F_1 и F_3 рассматриваются как функции фазовых переменных (M, γ) , а h , p_φ и p_ψ — постоянные значения этих функций, сохраняющиеся во время движения вдоль конкретной фазовой траектории. Отметим, что величины p_φ и p_ψ имеют простой динамический смысл: это импульсы, канонически сопряженные углам Эйлера φ и ψ . Сами углы Эйлера φ , ψ , θ при этом связаны с ортами неподвижной системы координат α , β , γ стандартным образом [4].

3.2. Бифуркационный анализ

Двумерные (при фиксированных значениях $F_1 = p_\psi$) бифуркационные диаграммы для эллипсоида вращения со смещенным вдоль оси симметрии центром масс были построены М. Ю. Ивочкиным в работе [8]. Поскольку в рассматриваемом случае (без смещения центра масс) бифуркационный анализ провести несложно, то ниже мы его полностью приведем в более удобной для наших целей трехмерной форме. Кроме того, этот анализ важен для проведения аналогии со случаем, который будет исследован в разделе 4.

Рассмотрим «трехмерное» интегральное отображение $\Phi = (p_\varphi, p_\psi, h): \mathcal{M}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и соответствующую трехмерную бифуркационную диаграмму Σ , которая является образом критического множества интегрального отображения

$$S = \{x: \text{rank } d\Phi(x) < 3\}$$

и состоит из двух подмножеств $S_2 = \{x: \text{rank } d\Phi(x) = 2\}$ и $S_1 = \{x: \text{rank } d\Phi(x) = 1\}$. Множество S_2 представляет собой двухпараметрическое семейство замкнутых кривых в \mathcal{M}^5 , которые (в типичном случае) являются периодическими решениями системы (3.1). Образ этого множества в пространстве первых интегралов представляет собой бифуркационную поверхность. Множество S_1 состоит из двух однопараметрических семейств положений равновесия в \mathcal{M}^5 , а соответствующий образ в пространстве первых интегралов представляет собой две кривые. Приведем далее основные результаты, связанные с построением трехмерной бифуркационной диаграммы.

Предложение 1. *Для случая качения динамически симметричного эллипсоида вращения по гладкой плоскости бифуркационная диаграмма в пространстве первых интегралов (p_φ, p_ψ, h) состоит из*

1. *поверхности регулярных прецессий, задаваемой уравнением*

$$h = \frac{(p_\psi - p_\varphi \gamma_3)^2}{2I_1(1 - \gamma_3^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2I_3} + mg\sqrt{b_1^2 - (b_1^2 - b_3^2)\gamma_3^2}, \quad (3.6)$$

где γ_3 является решением уравнения

$$\frac{(p_\psi - p_\varphi \gamma_3)(p_\psi \gamma_3 - p_\varphi)}{I_1(1 - \gamma_3^2)^2} + \frac{mg(b_3^2 - b_1^2)}{\sqrt{b_1^2 - (b_1^2 - b_3^2)\gamma_3^2}} \gamma_3 = 0,$$

2. двух семейств (относительных) положений равновесия, определяемых кривыми

$$h = mgb_3 + \frac{p_\varphi^2}{2I_3}, \quad p_\psi = \pm p_\varphi. \quad (3.7)$$

Доказательство. Выберем в качестве локальных координат на \mathcal{M}^5 переменные $\mathbf{x} = (\gamma_3, \dot{\gamma}_3, \varphi, p_\varphi, p_\psi)$, где φ — угол собственного вращения, $p_\varphi = M_3$ и $p_\psi = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ — канонически сопряженные углам собственного вращения и прецессии импульсы (которые в данном случае являются интегралами движения), γ_3 — проекция нормали к плоскости на ось симметрии тела, связанная с углом нутации соотношением $\gamma_3 = \cos \theta$. Выбранные координаты определены всюду на \mathcal{M}^5 кроме точек, в которых выполняется равенство $\gamma_3 = \pm 1$ и которые мы рассмотрим отдельно.

Рассмотрим сначала случай падения ранга отображения Φ на единицу (критическое множество S_2). Для этого запишем в выбранных переменных соответствующий якобиан

$$\frac{\partial(H, F_1, F_3)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \gamma_3} & \frac{\partial H}{\partial \dot{\gamma}_3} & \frac{\partial H}{\partial \varphi} & \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} & \frac{\partial H}{\partial p_\psi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{m(b_1^2 - b_3^2)\gamma_3^2}{b_1^2 - (b_1^2 - b_3^2)\gamma_3^2} + \frac{I_1}{1 - \gamma_3^2} \right) \dot{\gamma}_3^2 + \frac{(p_\psi - p_\varphi \gamma_3)^2}{2I_1(1 - \gamma_3^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2I_3} + mg\sqrt{b_1^2 - (b_1^2 - b_3^2)\gamma_3^2}. \quad (3.9)$$

Поскольку $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$, то при $\gamma_3 \neq \pm 1$ условие падения ранга можно представить в виде двух алгебраических уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{\gamma}_3} = 0, \quad (3.10)$$

которые задают в \mathcal{M}^5 двухпараметрическое (с параметрами p_φ, p_ψ) семейство замкнутых кривых, образующих S_2 . Данные кривые являются периодическими решениями системы (3.1) и называются регулярными прецессиями (так как соответствуют вращениям тела с постоянным углом наклона оси вращения относительно вертикали). Подставив решение уравнений (3.10) в гамильтониан (3.9), получим в пространстве первых интегралов бифуркационную поверхность регулярных прецессий (3.6).

Рассмотрим теперь окрестность точки $\gamma_3 = \pm 1$. В качестве локальных координат вблизи $\gamma_3 = \pm 1$ выберем переменные $\mathbf{y} = (\gamma_1, \gamma_2, M_1, M_2, M_3)$. Якобиан (3.8) в этих координатах примет вид

$$\frac{\partial(H, F_1, F_3)}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\gamma_3=\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \gamma_1} \Big|_{\gamma_3=\pm 1} & \frac{\partial H}{\partial \gamma_2} \Big|_{\gamma_3=\pm 1} & I_1^{-1} M_1 & I_1^{-1} M_2 & I_1^{-1} M_3 \\ M_1 & M_2 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Нетрудно заметить, что падение ранга матрицы (3.11) (причем сразу на две единицы) происходит при $M_1 = M_2 = 0$. Соответствующее критическое множество представляет собой однопараметрическое семейство относительных положений равновесия системы (3.1) и может быть записано в виде $S_1 = \{M = (0, 0, p_\varphi), \gamma = (0, 0, \pm 1) : p_\varphi = (-\infty, +\infty)\}$. Физически данные положения равновесия являются вертикальными вращениями эллипсоида вокруг своей оси симметрии. Образ данного множества в пространстве первых интегралов представляет собой две бифуркационные кривые (3.7). ■

