Д. А. Маслов, Обобщенные цепные дроби, *Дискрет. матем.*, 1998, том 10, выпуск 4, 39–60

DOI: 10.4213/dm447

Дискретная математика

том 10 выпуск 4 * 1998

УДК 517.1

Обобщенные цепные дроби

© 1998 г. Д. А. Маслов

Работа посвящена построению аппарата обобщенных цепных дробей с целью использованию этого аппарата в дальнейшем для решения задач теории чисел.

1. Обобщенной цепной дробью назовем выражение вида

$$a_0 + \cfrac{(-1)^{u_1}}{a_1 + \cfrac{(-1)^{u_2}}{a_2 + \dots}}, \tag{1}$$

в котором $a_i \in \mathbf{R}$, $i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, назовем элементами, а $u_i \in \mathbf{F} = \{0, 1\}$, $i \in \mathbf{N}$, индексами обобщенной цепной дроби. Число элементов может быть либо конечным, либо бесконечным. В первом случае мы будем записывать данную обобщенную цепную дробь в виде

$$a_0 + \cfrac{(-1)^{u_1}}{a_1 + \cfrac{(-1)^{u_2}}{a_2 + \dots + \cfrac{(-1)^{u_n}}{a_n}}} \tag{2}$$

и называть конечной обобщенной цепной дробью длины n.

В [1] полностью рассмотрен частный случай обобщенных цепных дробей — обычные цепные дроби, когда все $u_i = 0$, а все $a_i \in \mathbf{N}$, $i \in \mathbf{N}$. Настоящая работа посвящена подробному описанию общего случая.

Нам понадобится расширить множество вещественных чисел $\mathbf{R}$, добавив новый элемент ∞ и определив четыре правила действий:

$$\forall a \in (\mathbf{R} \cup \{\infty\}) \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{a}{0} = \infty, \qquad \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow \frac{a}{\infty} = 0,$$
$$\forall a \in \mathbf{R} \cup \{\infty\} \Rightarrow \infty + a = a + \infty = \infty, \qquad \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow a < \infty.$$

Отметим, что обобщенная цепная дробь (2) длины n является функцией

$$c_n \colon \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^n \to \mathbf{R} \cup \{\infty\},$$

значение $c_n(a_0, u_1, a_1, u_2, a_2, \dots, u_n, a_n)$ которой вычисляется по формуле (2). Аналогично, обобщенная цепная дробь (1) бесконечной длины является функцией

$$c_\infty \colon \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^\infty \to \mathbf{V},$$

принимающей значения в множестве $\mathbf{V}$ формальных выражений вида (1).

Для удобства будем использовать обозначения

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}[a,b] &= \{x \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \\
\mathbf{Z}[a,b) &= \mathbf{Z}[a,b] \setminus \{b\}, && a,b \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}; \\
\sigma_{i,n} &= (a_i, u_{i+1}, a_{i+1}, u_{i+2}, a_{i+2}, \dots, u_n, a_n) \\
&\in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^{n-i}, && i \in \mathbf{Z}[0,n], \qquad n \in \mathbf{Z}[0,\infty); \\
\sigma_{i,\infty} &= (a_i, u_{i+1}, a_{i+1}, u_{i+2}, a_{i+2}, \dots) \\
&\in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^{\infty}, && i \in \mathbf{Z}[0,\infty); \\
r_{i,n}(\sigma_{0,n}) &= c_{n-i}(\sigma_{i,n}), && i \in \mathbf{Z}[0,n], \qquad n \in \mathbf{Z}[0,\infty].
\end{aligned}$$

Всякая конечная обобщенная цепная дробь $c_n(\sigma_{0,n})$, используя соотношения

$$\begin{aligned}
p_{-1} &= 1, \\
dq_{-1} &= 0, \\
p_n(\sigma_{0,n}) &= a_0 p_{n-1}(\sigma_{1,n}) + (-1)^{u_1} q_{n-1}(\sigma_{1,n}), \\
q_n(\sigma_{0,n}) &= p_{n-1}(\sigma_{1,n}), \qquad n \in \mathbf{Z}[0,\infty),
\end{aligned}$$

может быть представлена (см. [1, 2]) в каноническом виде как отношение двух многочленов

$$c_n(\sigma_{0,n}) = p_n(\sigma_{0,n}) / q_n(\sigma_{0,n})$$

относительно $a_0, (-1)^{u_1}, a_1, (-1)^{u_2}, a_2, \dots, (-1)^{u_n}, a_n$ с целыми коэффициентами.

Каноническое представление $p_k(\sigma_{0,k})/q_k(\sigma_{0,k})$ отрезка $c_k(\sigma_{0,k})$ этой дроби мы будем называть подходящей дробью порядка $k \in \mathbf{Z}[-1, n+1)$ данной обобщенной цепной дроби $c = c_n(\sigma_{0,n})$.

Положим

$$|\bar{t}_k| = \sum_{i=1}^{k} t_i,$$

где $\bar{t}_k = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbf{R}^k$.

