С. Я. Новиков, О точности неравенств для независимых случайных величин в пространствах Лоренца, *Изв. вузов. Матем.*, 1992, номер 4, 36–38

УДК 519.218

С.Я.НОВИКОВ

О ТОЧНОСТИ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Для $0<p<\infty$, $0<q<\infty$ и $I=[0,1]$ или $[0,\infty)$ функциональное пространство Лоренца $L_{p,q}(I)$ определяется как пространство всех измеримых функций (точнее, классов эквивалентности) f на I, для которых $\|f\|_{p,q}<\infty$, где

$$\|f\|_{p,q} = \left(\int_I (f^*(t))^q d(t^{q/p})\right)^{1/q},$$

здесь f^* – неубывающая перестановка функции $|f|$. Соответствующие пространства числовых последовательностей – это пространства $l_{p,q}$ всех последовательностей (a_i), для которых $\|(a_i)\|_{p,q}<\infty$, где

$$\|(a_i)\|_{p,q} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{*q}(i^{q/p}-(i-1)^{q/p})\right)^{1/q}.$$

Очевидно, при $p=q$ функциональное пространство Лоренца – это классическое пространство L_p, а пространство последовательностей – это пространство l_p.

В работе [1] доказаны следующие важные неравенства: для $1<p<2$, $1\leq q<\infty$ существует константа $C=C(p,q)>0$ такая, что для любых нормированных одинаково распределенных функций (f_i), которые образуют K-безусловную последовательность в $L_{p,q}$, имеем

$$C^{-1}K^{-1}\|(a_i)\|_2 \leq \left\|\sum a_i f_i\right\|_{p,q} \leq CK\|(a_i)\|_p \quad (p<q), \tag{1}$$

$$C^{-1}K^{-1}\|(a_i)\|_2 \leq \left\|\sum a_i f_i\right\|_{p,q} \leq CK\|(a_i)\|_{p,q} \quad (q\leq p) \tag{2}$$

для любых скаляров (a_i). (Напомним, что K-безусловной последовательностью в банаховом пространстве называется последовательность (x_i) такая, что для любого набора скаляров и любого набора знаков $\varepsilon_i=\pm1$ справедливо неравенство $\|\sum\varepsilon_i a_i x_i\|\leq K\|\sum a_i x_i\|$. Примерами таких последовательностей в функциональных пространствах являются дизъюнктные функции и центрированные независимые случайные величины.)

Точность неравенств (1) и (2) обосновалась в [1] следующим образом. Классическое неравенство Хинчина является обоснованием точности левых неравенств в (1) и (2). Точность правых оценок была обоснована построением специальных последовательностей *дизъюнктных* функций. Однако такое обоснование оставляло открытым такой вопрос: можно ли улучшить правые оценки в (1) или (2) для *независимых* одинаково распределенных центрированных случайных величин (с.в.)? Мы дадим отрицательный ответ на этот вопрос.

Пусть $1<p<\infty$, $1\leq q<\infty$. $A(p,q)=\{a=(a_i):\sum a_i f_i$ сходится в $L_{p,q}$ для любой последовательности независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин, $f_1\in L_{p,q}\}$ = $\{a=(a_i)\in\mathbb{R}^\infty: \sum a_i f_i$ сходится в $L_{p,q}$ для любой последовательности независимых симметричных случайных величин, $f_1\in L_{p,q}\}$. Заметим, что из (1) следует включение $l_p\subset A(p,q)$, $1<p<2$, $p<q<\infty$, а из (2) – включение $l_{p,q}\subset A(p,q)$, $1<p<2$, $1\leq q\leq p$. Отметим также, что обоснование равенства в определении классов $A(p,q)$ можно найти в работе [2].

ТЕОРЕМА 1. *Для* $1<p<\infty$, $1\leq q<\infty$ *имеет место включение* $A(p,q)\subset l_{p,q}$; *следовательно,* $A(p,q)=l_{p,q}$ *для* $1<p<2$, $1\leq q\leq p$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $a\in A(p,q)$, $1<p<\infty$, $1\leq q<\infty$,

$$L^0_{p,q} = \left\{f\in L_{p,q}:\int_I f=0\right\}.$$

Существует $C>0$ *такое, что* $\|\sum a_i f_i\|\le C\|f\|$ *для любой* $f\in L^0_{p,q}$, *где* (f_i) *– независимые копии* f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $L^0_{p,q}$ будет полным относительно новой нормы

$$\|f\|_{(1)}:=\|\sum_{i=1}^{\infty}a_i f_i\|_{p,q},$$

(f_i) – независимые копии f.

СЛЕДСТВИЕ. *Для любой последовательности* $a\in A(p,q)$ *существует константа* $C=C(a)>0$, *что для любой последовательности* (f_i) *симметричных независимых одинаково распределенных с.в. выполняется неравенство*

$$\|\sup_i|a_i f_i|\|_{p,q}\le C\|f_1\|_{p,q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По неравенству Леви

$$\mathbb{P}(\sup_i|a_i f_i|>t)\le 2\mathbb{P}(|\sum a_i f_i|>t),\ t\ge 0.$$

Остается применить лемму.

Следующая лемма доказана в [3]. Для полноты изложения приводим ее доказательство.