На рисунке 4 приведена трехмерная бифуркационная диаграмма рассматриваемой системы при следующих параметрах: $I_1 = 1$, $I_3 = 1.5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $m = 1$, $g = 1$. Визуально диаграмма состоит из «ведра» с висящими над его дном пересекающимися «нитеями», которые соответствуют фокусным особенностям. При некотором критическом значении энергии h эти «нити» выходят на границу «ведра» и становятся особенностями типа центр-центр через хорошо известную бифуркацию Хопфа. С точки зрения динамики данное явление хорошо известно как гиросtabilизация волчка на высоких скоростях вращения. При сечении трехмерной диаграммы плоскостью $p_\psi = \text{const}$ (либо любой другой вертикальной плоскостью) можно получить двумерные бифуркационные диаграммы. Если выбранная плоскость сечения не параллельна плоскостям $p_\psi = \pm p_\varphi$ и не проходит через начало координат, то соответствующая двумерная бифуркационная диаграмма будет содержать две фокусные особые точки (см. рис. 4).

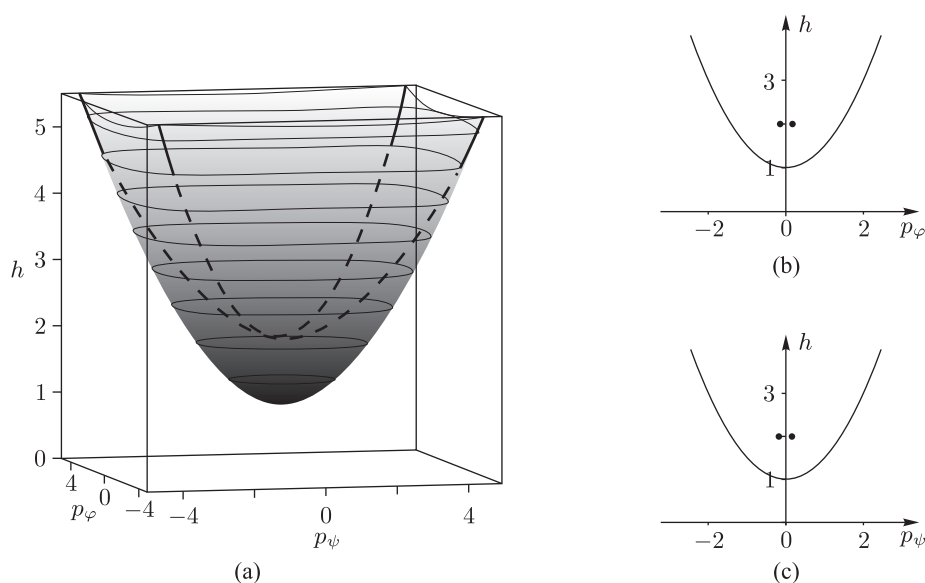


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма в задаче о качении осесимметричного эллипсоида по гладкой плоскости при $I_1 = 1$, $I_3 = 1.5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $m = 1$, $g = 1$:

- (a) трехмерная бифуркационная диаграмма в пространстве (p_φ, p_ψ, h) ,
 (b) сечение бифуркационной диаграммы плоскостью $p_\psi = 0.157$,
 (c) сечение бифуркационной диаграммы плоскостью $p_\varphi = 0.157$.

3.3. Анализ монодромии

Для анализа монодромии с помощью подхода, изложенного в разделе 2.1, необходимо выбрать путь обхода вокруг особых точек системы в пространстве первых интегралов (p_φ, p_ψ, h) . Если для обхода одной особенности это можно сделать единственным образом, то

для двух особенностей существует два принципиально различных варианта их обхода. Первый представляет собой обход вокруг особенностей при фиксированном значении интеграла p_ψ (или ему топологически эквивалентный обход). Второй — при фиксированном значении интеграла p_φ (или ему топологически эквивалентный обход). На рисунке 5 представлены оба варианта обхода в пространстве (p_φ, p_ψ, h) . Для непосредственного численного анализа в качестве кривых, обходящих особые точки, выберем окружности, лежащие в плоскостях $p_\psi = \text{const}$ и $p_\varphi = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \gamma_\psi &= \{(p_\varphi, p_\psi, h) : p_\varphi = p_\varphi^0 + r_0 \sin \alpha, p_\psi = p_\psi^0, h = h^0 + r_0 \cos \alpha, \alpha \in [0, 2\pi)\}, \\ \gamma_\varphi &= \{(p_\varphi, p_\psi, h) : p_\varphi = p_\varphi^0, p_\psi = p_\psi^0 + r_0 \sin \alpha, h = h^0 + r_0 \cos \alpha, \alpha \in [0, 2\pi)\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Параметры p_φ^0 , p_ψ^0 , h^0 и r_0 задают плоскость, центр окружности и ее радиус и фиксируют в фазовом пространстве трехмерное многообразие Q_3 (см. разд. 2.1), являющееся прообразом кривой γ_ψ (либо γ_φ) при интегральном отображении. Переменная α является угловой координатой на кривой γ_ψ (либо γ_φ) и параметризует семейство инвариантных торов, составляющих Q_3 . При этом на каждом из инвариантных торов в качестве координат удобно выбрать углы Эйлера φ и θ , которые, хотя и не являются классическими угловыми координатами на торе, удобны для проведения вычислений. Схематичное изображение многообразия приведено на рисунке 2.

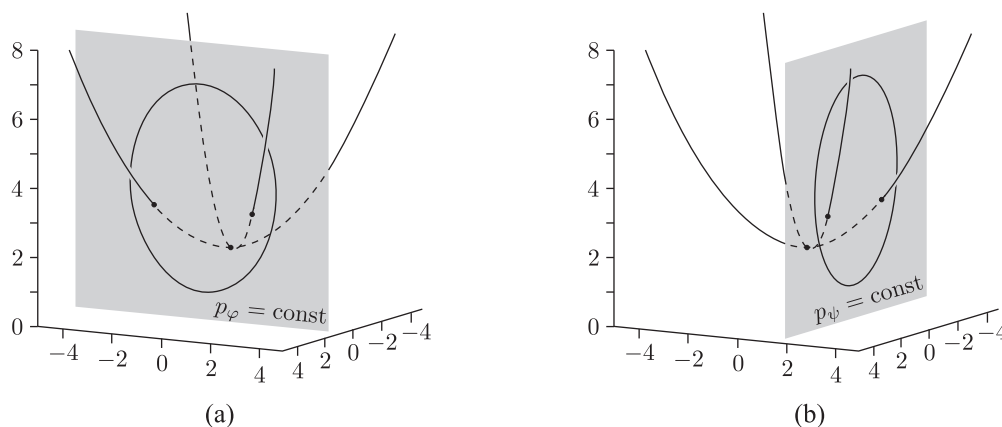


Рис. 5. Два варианта обхода фокусных особенностей в пространстве (p_φ, p_ψ, h) .