Согласно [1] и [2] при $k \in \mathbf{N}$

$$q_k(\sigma_{0,k}) p_{k-1}(\sigma_{0,k-1}) - p_k(\sigma_{0,k}) q_{k-1}(\sigma_{0,k-1}) = (-1)^{k+|\bar{u}_k|}, \tag{3}$$

и при $k \in \mathbf{Z}[1,n]$ и $n \in \mathbf{N}$

$$c_n(\sigma_{0,n}) = \frac{p_{k-1}(\sigma_{0,k-1}) r_{k,n}(\sigma_{0,n}) + (-1)^{u_k} p_{k-2}(\sigma_{0,k-2})}{q_{k-1}(\sigma_{0,k-1}) r_{k,n}(\sigma_{0,n}) + (-1)^{u_k} q_{k-2}(\sigma_{0,k-2})}. \tag{4}$$

В дальнейшем для удобства мы будем иногда в записи функций $c_n(\sigma_{0,n})$, $p_n(\sigma_{0,n})$, $q_n(\sigma_{0,n})$, $r_{k,n}(\sigma_{0,n})$ опускать зависимость от переменных, то есть эти функции записывать соответственно в виде c_n или c, p_n, q_n, $r_{k,n}$ или r_k.

Формула (3) в некотором смысле обратима. А именно, скажем что последовательность $\Pi = (t_k, s_k)_{k \in \mathbf{Z}[-1,\mathfrak{n}+1)}$ пар действительных чисел, где $\mathfrak{n} \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$, является подходящей, если

$$\begin{gathered}
t_{-2} = 0, \quad s_{-2} = 1, \quad t_{-1} = 1, \quad s_{-1} = 0, \quad s_0 = 1; \\
s_k t_{k-1} - t_k s_{k-1} = (-1)^{v_k}, \quad v_k \in \mathbf{F}, \quad k \in \mathbf{Z}[-1, \mathfrak{n}+1).
\end{gathered}$$

Используя математическую индукцию, нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Для любой подходящей последовательности*

$$\Pi = \{(t_k, s_k)\}_{k\in\mathbf{Z}[-1,\mathfrak{n}+1)}$$

существует единственная обобщенная цепная дробь, у которой последовательность числителей и знаменателей канонических представлений подходящих дробей совпадает с последовательностью Π, *то есть существует единственная последовательность*

$$\Sigma = \Sigma(\Pi) = \begin{cases} (x_0, z_1, x_1, \dots) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^\infty, & \text{если } \mathfrak{n} = \infty, \\ (x_0, z_1, x_1, \dots, z_\mathfrak{n}, x_\mathfrak{n}) \in \mathbf{R} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{R})^\mathfrak{n}, & \text{если } \mathfrak{n} \text{ конечно,} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\Pi) = (s_k t_{k-2} - t_k s_{k-2})(-1)^{v_{k-1}} \\ z_k &= z_k(\Pi) = v_k + v_{k-1} + 1 \pmod 2, \quad k \in \mathbf{Z}[0, \mathfrak{n}+1), \end{aligned} \tag{5}$$

такая, что

$$q_k(\Sigma_{0,k}) = s_k, \quad p_k(\Sigma_{0,k}) = t_k, \quad k \in \mathbf{Z}[-1, \mathfrak{n}+1). \tag{6}$$

Положим

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \bar{M}_\mathbf{N} \cup \bar{M}_\infty \supset M = M_\mathbf{N} \cup M_\infty; \\ \bar{M}_\mathbf{N} &= \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n\in\mathbf{Z}[1,\infty)} \bar{M}_n \supset M_\mathbf{N} = \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n\in\mathbf{Z}[1,\infty)} M_n; \\ \bar{M}_n &= \{\sigma_{0,n} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^n \mid a_i \geqslant u_i + 1, i \in \mathbf{Z}[1,n]\} \\ &\supset M_n = \{\sigma_{0,n} \in \bar{M}_n \mid a_1 \geqslant 2\}, \quad n \in \mathbf{Z}[1,\infty); \\ \bar{M}_\infty &= \{\sigma_{0,\infty} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^\infty \mid a_i \geqslant u_i + 1, i \in \mathbf{Z}[1,\infty)\} \\ &\supset M_\infty = \{\sigma_{0,\infty} \in \bar{M}_\infty \mid a_1 \geqslant 2\}; \\ \bar{\Delta} &= \bar{\Delta}_\mathbf{N} \cup \bar{\Delta}_\infty \supset \Delta = \Delta_\mathbf{N} \cup \Delta_\infty; \\ \bar{\Delta}_\mathbf{N} &= \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n\in\mathbf{Z}[1,\infty]} \Delta_n \supset \Delta_\mathbf{N} = \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n\in\mathbf{Z}[1,\infty]} \Delta_n; \\ \bar{\Delta}_n &= \{\sigma_{0,n} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^n \mid a_i \geqslant u_{i+1} + 1, i \in \mathbf{Z}[1,n-1] \\ &\supset \Delta_n = \{\sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}_n \mid a_n \geqslant 2\}, \quad n \in \mathbf{Z}[1,\infty); \\ \bar{\Delta}_\infty &= \{\sigma_{0,\infty} \in \mathbf{Z} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{N})^\infty \mid a_i \geqslant u_{i+1} + 1, i \in \mathbf{Z}[1,\infty)\} = \Delta_\infty; \\ u_0 &= 0, \quad q_{-2} = 1; \text{ если } \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}, \text{ то } u_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Предложение 2. *Для любого* $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, *если* $\sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}$, *то*

$$q_k \geqslant (u_{k+1} + 1) q_{k-1} + (-1)^{u_k} q_{k-2} \geqslant 1, \qquad k \in \mathbf{Z}[1, n+1),$$