ЛЕММА 2. *Пусть* (g_i) *– неотрицательные независимые с.в. на вероятностном пространстве* $(\Omega,\mathbb{P})$ *без атомов, причем*

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(g_i>0)\le 1,$$

и пусть $\bar g_i$ *– дизъюнктные измеримые функции на* $(0,1)$, *причем для любого* i $\bar g_i$ *равноизмерима с* g_i, *т.е.*

$$\mu(\bar g_i>t)=\mathbb{P}(g_i>t),\quad t\ge 0.$$

Тогда

$$\mathbb{P}(\max_{1\le i\le n}g_i>t)\ge\frac{1}{2}\mu(\sum_{i=1}^{n}\bar g_i>t),\quad t\ge 0,$$

где μ *обозначает меру Лебега на* $(0,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся независимостью с.в. g_i и неравенством $1-e^{-t}\ge t/(1+t)$, $t\ge 0$. Имеем

$$\mathbb{P}(\max_{1\le i\le n}g_i>t)=1-\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(g_i\le t)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mathbb{P}(g_i>t))\ge$$

$$\ge 1-\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(g_i>t)\right)\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(g_i>t)}{1+\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(g_i>t)}\ge\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu(\bar g_i>t)=\frac{1}{2}\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\bar g_i>t\right).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $a=(a_i)\in A(p,q)$, $a_i\ne 0$ для всех i. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим последовательность $(\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ трехзначных независимых одинаково распределенных с.в. с такими свойствами:

1) $\|\xi_i^{(n)}\|_{p,q}=1$, $i=1,2,\ldots$;

2) $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(|\xi_i|>0)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(|a_i\xi_i|>0)=n\mathbb{P}(|\xi_1|>0)\le 1$.

Заметим, что $|\xi_i^{(n)}|=\gamma_n\mathbb{1}_{C_n}$, где γ_n и C_n подбираются с учетом условий 1) и 2). По лемме 1 существует $C>0$:

$$\|\sup_{1\le i<\infty}|a_i\xi_i^{(n)}|\|_{p,q}\le C,\quad n=1,2,\ldots$$

По лемме 2

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\leq i\leq n}|a_i\xi_i^{(n)}|>t\Big)\geq \frac{1}{2}\mu\Big(\sum_{i=1}^{n}|a_i\xi_i^{(n)}|>t\Big),\ t\geq 0.$$

Следовательно,

$$C\geq\|\sup_{1\leq i<\infty}|a_i\xi_i^{(n)}|\|_{p,q}\geq\|\sup_{1\leq i\leq n}|a_i\xi_i^{(n)}|\|_{p,q}\geq C_1\|\sum_{i=1}^{n}|a_i||\xi_i^{(n)}|\|_{L_{p,q}(0,1)}=C_1\|(a_i)_{i=1}^{n}\|_{p,q},$$

где константы не зависят от n. Последнее равенство проверяется непосредственными вычислениями и хорошо известно. Следовательно, $a\in l_{p,q}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 показывает, что неравенство (2) не может быть улучшено для независимых с.в.

ТЕОРЕМА 2. *Для* $1<p<2$, $1\leq q<\infty$ *имеет место включение* $A(p,q)\subset l_p$; *следовательно,* $A(p,q)=l_p$ *для* $1<p<2$, $p<q$.

Подробное доказательство этой теоремы приведено в предыдущей работе автора [4].

Интересно отметить в связи с теоремой 2, что при $p\neq q<\infty$, $1<p<\infty$, $p\neq 2$ в $L_{p,q}$ нет подпространства, изоморфного l_p (см.[5]).

В заключение отметим одно интересное следствие теоремы 1, касающееся пространств $L_{2,q}$. В работе [1] доказано неравенство

$$C^{-1}\|(a_i)\|_2\|f_1\|_2\leq\|\sum a_if_i\|_{2,q}\leq C\|(a_i)\|_{2,q},\ 0<q<2, \tag{3}$$

справедливое для независимых одинаково распределенных с.в., нормированных в $L_{2,q}$. В связи с этим неравенством там же поставлен вопрос: является ли замкнутая линейная оболочка независимых одинаково распределенных с.в. в $L_{2,q}$ подпространством, изоморфным l_2? Теорема 1 дает отрицательный ответ на этот вопрос для $1\leq q<2$, т.к. из этой теоремы и неравенства (3) вытекает равенство $A(2,q)=l_{2,q}$, $1\leq q<2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carothers N.L., Dilworth S.J. *Equidistributed random variables in* $L_{p,q}$ // J. Fund. Anal. - 1989. - V.84. - №1. - P.146-159.

2. Браверман М.Ш., Новиков И.Я. *Подпространства симметричных пространств, порожденные независимыми случайными величинами* // Сиб. матем. журн. - 1984. - Т.25. - №3. - С.30-39.

3. Johnson W.B., Schechtman G. *Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces* // Ann. Probab. - 1989. - V.17. - №2. - P.789-808.

4. Новиков С.Я. *Классы коэффициентов сходящихся случайных рядов в пространствах* $L_{p,q}$ // Теория операторов в функц. пространствах. - Куйбышев, 1989. - С.180-192.

5. Carothers N.L., Dilworth S.J. *Subspaces of* $L_{p,q}$ // Proc. Amer. Math. Soc. - 1988. - V.104. - №2. - P.537-545.

г.Самара

Поступила
05.11.1990