На инвариантном торе, соответствующем некоторому значению α в качестве базисного цикла μ_α (инвариантного относительно поля симметрии системы), выберем цикл, задаваемый соотношением $\dot{\theta} = \text{const} \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве цикла μ_α можно выбрать сечение соответствующего инвариантного тора плоскостью $\dot{\theta} = 0$. Это удобнее с точки зрения глобальности такого сечения: все траектории системы либо пересекают эту плоскость, либо лежат в ней. Однако выбранные координаты α , φ , θ плохо определены в некоторых точках на этой плоскости, что затрудняет интерпретацию полученных результатов.

Семейство циклов μ_α , $\alpha \in [0, 2\pi)$ образует тор:

$$T_{\text{transv}} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{M}^5, \Phi(\mathbf{x}) \in \gamma_\psi, \dot{\theta} = \text{const}\}.$$

Как было сказано выше, фазовый поток системы трансверсален этому тору и задает на нем отображение Пуанкаре (2.2). При этом в качестве угловых координат на торе T_{transv} можно

выбрать углы α и φ . Базисный цикл μ_α в этих координатах представляет собой вертикальную прямую $\alpha = \text{const}$ и, очевидно, инвариантен относительно отображения Пуанкаре, так как величина α является интегралом движения рассматриваемой системы. Таким образом, первым базисным циклом на торе T_{transv} можно выбрать цикл $\alpha = \text{const}$.

Зададим теперь второй базисный цикл ν на торе T_{transv} с помощью соотношения $\varphi = 0$. Таким образом, вопрос об исследовании монодромии свелся к анализу итераций цикла $\nu = \{\varphi = 0\}$ при отображении Пуанкаре (2.2) на торе $T_{\text{transv}} = \{(\alpha, \varphi)\}$. Нетривиальной монодромии с коэффициентом k (см. разд. 2.1) соответствует случай, когда образ $\sigma(\nu)$ базисного цикла ν представляет собой кривую, делающую k оборотов в направлении φ при изменении α от нуля до 2π .

Для более наглядного представления покажем, как изменяется цикл ν в фазовом пространстве при последовательном применении отображения Пуанкаре. На рисунках 6а и 6б приведены первая и вторая итерации цикла в пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, M_3)$. Как видно из рисунков, каждая итерация отображения Пуанкаре добавляет образу базового цикла один оборот вокруг вертикальной оси (что соответствует одному обороту по φ).

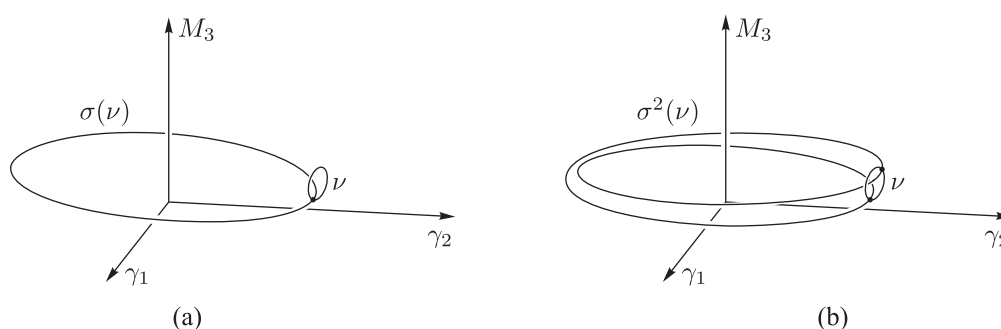


Рис. 6. Проекция образов $\sigma(\nu)$ и $\sigma^2(\nu)$ в пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, M_3)$.

Рассмотрим теперь результаты численного построения отображения Пуанкаре (2.2) для системы (3.1). На рисунке 7а приведена развертка тора T_{transv} в координатах α и φ . На данной развертке базовый цикл ν представляет собой прямую $\varphi = 0$. Кривые, изображенные на развертке, представляют собой образы этого базисного цикла при действии отображения Пуанкаре (2.2) в случаях обхода особенностей системы по трем различным кривым $\gamma_\psi^{(1)}$, $\gamma_\psi^{(2)}$, $\gamma_\psi^{(12)}$, лежащим в плоскости $p_\psi = \text{const}$ и изображенным на рисунке 7б. Кривые $\gamma_\psi^{(1)}$ и $\gamma_\psi^{(2)}$ соответствуют обходу каждой из особенностей по отдельности, а $\gamma_\psi^{(12)}$ — одновременному обходу обеих особенностей. Те же образы базисных циклов в пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, M_3)$ приведены на рисунке 7с (для кривых $\gamma_\psi^{(1)}$ и $\gamma_\psi^{(2)}$) и на рисунке 7д (для кривой $\gamma_\psi^{(12)}$). Как видно из рисунка, при обходе каждого из фокусов монодромия нетривиальна ($k = -1$), а при обходе обоих одновременно она удваивается.

На рисунке 8 приведены аналогичные результаты вычислений для кривых $\gamma_\varphi^{(1)}$, $\gamma_\varphi^{(2)}$ и $\gamma_\varphi^{(12)}$, лежащих в плоскости $p_\varphi = \text{const}$. Как видно из рисунка, кривой $\gamma_\varphi^{(1)}$ соответствует отрицательная монодромия $k = -1$, кривой $\gamma_\varphi^{(2)}$ — положительная монодромия $k = +1$, а для кривой $\gamma_\varphi^{(12)}$ монодромия тривиальна.