если $\sigma_{0,n} \in \Delta_n \subset \bar{\Delta}$, $n \in \mathbf{N}$, *то*

$$q_n \geqslant 2q_{n-1} + (-1)^{u_n} q_{n-2} \geqslant 1,$$

если $\sigma_{0,n} \in \bar{M}$, *то*

$$q_k \geqslant q_{k-1} + \delta \geqslant 1 + k\delta, \quad \delta = \min(a_1 - 1, 1), \quad k \in \mathbf{Z}[1, n+1), \tag{7}$$

если $\sigma_{0,n} \in M$, *то*

$$q_k \geqslant q_{k-1} + 1 \geqslant k + 1, \qquad k \in \mathbf{Z}[1, n+1),$$
$$q_1 \geqslant 2, \quad q_k \geqslant (u_k + 1)q_{k-1} + (-1)^{u_k} q_{k-2}, \quad k \in \mathbf{Z}[2, n+1).$$

Доказательство легко выводится из трех следующих лемм.

Лемма 1. *Если* $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, $\sigma_{0,n} \in \bar{\Delta}$, $k \in \mathbf{Z}[1, n+1)$, *то*

$$q_k \geqslant q_0 = 1 > q_{-1} = 0,$$

и, более того, из соотношений

$$1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n, \quad u_k = u_{k-1} = \ldots = u_i = 1, \quad u_{i-1} = 0$$

следует, что

$$q_k \geqslant q_{k-1} - q_{k-2} \geqslant q_{k-2} - q_{k-3} \geqslant \cdots \geqslant q_{i-1} - q_{i-2} \geqslant q_{i-2} + q_{i-3} \geqslant 1.$$

Лемма 2. *Для любого* $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, *если* $\sigma_{0,n} \in \bar{M}$, *то выполнено* (7) *и, более того, при* $1 \leqslant i \leqslant k < n+1$ *из неравенства* $q_i > q_{i-1}$ *следуют неравенства*

$$q_k > q_{k-1} > \ldots > q_i > q_{i-1},$$

а из равенства $q_i = q_{i-1}$ *следуют равенства*

$$q_j = 1, \quad j \in \mathbf{Z}[0, i]; \quad a_m = 2, \quad u_m = 1, \quad m \in \mathbf{Z}[2, i]; \quad a_1 = 1, \quad u_1 = 0.$$

Лемма 3. *Для любого* $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, *если последовательность* $\{s_k\}_{k \in \mathbf{Z}[-1,n+1)}$ *целых чисел рекуррентно образована по закону:* $s_{-1} = 0$, $s_0 = 1$,

$$s_k = x_k s_{k-1} + (-1)^{z_k} s_{k-2}, \quad x_k \in \mathbf{Z}, \quad z_k \in \mathbf{F}, \quad k \in \mathbf{Z}[1, n+1), \tag{8}$$

то соотношения

$$s_k \geqslant s_{k-1} + 1 \geqslant k + 1, \qquad k \in \mathbf{Z}[1, n+1), \tag{9}$$

и

$$s_1 \geqslant 2, \quad s_k \geqslant (z_k + 1)s_{k-1} + (-1)^{z_k} s_{k-2}, \qquad k \in \mathbf{Z}[2, n+1), \tag{10}$$

эквивалентны и, кроме того, из (8) *и* (9), *а также из* (8) *и* (10) *следует, что*

$$x_1 \geqslant 2, \quad x_k \geqslant z_k + 1, \quad k \in \mathbf{Z}[2, n+1).$$

Скажем, что последовательность рациональных чисел $\pi = \{t_n/s_n\}_{n \in \mathbf{Z}[-1,\mathfrak{n}+1)}$, где $\mathfrak{n} \in \mathbf{Z}[0, \infty]$ является M-последовательностью, если ее элементы удовлетворяют следующим свойствам:

$$t_{-1} = 1, \quad s_{-1} = 0, \quad s_0 = 1, \quad s_n t_{n-1} - t_n s_{n-1} = (-1)^{v_n},$$
$$v_n \in \mathbf{F}, \quad n \in \mathbf{Z}[0, \mathfrak{n}+1); \quad s_n < s_{n+1}, \quad n \in \mathbf{Z}[0, \mathfrak{n}). \tag{11}$$

Как следует из леммы 3, данное определение останется эквивалентным, если соотношение (11) заменить на следующее:

$$s_1 \geqslant 2, \quad s_n \geqslant (z_n+1)s_{n-1} + (-1)^{z_n} s_{n-2}, \quad n \in \mathbf{Z}[2, \mathfrak{n}+1), \tag{12}$$

где

$$z_n = v_n + v_{n-1} + 1 \pmod 2, \quad z_n \in \mathbf{F}, \quad n \in \mathbf{Z}[1, \mathfrak{n}+1), \quad z_{\mathfrak{n}+1} = 0.$$

Аналогично, скажем, что последовательность рациональных чисел

$$\pi = \{t_n/s_n\}_{n\in\mathbf{Z}[-1,\mathfrak{n}+1)}, \quad \mathfrak{n} \in \mathbf{Z}[0,\infty],$$

является Δ-последовательностью, если ее элементы удовлетворяют свойствам M-последовательности за исключением свойства (11) или (12), вместо которого выполнено следующее свойство:

$$s_n \geqslant (z_{n+1}+1)s_{n-1} + (-1)^{z_n} s_{n-2}, \qquad n \in \mathbf{Z}[1, \mathfrak{n})$$

и $s_\mathfrak{n} \geqslant 2s_{\mathfrak{n}-1} + (-1)^{z_\mathfrak{n}} s_{\mathfrak{n}-2}$ при $\mathfrak{n} \neq \infty$.