Рассмотренные здесь случаи отвечают обходу двух фокусных особенностей при малых, но ненулевых значениях интегралов p_φ и p_ψ . Если их значения положить равными нулю, то пары фокусных точек, показанные на рисунках 7б и 8б, сольются в одну точку. В фазовом

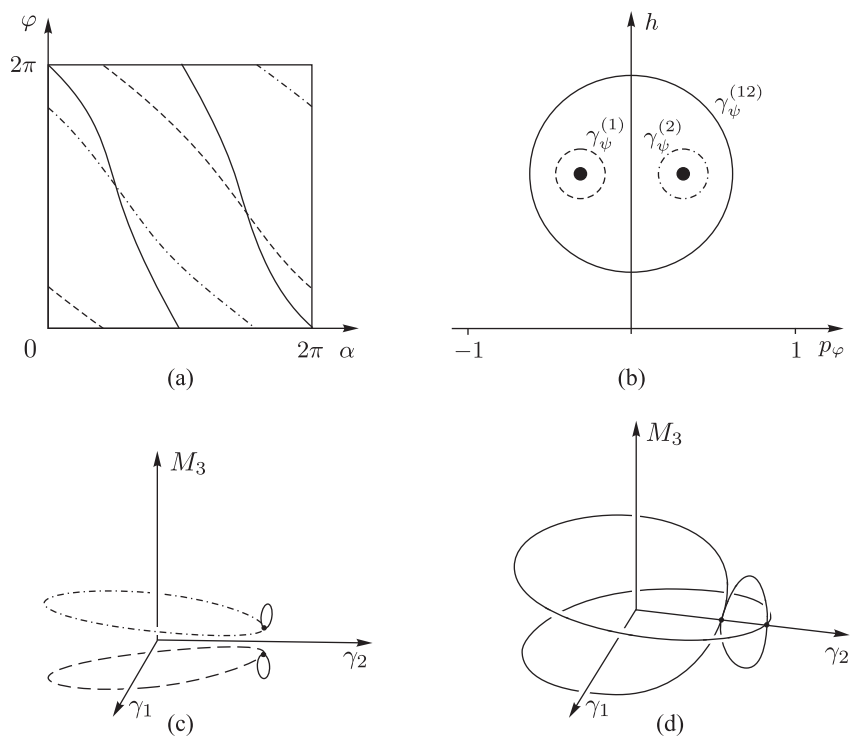


Рис. 7. Образы $\sigma(\nu)$ базисного цикла $\nu = \{\varphi = 0\}$ при отображении Пуанкаре: (а) на развертке тора T_{transv} , (с, d) в пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, M_3)$; (b) соответствующие кривые обхода особенностей в плоскости $p_\psi = 0.157$.

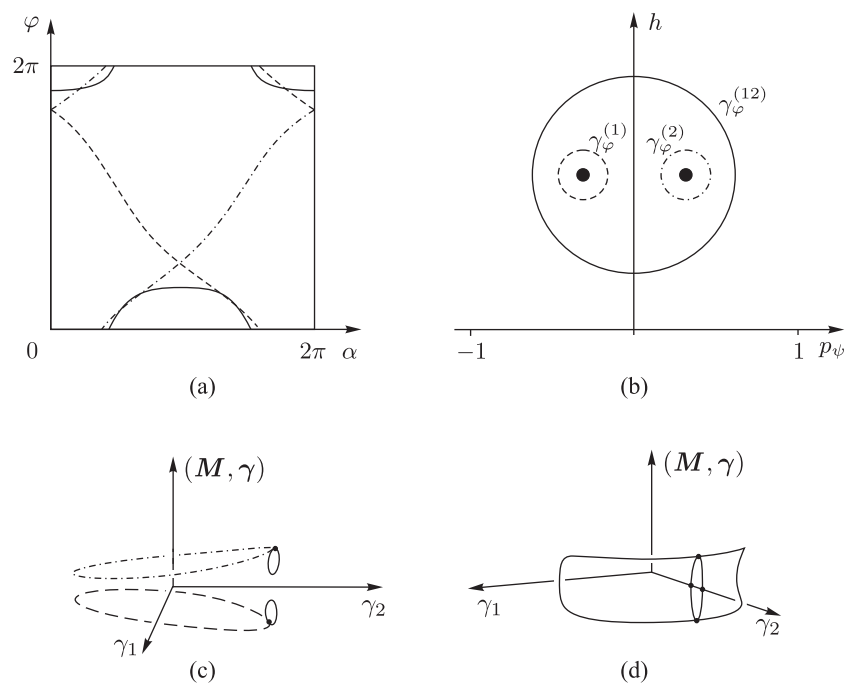


Рис. 8. Образы $\sigma(\nu)$ базисного цикла $\nu = \{\varphi = 0\}$ при отображении Пуанкаре: (а) на развертке тора T_{transv} , (с, d) при в пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, (M, \gamma))$; (b) соответствующие кривые обхода особенностей в плоскости $p_\varphi = 0.157$.

пространстве M^5 это будет соответствовать тому, что фокусные точки окажутся на одном и том же особом уровне интегрального отображения, то есть этим уровнем станет тор с двумя перетяжками. На трехмерной бифуркационной диаграмме этому событию отвечает точка пересечения двух висящих нитей. С точки зрения монодромии, разумеется, никаких изменений не произойдет, поскольку окружности $\gamma_\psi^{(12)}$ и $\gamma_\varphi^{(12)}$, вдоль которых происходит обход, никаким бифуркациям подвергаться не будут (см. рис. 9)

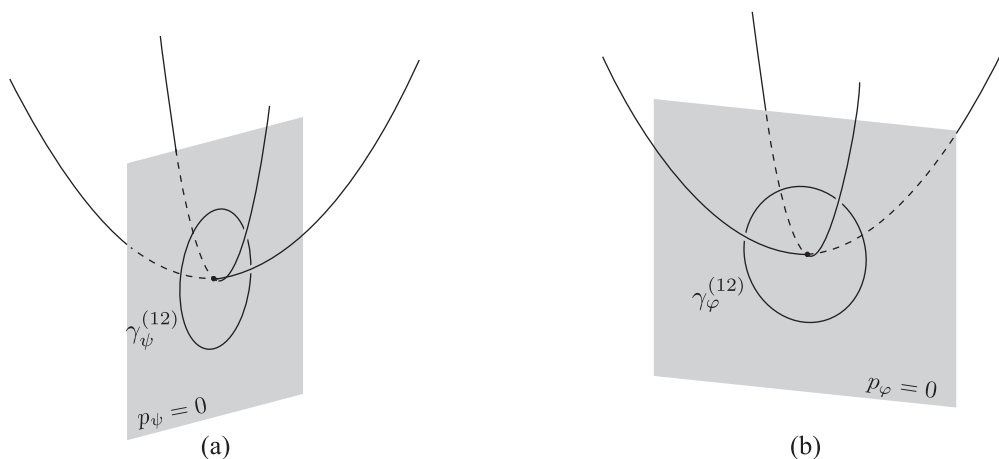


Рис. 9. Два способа обхода вокруг двойной фокусной точки.

Другими словами, при обходе тора с двумя перетяжками в плоскости $p_\psi = 0$ мы получим матрицу монодромии вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть такую, какой она и должна быть в гамильтоновом случае, а при аналогичном обходе того же самого слоя в плоскости $p_\varphi = 0$ матрица монодромии оказывается тривиальной, то есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, чего в гамильтоновом случае быть не должно (см. дискуссию выше в разд. 2). Никакого притворения здесь, разумеется, нет. Утверждение о том, что в гамильтоновом случае матрица монодромии должна иметь вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ относится к гамильтоновым системам, заданным на четырехмерных симплектических многообразиях, то есть обход вокруг особого слоя должен осуществляться на симплектическом уровне. В рассматриваемом нами случае таким уровнем, то есть симплектическим слоем пуассоновой структуры, будет уровень $p_\psi = 0$. Уровень p_φ никакой симплектической структуры не несет, и поэтому по отношению к нему ни о какой гамильтоновой монодромии говорить не приходится.

4. Качение осесимметричного эллипсоида по абсолютно шероховатой плоскости

4.1. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим теперь задачу о качении осесимметричного эллипсоида по плоскости без проскальзывания в тех же предположениях о его форме и распределении масс, что и в раз-

деле 3. Уравнения движения, первые интегралы и обсуждение различных вопросов динамики качения эллипсоида (и произвольного тела) по плоскости имеются в работе [20]. Бифуркационный анализ в случае сплюснутого эллипсоида вращения ($b_3 < b_1$) качественно совпадает со случаем качения плоского круглого диска по плоскости [22]. Уравнения движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} - m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где кинетический момент тела относительно точки контакта \mathbf{M} связан с угловой скоростью эллипсоида $\boldsymbol{\omega}$ соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (4.2)$$

а \mathbf{r} и $\boldsymbol{\gamma}$ по-прежнему выражаются друг через друга с помощью (3.3).

В случае произвольного тела уравнения (4.1) допускают интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) \quad (4.3)$$

и геометрический интеграл $\boldsymbol{\gamma}^2 = 1$, и так же, как и в предыдущем случае, задают поток в \mathcal{M}^5 . Кроме того, в рассматриваемом осесимметричном случае уравнения движения допускают инвариантную меру вида

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_3 + m(\mathbf{r}, \mathbf{I}\mathbf{r})}} \quad (4.4)$$

и еще два интеграла движения. В случае произвольного тела вращения эти интегралы линейны по \mathbf{M} , однако выражаются через неалгебраические (для диска, например, — гипергеометрические) функции позиционных переменных $\boldsymbol{\gamma}$. Приведем далее краткий алгоритм получения данных интегралов (более полное изложение см. в [20]).

Введем переменные K_1 и K_2 , инвариантные относительно вращений вокруг оси симметрии

$$\begin{aligned} K_1 &= M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + \frac{b_3^2}{b_1^2} M_3\gamma_3, \\ K_2 &= \frac{\omega_3}{\rho} = \rho \left(\frac{mb_1^2 b_3^2 \gamma_3}{b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)\gamma_3^2} \left(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + \frac{b_3^2}{b_1^2} M_3\gamma_3 \right) + I_1 M_3 \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

а в качестве нового времени выберем γ_3 . Тогда уравнения движения для K_1, K_2 примут вид линейной системы

$$K_1' = \rho I_3 \frac{b_3^2 - b_1^2}{b_1^2} K_2, \quad K_2' = \frac{m\rho b_1^4 (b_3^2 - b_1^2)(1 - \gamma_3^2)}{(b_1^2 + (b_3^2 - b_1^2)\gamma_3^2)^2} K_1. \quad (4.6)$$

Общее решение данной системы можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}(\gamma_3)\mathbf{C}, \quad (4.7)$$

где $\mathbf{K} = (K_1, K_2)$, \mathbf{G} — матрица фундаментальных решений системы (4.6) с начальными условиями $\mathbf{G}(\gamma_3 = 0) = \mathbf{E}$, которая может быть выражена в функциях Гойна (Heun-functions), а $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ — константы интегрирования, являющиеся искомыми первыми

интегралами. Как и выше, заглавными буквами C_1 и C_2 будем обозначать интегралы движения как функции фазовых переменных, а прописными c_1 и c_2 — значения, которые они принимают на конкретных траекториях. В силу теоремы единственности, матрица $\mathbf{G}(\gamma_3)$ обратима при всех значениях γ_3 . Таким образом, первые интегралы движения имеют вид

$$\mathbf{C} = \mathbf{G}^{-1}(\gamma_3)\mathbf{K}$$

и являются линейными по моментам функциями с коэффициентами, являющимися неалгебраическими функциями от γ_3 . Отметим, что интегралы C_1 и C_2 не являются «равноправными». Анализируя выражения (4.5) для определения K_1 и K_2 , а также выбранные начальные условия матрицы фундаментальных решений $\mathbf{G}(\gamma_3 = 0) = \mathbf{E}$, можно сделать вывод о том, что интеграл C_1 является аналогом интеграла площадей в предыдущей задаче, а интеграл C_2 — аналогом интеграла Лагранжа. В дальнейшем мы убедимся в правильности данной аналогии при анализе монодромии рассмотренных систем.

4.2. Бифуркационный анализ

Как и в случае качения эллипсоида по гладкой плоскости, введем локальные координаты $\mathbf{x} = (\gamma_3, \dot{\gamma}_3, \varphi, C_1, C_2)$. С помощью вычисления соответствующего якобиана $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial (\mathbf{M}, \gamma)}$ нетрудно показать, что данные координаты определены всюду на \mathcal{M}^5 кроме точек, в которых выполнено равенство $\gamma_3 = \pm 1$. Используя подход, изложенный в разделе 3.2, нетрудно показать, что критическое множество S_2 задается двумя уравнениями

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{\gamma}_3} = 0, \quad (4.8)$$

где H — интеграл энергии, выраженный в выбранных координатах, имеет вид

$$H = \frac{1}{2I_1(1 - \gamma_3^2)} \left(K_1^2 - \frac{I_3 l^2 K_2^2}{m b_1^2} K_2^2 + \frac{m b_3^2 \gamma_3^2}{I_1 l^2} \left(K_1 - \frac{l^2 K_2}{\rho m b_1 b_3} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} k^2 \dot{\gamma}_3^2 + U(\gamma_3^2), \quad (4.9)$$

$l = \sqrt{b_1^2(1 - \gamma_3^2) + b_3^2 \gamma_3^2}$ — высота центра масс эллипсоида, а K_1 и K_2 выражаются через интегралы C_1 , C_2 и γ_3 с помощью (4.7). Из второго уравнения (4.8) следует, что $\dot{\gamma}_3 = 0$. Таким образом, бифуркационная поверхность в данном случае задается соотношением

$$H = \frac{1}{2I_1(1 - \gamma_3^2)} \left(K_1^2 - \frac{I_3 l^2 K_2^2}{m b_1^2} K_2^2 + \frac{m b_3^2 \gamma_3^2}{I_1 l^2} \left(K_1 - \frac{l^2 K_2}{\rho m b_1 b_3} \right)^2 \right) + U(\gamma_3^2), \quad (4.10)$$

где γ_3 является решением уравнения $\frac{\partial H}{\partial \gamma_3} \Big|_{\dot{\gamma}_3=0} = 0$.