Обозначим через $\mathbf{M}$ множество всех M-последовательностей, через $\mathbf{M}_\mathbf{N}$ множество всех M-последовательностей конечной длины, через $\mathbf{M}_\infty$ множество всех M-последовательностей бесконечной длины и, аналогично, через $\mathbf{D}$ множество всех Δ-последовательностей, через $\mathbf{D}_\mathbf{N}$ и $\mathbf{D}_\infty$ множества всех Δ-последовательностей конечной и бесконечной длины соответственно.

Следующая утверждение уточняет предложение 1.

Предложение 3. *Для произвольной последовательности* $\pi = \{t_n/s_n\}_{n\in\mathbf{Z}[-1,\mathfrak{n}+1)}$, *если* $\pi \in \mathbf{M}$ *(аналогично, если* $\pi \in \mathbf{D}$*), то существует единственная последовательность* $\Sigma = \Sigma(\pi) \in M$ *(соответственно,* $\Sigma \in \Delta$*), элементы которой вычисляются по формуле* (5)*, и такая что выполнено* (6).

Таким образом, последовательность всех подходящих дробей является биективной функцией $\mathfrak{C}\colon \Delta \cup M \to \mathbf{D} \cup \mathbf{M}$, определяемой формулой

$$\mathfrak{C}(\sigma_{0,n}) = \{c_k(\sigma_{0,k})\}_{k\in\mathbf{Z}[-1,n+1)}, \qquad \sigma_{0,n} \in \Delta \cup M,$$

при этом $\mathfrak{C}(\Delta) = \mathbf{D}$, $\mathfrak{C}(M) = \mathbf{M}$, $\mathfrak{C}^{-1} = \Sigma$.

Введем обозначения

$$\hat{M} = \hat{M}_\mathbf{N} \cup \hat{M}_\infty \subset \bar{M}, \quad \hat{M}_\infty = \{\hat{\sigma}^z_{0,\infty}\}_{z\in\mathbf{Z}} \subset \bar{M}_\infty;$$
$$\hat{M}_\mathbf{N} = \mathbf{Z} \cup \bigcup_{n\in\mathbf{Z}[1,\infty)} \hat{M}_n \subset \bar{M}_\mathbf{N}, \quad \hat{M}_n = \{\hat{\sigma}^z_{0,n}\}_{z\in\mathbf{Z}} \subset \bar{M}_n, \quad n \in \mathbf{Z}[1,\infty),$$

где

$$\hat{\sigma}^z_{0,n} = (z, 0, 1, 1, 2, \dots, 1, 2) \in \bar{M}_n,$$
$$\hat{\sigma}^z_{0,\infty} = (z, 0, 1, 1, 2, 1, 2, \dots) \in \bar{M}_\infty.$$

Из предложения 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Если* $\sigma \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty \setminus \hat{M}_\infty$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} q_k = \infty,$$

если $\sigma = \hat{\sigma}^z_{0,n} \in \hat{M}$, $z \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}[0,\infty]$, *то*

$$q_k = 1, \quad p_k = z + k, \quad k \in \mathbf{Z}[0, n+1),$$

если $\sigma = \hat{\sigma}^z_{0,\infty} \in \hat{M}_\infty$, $z \in \mathbf{Z}$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = \infty.$$

Теперь мы можем сделать заключения о взаимном расположении подходящих дробей данной обобщенной цепной дроби. В следующем утверждении обобщаются свойства промежуточных дробей.

Для $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, $k \in \mathbf{Z}[1, n+1)$, $i \in \mathbf{Z}[0, a_k]$ положим

$$c_{k,i}(\sigma) = c_{k,i} = \frac{ip_{k-1} + (-1)^{u_k} p_{k-2}}{iq_{k-1} + (-1)^{u_k} q_{k-2}}.$$

При $i = 0$ и $i = a_k$ величины $c_{k,0} = c_{k-2}$ и $c_{k,a_k} = c_k$ являются подходящими дробями, а при $i \in \mathbf{Z}[1, a_k - 1]$ величины $c_{k,i}$ будем называть промежуточными дробями.