Так же, как при качении эллипсоида по гладкой плоскости, случай $\gamma_3 = \pm 1$ необходимо рассмотреть отдельно. Очевидно, существует два вида траекторий, для которых выполняется равенство $\gamma_3 = \pm 1$. Во-первых, это траектории, трансверсально пересекающие подмногообразие $\{\mathbf{x} : \gamma_3 = \pm 1\}$. Для таких траекторий выполнены соотношения $\dot{\gamma}_3 \Big|_{\gamma_3=\pm 1} = 0$, $\ddot{\gamma}_3 \Big|_{\gamma_3=\pm 1} \neq 0$. В силу непрерывности, при движении вдоль таких траекторий в сколь угодно малой окрестности точки $\gamma_3 = \pm 1$ производная $\dot{\gamma}_3$ становится отличной от нуля. Следовательно, такая траектория не может быть особым периодическим решением, так как для них необходимо выполняется равенство $\dot{\gamma}_3 = 0$.

Вторым типом траекторий, для которых выполняется равенство $\gamma_3 = \pm 1$, являются траектории, полностью лежащие на данном подмногообразии. Для этих траекторий выполнены соотношения $\gamma_3 = \pm 1$, $\dot{\gamma}_3 = 0$, $\ddot{\gamma}_3 = 0$. Явно продифференцировав второе уравнение (4.1) и подставив в него равенства $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, получим

$$\ddot{\gamma}_3 \Big|_{\gamma_3=\pm 1} = -\frac{M_1^2 + M_2^2}{(I_1 + mb_3^2)^2},$$

следовательно, для решений второго типа вектор момента имеет вид $\mathbf{M} = (0, 0, M_3)$ и такие решения являются вертикальными вращениями вокруг оси симметрии. Нетрудно показать, что соответствующая матрица Якоби имеет вид

$$\frac{\partial(H, C_1, C_2)}{\partial(\mathbf{M}, \gamma_1, \gamma_2)} \Big|_{\substack{\gamma_3=\pm 1 \\ \mathbf{M}=(0,0,M_3)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial H}{\partial M_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_1}{\partial M_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_2}{\partial M_3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а ее ранг падает на две единицы. Таким образом, как и в случае гладкого эллипсоида, вертикальные вращения вокруг оси симметрии образуют два однопараметрических семейства особенностей $S_1 = \{\mathbf{M} = (0, 0, M_3), \gamma = (0, 0, \pm 1): M_3 \in (-\infty, \infty)\}$, образ которых в пространстве первых интегралов представляет собой две кривые. Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рисунке 10 и качественно не отличается от диаграммы для случая гладкой плоскости.

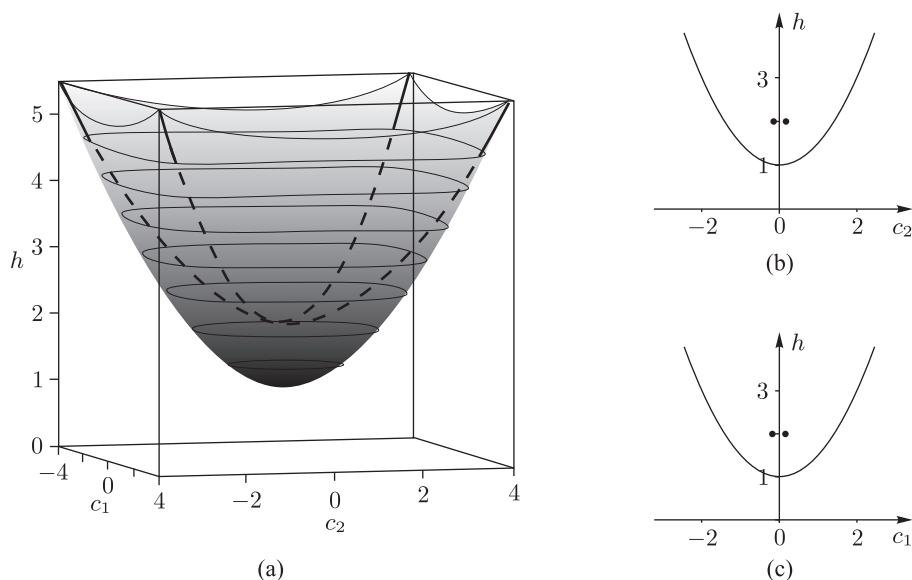


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма в задаче о качении осесимметричного эллипсоида по гладкой плоскости при $I_1 = 1$, $I_3 = 1.5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $m = 1$, $g = 1$:

(а) трехмерная бифуркационная диаграмма в пространстве (c_2, c_1, h) ,

(б) сечение бифуркационной диаграммы плоскостью $c_1 = 0.157$,

(в) сечение бифуркационной диаграммы плоскостью $c_2 = 0.157$.

Для динамически несимметричного эллипсоида (например, однородного) ситуация существенно сложнее. Пока не ясно, существует ли в этом случае даже инвариантная мера. Ее отсутствие для полностью несимметричных тел приводит к существованию странного аттрактора и противоречит гамильтоновости и конформной гамильтоновости [3, 5, 17].

4.3. Анализ монодромии

Для анализа монодромии воспользуемся подходом, изложенным в разделе 3.3. При этом достаточно заменить в рассуждениях p_ψ на c_1 , а p_φ на c_2 . Результаты построения отображения для кривых, лежащих в плоскости $c_1 = \text{const}$, приведены на рисунке 11, а для кривых, лежащих в плоскости $c_2 = \text{const}$, — на рисунке 12. Как видно из рисунков, монодромия для кривых в плоскости $c_1 = \text{const}$ с точностью до знака совпадает со случаем $p_\psi = \text{const}$, а для кривых, лежащих в плоскости $c_2 = \text{const}$, — со случаем $p_\varphi = \text{const}$ для качения эллипсоида по гладкой плоскости. Очевидно, данное несовпадение знака легко исключается соответствующим выбором фундаментальных решений системы (4.6).

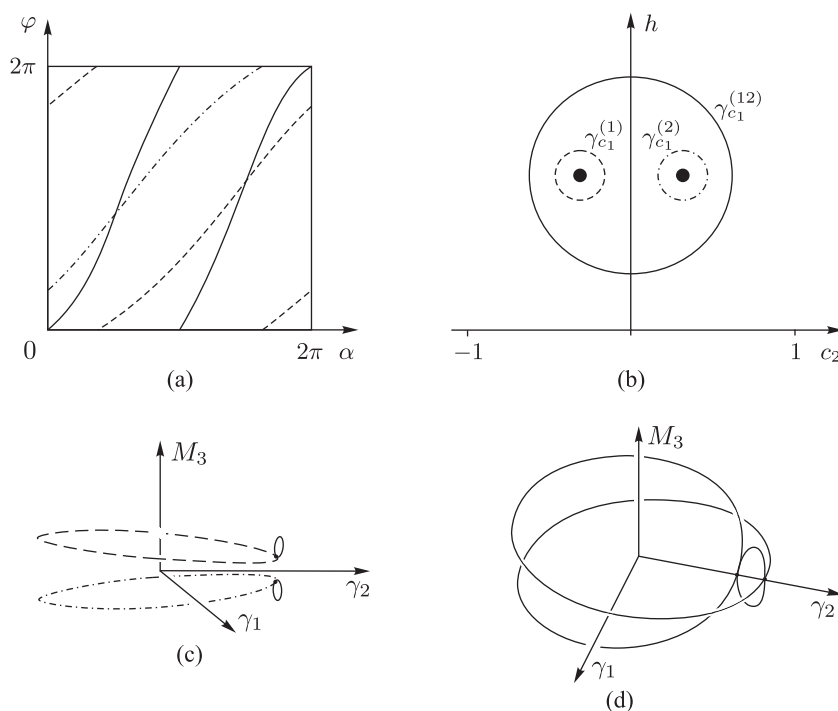


Рис. 11. Образы $\sigma(\nu)$ базисного цикла $\nu = \{\varphi = 0\}$ при отображении Пуанкаре: (а) на развертке тора T_{transv} , (с, d) в пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, M_3)$; (b) соответствующие кривые обхода особенностей в плоскости $p_\varphi = 0.157$.

Несмотря на то, что задача о качении осесимметричного эллипсоида по абсолютно шероховатой плоскости является негамильтоновой, ее монодромия полностью совпадает со случаем гамильтоновой задачи о качении по гладкой плоскости. Таким образом, две рассмотренные выше задачи **топологически ничем друг от друга не отличаются**. Это позволяет сделать предположение о конформной гамильтоновости задачи о качении эллипсоида симметрии по шероховатой плоскости безо всяких особенностей пуассоновой структуры. Отметим, что в настоящее время даже для более простой задачи (сферы Рауса) указанная в [13] пуассонова структура имеет особенность.

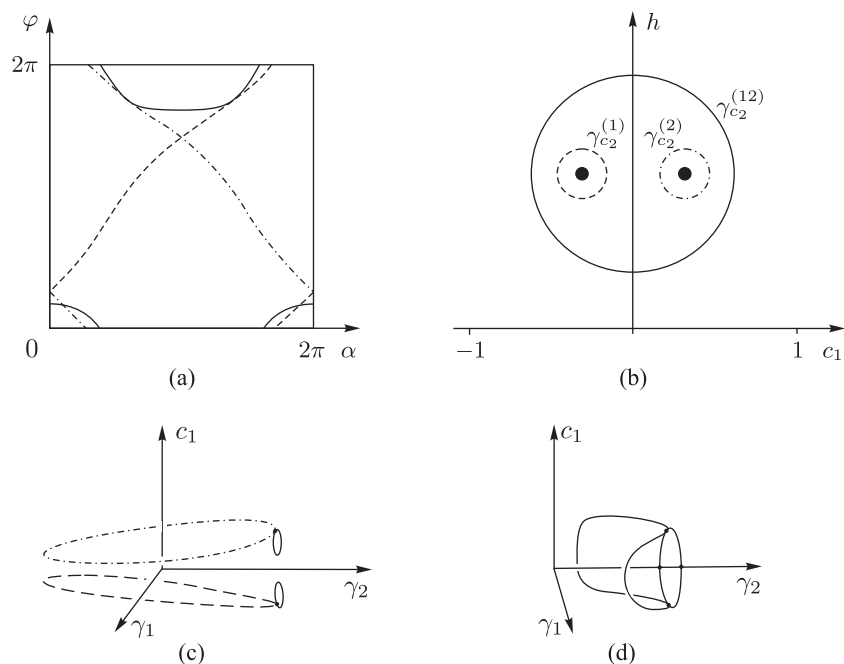


Рис. 12. Образы $\sigma(\nu)$ базисного цикла $\nu = \{\varphi = 0\}$ при отображении Пуанкаре: (а) на развертке тора T_{transv} , (с, d) при отображении Пуанкаре в пространстве $(\gamma_1, \gamma_2, c_1)$; (b) соответствующие кривые обхода особенностей в плоскости $p_\varphi = 0.157$.

5. Результаты проведенного анализа и выводы

Главным результатом является подтверждение нашей контргипотезы: неголономная интегрируемая система, описывающая качение эллипсоида вращения по шероховатой плоскости, по своим топологическим свойствам вполне аналогична гамильтоновой системе, описывающей динамику такого же эллипсоида по «абсолютно гладкой» плоскости. Другими словами, никаких топологических препятствий к гамильтонизации рассматриваемой системы мондромия не дает.

Это заключение, впрочем, отнюдь не означает, что мондромия бесполезна при решении задач гамильтонизации. Напротив, рассмотренный пример демонстрирует ее исключительную эффективность. В самом деле, при решении задачи гамильтонизации мы обычно хотим построить пуассонову (а не симплектическую!) структуру, относительно которой рассматриваемая система оказывается гамильтоновой. Естественным желанием является, чтобы гамильтонианом системы был известный заранее интеграл энергии. С другими интегралами ситуация не вполне понятна. Их каким-то образом требуется «разделить» на функции Казимира и «настоящие» интегралы. Выбор функций Казимира в этом контексте эквивалентен заданию расслоения пространства M^5 на симплектические листы.

Мондромия помогает исключить неправильное «разделение». Именно этот феномен мы можем наблюдать в рассматриваемой задаче. Помимо интеграла энергии она обладает двумя линейными интегралами, которые на первый взгляд никак существенно друг от друга не отличаются. Для гамильтонизации системы один из них естественно «выбрать» в качестве функции Казимира искомой гамильтоновой структуры. Который из двух? Проведенный анализ показывает, что C_2 для этой цели не подходит, поскольку при таком выборе мондромия вокруг особого слоя становится негамильтоновой. Напротив, C_1 вполне подхо-

дит: слоение на симплектические листы с топологической точки зрения будет «похоже» на стандартное, и никаких проблем с монодромией не будет.⁴ Кстати, явная гамильтонизация рассмотренной задачи о качении эллипсоида по шероховатой плоскости до сих пор не выполнена (мы имеем в виду поиск пуассоновой структуры ранга 4; структура ранга 2 для этой задачи после некоторой дополнительной редукции указана в [20]). Попытки найти явное конформно-гамильтоново представление для более простой задачи Рауса (динамически симметричного шара со смещенным центром масс) не позволили избежать сингулярности, что является пока не объясненным феноменом.