Предложение 5. *Пусть* $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, $k \in \mathbf{Z}[1, n+1)$. *Тогда для* $u_k = 0$ *дроби*

$$c_{k-2} = c_{k,0}, c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,a_k} = c_k, c_{k-1},$$

а для $u_k = 1$ *дроби*

$$c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,a_k} = c_k, c_{k-1}, c_{k-2} = c_{k,0}$$

образуют при $k + |\bar{u}_k|$ *четном строго возрастающую, а при* $k + |\bar{u}_k|$ *нечетном строго убывающую последовательность.*

Следствие 1. *Пусть* $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, $k \in \mathbf{Z}[1, n+1)$, $l \in \mathbf{Z}[1,k]$ *и* $u_i = 1$ *при* $i \in \mathbf{Z}[k-l+2, k]$. *Тогда конечная подпоследовательность* $\{c_{k-l+j}\}_{j\in\mathbf{Z}[0,l]}$ *является строго монотонно убывающей при* $k - l + 1 + |\bar{u}_{k-l+1}|$ *четном и строго монотонно возрастающей при* $k - l + 1 + |\bar{u}_{k-l+1}|$ *нечетном.*

Следствие 2. *Пусть* $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, $k \in \mathbf{Z}[2, n+1)$. *Тогда если* $u_k = 0$, *то*

$$|c_{k-1} - c_{k-2}| \geqslant |c_{k-1} - c_k| + |c_{k,1} - c_{k-2}|,$$

и если $u_k = 1$, *то*

$$|c_{k,1} - c_{k-2}| \geqslant |c_{k-1} - c_k| + |c_{k-1} - c_{k-2}|,$$

при этом в обоих случаях равенство достигается только при $a_k = 1$.

Предложение 6. *Пусть* $\sigma = \sigma_{0,n} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $n \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, $k \in \mathbf{Z}[2, n+1)$, $l \in \mathbf{Z}[1, k-1]$ *и* $u_i = 1$ *при* $i \in \mathbf{Z}[k-l+2, k]$. *Тогда если* $u_{k-l+1} = 0$ *и* $\sigma \in \bar{\Delta}$, *то*

$$|c_{k-l} - c_{k-l-1}| \geqslant |c_{k-l} - c_k| + |c_{k-l+1,1} - c_{k-l-1}|,$$

при этом равенство достигается только при $a_i = 2$, $i \in \mathbf{Z}[k-l+1, k-1]$, $a_k = 1$, *и* $u_{k+1} = 0$; *если* $u_{k-l+1} = 0$ *и* $\sigma \in \bar{M}$, *то*

$$|c_{k-l} - c_{k-l-1}| > \frac{l}{q_{k-l}(lq_{k-l-1} + q_{k-l})} \geqslant |c_{k-l} - c_k|,$$

при этом равенство достигается только при $a_{k-l+1} = 1$, $a_i = 2$, $i \in \mathbf{Z}[k-l+2, k]$; *если* $u_{k-l+1} = 1$ *и* $\sigma \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, *то*

$$|c_{k-l+1,1} - c_{k-l-1}| \geqslant |c_{k-l} - c_k| + |c_{k-l} - c_{k-l-1}|,$$

при этом равенство достигается только при $a_i = 2$, $i \in \mathbf{Z}[k-l+1, k-1]$, $a_k = 1$ *и* $u_{k+1} = 0$.

При $l = 1$ предложение 6 совпадает с ранее доказанным следствием 2.

Пусть $l \geqslant 2$. Введем обозначения

$$\bar{1}_s = (1, 1, \ldots, 1), \qquad \overline{1,2}_s = (1, 2, 1, 2, \ldots, 1, 2),$$

где 1 и $1, 2$ повторяются s раз;

$$\bar{u}_{r,s} = (u_r, u_{r+1}, \ldots, u_s), \qquad \bar{a}_{r,s} = (a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s).$$

Несложно провести методом математической индукции доказательство трех следующих лемм.

Лемма 4. *При* $m, s \in \mathbf{N}$ *выполнены равенства*

$$\begin{aligned}
q_{m+s}(\sigma_{0,m}, 0, 2, \overline{1,2}_{s-1}) &= (s+1)q_m(\sigma_{0,m}) + sq_{m-1}(\sigma_{0,m-1}),\\
q_{m+s}(\sigma_{0,m}, 0, 2, \overline{1,2}_{s-2}, 1, 1) &= q_m(\sigma_{0,m}) + q_{m-1}(\sigma_{0,m-1}), \qquad s \geqslant 2,\\
q_{m+s}(\sigma_{0,m}, \overline{1,2}_s) &= (s+1)q_m(\sigma_{0,m}) - sq_{m-1}(\sigma_{0,m-1}),\\
q_{m+s}(\sigma_{0,m}, \overline{1,2}_{s-1}, 1, 1) &= q_m(\sigma_{0,m}) - q_{m-1}(\sigma_{0,m-1}),\\
q_{m+s}(\sigma_{0,m}, 0, 1, \overline{1,2}_{s-1}) &= q_m(\sigma_{0,m}) + sq_{m-1}(\sigma_{0,m-1}).
\end{aligned}$$