Отметим также, что способ вычисления монодромии при помощи отображения Пуанкаре оказался очень эффективным, наглядным и устойчивым. Этот метод можно с успехом применять и в других задачах, даже необязательно интегрируемых, поскольку отображение Пуанкаре можно определить для динамических систем гораздо более общей природы.

Авторы благодарят А. В. Борисова, И. С. Мамаева и Б. Жилинского за полезные обсуждения. А. В. Болсинов считает необходимым отметить исключительную важность разговоров о правильном понимании монодромии с Х. Дуллиным в июне 2009 года, многие высказанные тогда соображения самым непосредственным образом использованы в данной работе.

Список литературы

- [1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854.
- [2] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: УдГУ, 1999. 444 с.; 448 с.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // *УФН*, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [4] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [5] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Новые эффекты в динамике кельтских камней // *Докл. РАН*, 2006, т. 408, № 2, с. 192–195.
- [6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. К одной неголономной динамической проблеме // *Матем. заметки*, 2006, т. 79, № 5, с. 790–796.
- [7] Зобова А. А., Карапетян А. В. Построение бифуркационных диаграмм Пуанкаре–Четаева и Смейла для консервативных неголономных систем с симметрией // *ПММ*, 2005, т. 69, № 2, с. 202–214.
- [8] Ивочкин М. Ю. Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости // *Матем. сб.*, 2008, т. 199, № 6, с. 85–104.
- [9] Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий \mathbb{R}^2 в расширенных окрестностях простых особых точек: 1 // *Матем. сб.*, 1992, т. 183, № 12, с. 141–176.

⁴Неравноправие интегралов может быть обнаружено и другим способом. Уровни первого из них $\{C_1 = \text{const}\}$ диффеоморфны кокасательному расслоению к сфере T^*S^2 , в то время как для другого интеграла C_2 они будут прямыми произведениями $S^2 \times \mathbb{R}^2$ (то есть тривиальными \mathbb{R}^2 -расслоениями над сферой). С симплектической точки зрения, впрочем, никакой проблемы нет: оба являются хорошими симплектическими многообразиями.

- [10] Матвеев В. С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло // Матем. сб., 1996, т. 187, № 4, с. 29–58.
- [11] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314.
- [12] Balseiro P., García-Naranjo L. Gauge transformations, twisted Poisson brackets and Hamiltonization of nonholonomic systems // Arch. Ration. Mech. Anal., 2012, vol. 205, no. 1, pp. 267–310.
- [13] Bizyaev I. A., Tsiganov A. V. On the Routh sphere problem // J. Phys. A, 2013, vol. 46, no. 8, pp. 1–11.
- [14] Bolsinov A. V., Dullin H., Wittek A. Topology of energy surfaces and existence of transversal Poincaré sections // J. Phys. A, 1996, vol. 29, no. 16, pp. 4977–4985.
- [15] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.
- [16] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Singularities of integrable Hamiltonian systems // Topological methods in the theory of integrable systems / A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov (eds.). Cambridge: Camb. Sci. Publ., 2006, pp. 1–67.
- [17] Borisov A. V., Jalnina A. Yu., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Sedova J. V. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 512–532.
- [18] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116.
- [19] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Generalized Chaplygin’s transformation and explicit integration of a system with a spherical support // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 170–190.
- [20] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a rigid body on plane and sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [21] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [22] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Dynamics of rolling disk // Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 2, pp. 201–212.
- [23] Cushman R. Routh’s sphere // Rep. Math. Phys., 1998, vol. 42, nos. 1–2, pp. 47–70.
- [24] Cushman R., Duistermaat J. J. Non-Hamiltonian monodromy // J. Differential Equations, 2001, vol. 172, no. 1, pp. 42–58.
- [25] Delosa J. B., Dhontb G., Sadovskii D. A., Zhilinskii B. I. Dynamical manifestations of Hamiltonian monodromy // Ann. Physics, 2009, vol. 324, no. 9, pp. 1953–1982.
- [26] Duistermaat J. J. On global action-angle coordinates // Comm. Pure Appl. Math., 1980, vol. 33, no. 6, pp. 687–706.
- [27] Fernandez O., Mestdag T., Bloch A. A generalization of Chaplygin’s reducibility theorem // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 6, pp. 635–655.
- [28] Kozlov V. V. On invariant manifolds of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 131–141.
- [29] Nguyen T. Z. A note on focus-focus singularities // Differential Geom. Appl., 1997, vol. 7, no. 2, pp. 123–130.
- [30] Tsiganov A. V. One invariant measure and different Poisson brackets for two non-holonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 1, pp. 72–96.
- [31] Tsiganov A. V. On the Poisson structures for the nonholonomic Chaplygin and Veselova problems // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 5, pp. 439–450.

- [32] Zhilinskii B. I. Hamiltonian monodromy, its manifestations and generalizations // RIMS Workshop «Geometric mechanics» (Kyoto, Dec 2009). (RIMS Kokyuroku, vol. 1692.) Kyoto: Kyoto Univ., 2010. P. 57–77.

Topological monodromy in nonholonomic systems

Alexey V. Bolsinov¹, Alexander A. Kilin², Alexey O. Kazakov³

¹School of Mathematics, Loughborough University
United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire

^{1,2,3}Institute of Computer Science;
Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles
Udmurt State University
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

¹A.Bolsinov@lboro.ac.uk, ²aka@rcd.ru, ³Kazakovdz@yandex.ru

The phenomenon of a topological monodromy in integrable Hamiltonian and nonholonomic systems is discussed. An efficient method for computing and visualizing the monodromy is developed. The comparative analysis of the topological monodromy is given for the rolling ellipsoid of revolution problem in two cases, namely, on a smooth and on a rough plane. The first of these systems is Hamiltonian, the second is nonholonomic. We show that, from the viewpoint of monodromy, there is no difference between the two systems, and thus disprove the conjecture by Cushman and Duistermaat stating that the topological monodromy gives a topological obstruction for Hamiltonization of the rolling ellipsoid of revolution on a rough plane.

MSC 2010: 37J05, 34C14

Keywords: topological monodromy, integrable systems, nonholonomic systems, Poincaré map, bifurcation analysis, focus-focus singularities

Received March 28, 2013, accepted May 13, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 203–227 (Russian)