Лемма 5. *Пусть* $\sigma = \sigma_{0,k} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $k \in \mathbf{Z}[2,\infty)$, $l \in \mathbf{Z}[2,k]$, $s \in \mathbf{Z}[1,l]$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
\min(q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l+s}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-l+s} &\in \mathbf{Z}^s[2,\infty), u_{k-l+1} = 0, \bar{u}_{k-l+2,k-l+s} = \bar{1}_{s-1}) \\
&= q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l}, 0, 2, \overline{1,2}_{s-1}), \\
\min(q_k(\sigma_{0,k}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-1} &\in \mathbf{Z}^{l-1}[2,\infty), \\
\bar{a}_k &\in \mathbf{Z}[1,\infty), u_{k-l+1} = 0, \bar{u}_{k-l+2,k} = \bar{1}_{l-1}) \\
&= q_k(\sigma_{0,k-l}, 0, 2, \overline{1,2}_{l-2}, 1, 1), \\
\min(q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l+s}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-l+s} &\in \mathbf{Z}^s[2,\infty), \bar{u}_{k-l+1,k-l+s} = \bar{1}_s) \\
&= q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l}, \overline{1,2}_s), \\
\min(q_k(\sigma_{0,k}) \mid \bar{a}_{k-l+1,k-1} &\in \mathbf{Z}^{l-1}[2,\infty), a_k \in \mathbf{Z}[1,\infty), \bar{u}_{k-l+1,k} = \bar{1}_l) \\
&= q_k(\sigma_{0,k-l}, \overline{1,2}_{l-1}, 1, 1), \\
\min(q_{k-l+s}(\sigma_{0,k-l+s}) \mid a_{k-l+1} &\in \mathbf{Z}[1,\infty), \\
\bar{a}_{k-l+2,k-l+s} &\in \mathbf{Z}^{s-1}[2,\infty), u_{k-l+1} = 0, \bar{u}_{k-l+2,k-l+s} = \bar{1}_{s-1}) \\
&= q_k(\sigma_{0,k-l}, 0, 1, \overline{1,2}_{s-1}),
\end{aligned}$$

при этом минимумы достигаются только в одной точке.

Лемма 6. *Пусть* $\alpha, \beta, s \in \mathbf{N}$ *и* $\alpha > \beta$. *Тогда*

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(j\alpha + (j-1)\beta)((j+1)\alpha + j\beta)} = \frac{s}{\alpha((s+1)\alpha + s\beta)},$$

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(\alpha + (j-1)\beta)(\alpha + j\beta)} = \frac{s}{\alpha(\alpha + s\beta)},$$

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{(j\alpha - (j-1)\beta)((j+1)\alpha - j\beta)} = \frac{s}{\alpha((s+1)\alpha - s\beta)}.$$

Используя следствие 1 и соотношение (3), несложно получить, что

$$|c_{k-l} - c_k| = \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{q_{k-l+j-1} q_{k-l+j}}.$$

Отсюда и из лемм 4–6 легко следует доказательство предложения 6.

Разделим последовательность обобщенных цепных дробей

$$\mathfrak{C} = \{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}[-1,\mathfrak{n}+1)},$$

где $\mathfrak{n} \in \mathbf{Z}[-1,\infty]$, на две подпоследовательности

$$\mathfrak{C}^+ = \{c_{p_i}\}_{i \in \mathbf{Z}[1,\mathfrak{P}+1)}, \qquad \mathfrak{C}^- = \{c_{l_i}\}_{i \in \mathbf{Z}[1,\mathfrak{L}+1)},$$

которые будем называть, соответственно, правой и левой. Последовательности номеров

$$R = \{p_i\}_{i \in \mathbf{Z}[1,\mathfrak{P}+1)}, \qquad L = \{l_i\}_{i \in \mathbf{Z}[1,\mathfrak{L}+1)}$$

элементов, соответственно, правой и левой подпоследовательностей определим, исходя из соотношений

$$p_i = \min\{m \in \{0,1,2,\dots\} \mid p_{i-1} < m < \mathfrak{n}, m+1+|\bar{u}_{m+1}| \text{ — четное число}\},$$

где $i \in \mathbf{Z}[2, \mathfrak{P}+1)$, и $p_1 = -1$,

$$l_i = \min\{m \in \{0,1,2,\dots\} \mid l_{i-1} < m < \mathfrak{n}, m+1+|\bar{u}_{m+1}| \text{ — нечетное число}\},$$

где $i \in \mathbf{Z}[1, \mathfrak{L}+1)$, и $l_0 = -1$. Номер p_i так же, как и номер l_i, отсутствует, если при его определении берется минимум от пустого множества. При этом подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ и $\mathfrak{C}^-$ могут быть как конечными, так и бесконечными, а подпоследовательность $\mathfrak{C}^-$ может быть пустой. Последний элемент последовательности $\mathfrak{C}$, если она является конечной, или предел последовательности $\mathfrak{C}$, если она является бесконечной и имеет предел, по определению не будет принадлежать ни подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$, ни подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$.

Перебором всех частных случаев устанавливается следующее утверждение.

Предложение 7. *При $\sigma \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$ правая подпоследовательность $\mathfrak{C}^+$ является строго монотонно убывающей, а левая подпоследовательность $\mathfrak{C}^-$ является строго монотонно возрастающей. При этом любая обобщенная цепная дробь из правой подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ строго больше любой обобщенной цепной дроби из левой подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$, а в случае конечной последовательности $\mathfrak{C}$ последний ее элемент строго меньше любой обобщенной цепной дроби из правой подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ и строго больше любой обобщенной цепной дроби из левой подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$.*

Под сходимостью бесконечной обобщенной цепной дроби $c_\infty(\sigma_{0,\infty})$ будем подразумевать сходимость бесконечной последовательности подходящих дробей $\mathfrak{C} = \{c_n\}_{n \in \mathbf{Z}[-1,\infty)}$.

Предложение 8. *Если $\sigma_{0,\infty} \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty$, то любая бесконечная обобщенная цепная дробь $c_\infty(\sigma_{0,\infty})$ сходится к бесконечному пределу при $\sigma_{0,\infty} \in \hat{M}_\infty$ и к конечному пределу при $\sigma_{0,\infty} \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty \setminus \hat{M}_\infty$.*

Для сходящихся бесконечных обобщенных цепных дробей из предложений 7 и 8, как нетрудно видеть, вытекает следующее утверждение.

Предложение 9. *При $\sigma_{0,\infty} \in \bar{\Delta}_\infty \cup \bar{M}_\infty$ значение сходящейся бесконечной обобщенной цепной дроби строго меньше любой подходящей дроби из правой подпоследовательности $\mathfrak{C}^+$ и строго больше любой подходящей дроби из левой подпоследовательности $\mathfrak{C}^-$.*

Предложение 10. *При $\sigma_{0,d} \in \bar{\Delta} \cup \bar{M}$, $d \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, $\alpha = c(\sigma_{0,d})$ для любого $n \in \mathbf{Z}[1, d+1)$*

$$\alpha = \frac{p_{n-1} r_n + (-1)^{u_n} p_{n-2}}{q_{n-1} r_n + (-1)^{u_n} q_{n-2}}.$$

Доказательство предложения 10 следует непосредственно из соотношения (4) и предложения 8.

Введем обозначения

$$\bar\Delta_{\mathbf{O}} = \{\sigma_{0,\infty} \in \bar\Delta_\infty \mid \text{ найдется такое } K \in \mathbf{N}, \text{ что } a_k = 2, u_k = 1 \text{ при } k \in \mathbf{Z}[K,\infty)\},$$
$$\bar\Delta_{\mathbf{Q}} = \bar\Delta_{\mathbf{O}} \cup \bar\Delta_{\mathbf{N}}, \quad \Delta_{\mathbf{Q}} = \bar\Delta_{\mathbf{Q}} \cap \Delta, \quad \Delta_{\mathbf{O}} = \bar\Delta_{\mathbf{O}} \cap \Delta,$$
$$\bar M_{\mathbf{O}} = \{\sigma_{0,\infty} \in \bar M_\infty \mid \text{ найдется такое } K \in \mathbf{N}, \text{ что } a_k = 2, u_k = 1 \text{ при } k \in \mathbf{Z}[K,\infty)\},$$
$$\bar M_{\mathbf{Q}} = \bar M_{\mathbf{O}} \cup \bar M_{\mathbf{N}}, \quad M_{\mathbf{Q}} = \bar M_{\mathbf{Q}} \cap M, \quad M_{\mathbf{O}} = \bar M_{\mathbf{O}} \cap M.$$

Из предложений 6, 7 и 9 несложно вывести следующее утверждение.

Предложение 11. *Пусть* $\sigma = \sigma_{0,d} \in \bar\Delta \cup \bar M$, $d \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, $\alpha = c(\sigma_{0,d})$. *Тогда если* $k \in \mathbf{Z}[0,d-1)$, *то при* $\sigma \in \Delta \setminus \Delta_{\mathbf{O}}$

$$u_{k+2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{q_k(q_{k+1}+q_k)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}},$$
$$u_{k+2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k(q_{k+1}-q_k)},$$

при $\sigma \in \bar\Delta_{\mathbf{Q}}$

$$u_{k+2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{q_k(q_{k+1}+q_k)} \leqslant \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}},$$
$$u_{k+2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k(q_{k+1}-q_k)},$$

при $\sigma \in \bar M \setminus \bar M_{\mathbf{O}}$

$$u_{k+2} = 0 \Rightarrow 0 < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_kq_{k+1}},$$
$$u_{k+2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k(q_{k+1}-q_k)},$$

при $\sigma \in \bar M$

$$u_{k+2} = 0 \Rightarrow 0 \leqslant \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_kq_{k+1}},$$
$$u_{k+2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q_kq_{k+1}} \leqslant \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{q_k(q_{k+1}-q_k)},$$

где все нестрогие неравенства в соотношениях достижимы;

если $k = d-1$ *и* $d < \infty$ *то*

$$\frac{1}{q_k(q_{k+1}+q_k)} < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k(q_{k+1}-q_k)}.$$

2. В [1] введено понятие представления вещественного числа α в виде цепной дроби, которое получается процессом последовательного деления, сопровождающимся взятием целой части

$$\alpha = [\alpha]+\{\alpha\} = a_0^\natural(\alpha)+\frac{1}{r_1^\natural(\alpha)} = a_0^\natural(\alpha)+\frac{1}{[r_1^\natural(\alpha)]+\{r_1^\natural(\alpha)\}} = a_0^\natural(\alpha)+\cfrac{1}{a_1^\natural(\alpha)+\cfrac{1}{r_2^\natural(\alpha)}} = \ldots$$

Это представление будем называть здесь обычным представлением или $\mathfrak{h}$-представлением. Аналогично автором в данной работе определяется понятие z-представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби, только взятие целой части (ближайшего целого слева) заменяется на некоторых шагах процесса вычислением ближайшего целого справа в зависимости от типа z и числа α:

$$\alpha = a_0^z(\alpha) + \frac{(-1)^{u_1^z(\alpha)}}{r_1^z(\alpha)} = a_0^z(\alpha) + \cfrac{(-1)^{u_1^z(\alpha)}}{a_1^z(\alpha) + \cfrac{(-1)^{u_2^z(\alpha)}}{r_2^z(\alpha)}} = \dots,$$

где $u_i^z(\alpha) \in \mathbf{F}$, $r_i^z(\alpha) \in \mathbf{R}(1,\infty)$, $i \in \mathbf{N}$.

Обозначим $\mathfrak{Z}$ множество всех таких представлений. С z-представлением, $z \in \mathfrak{Z}$, тесно связан обобщенный алгоритм Евклида, определяемый для рационального числа $\alpha = a/b$ или пары целых чисел (a,b) как последовательность вычислений вида

$$\begin{aligned}
a &= ba_0^z(\alpha) + (-1)^{u_1^z(\alpha)} R_1^z(\alpha),\\
b &= R_1^z(\alpha)a_1^z(\alpha) + (-1)^{u_2^z(\alpha)} R_2^z(\alpha),\\
R_1^z(\alpha) &= R_2^z(\alpha)a_2^z(\alpha) + (-1)^{u_3^z(\alpha)} R_3^z(\alpha),\\
&\dots\\
R_{n-2}^z(\alpha) &= R_{n-1}^z(\alpha)a_{n-1}^z(\alpha) + (-1)^{u_n^z(\alpha)} R_n^z(\alpha),\\
R_{n-1}^z(\alpha) &= R_n^z(\alpha)a_n^z(\alpha),
\end{aligned}$$

где

$$0 < R_i^z(\alpha) < R_{i-1}^z(\alpha), \quad i \in \mathbf{Z}[1,n], \quad R_0^z(\alpha) = b.$$

Число n называется длиной алгоритма. При $u_i^z(\alpha) = 0$, $i \in \mathbf{Z}[1,n]$, получим обычный алгоритм Евклида, которому соответствует обычное представление ($\mathfrak{h}$-представление) числа α в виде обычной цепной дроби. Назовем алгоритмом Евклида с выбором минимального остатка обобщенный алгоритм Евклида, в котором всегда

$$r_i^z(\alpha) = \frac{R_{i-1}^z(\alpha)}{R_i^z(\alpha)} \geqslant 2, \qquad i \in \mathbf{Z}[1,n].$$

Соответствующее представление назовем представлением с минимальным остатком или $\mathfrak{m}$-представлением числа α в виде обобщенной цепной дроби.

Кронекером доказаны две следующие теоремы.

Первая теорема Кронекера. *Число всех возможных обобщенных алгоритмов Евклида для пары (a,b) взаимно простых чисел равно b.*

Вторая теорема Кронекера. *Минимальная длина обобщенного алгоритма Евклида равна длине алгоритма Евклида с выбором минимального остатка.*

В [1] введено понятие наилучшего приближения первого рода вещественного числа α, как такой рациональной дроби a/b, $b > 0$, что для всякой другой рациональной дроби c/d такой, что $0 < d \leqslant b$, $a/b \neq c/d$, выполняется неравенство

$$|\alpha - c/d| > |\alpha - a/b|.$$

Естественным образом определим наилучшее приближение снизу первого рода числа α, как такую рациональную дробь a/b, $b > 0$, что $a/b \leqslant \alpha$ и для всякой другой рациональной дроби такой, что $0 < d \leqslant b$, $a/b \neq c/d$, $c/d \leqslant \alpha$, выполняется неравенство

$$\alpha - c/d > \alpha - a/b.$$

Аналогично определим наилучшее приближение сверху первого рода числа α.

В [1] также введено понятие наилучшего приближения второго рода вещественного числа α, как такой рациональной дроби a/bб $b > 0$, что для всякой другой рациональной дроби c/d такой, что $0 < d \leqslant b$, $a/b \neq c/d$, выполняется неравенство

$$|\alpha d - c| > |\alpha b - a|.$$

Естественным образом в [3] определяются односторонние наилучшие приближения сверху и снизу второго рода числа α.

Очевидно, что при рациональном числе α оно само является наилучшим приближением во всех вышеприведенных определениях. Определим понятие проколотого наилучшего приближения соответственно первого и второго рода сверху и снизу, повторив соответствующие определения в условиях исключения самого числа α из числа претендентов наилучшего приближения.

В [3], теоремы $1'$ и $1''$, а также в [4], теорема 2, показана связь между наилучшими приближениями сверху второго рода числа α и представлением числа α в виде приведенной регулярной непрерывной дроби (см. [5]), под которым в терминах данной работы подразумевается такое z-представление, что $u_i^z(\alpha) = 1$ для всех i. Это представление будем называть здесь r-представлением. Аналогично показана связь между наилучшими приближениями снизу второго рода числа α и представлением числа α в виде, близком приведенной регулярной непрерывной дроби, под которым в терминах данной работы подразумевается такое z-представление, что $u_1^z(\alpha) = 0$ и $u_i^z(\alpha) = 1$ для всех $i \geqslant 2$.Это представление будем называть здесь l-представлением. Приведем формулировку теоремы 2 из [4] (теоремы 1' и 1" из [3] аналогичны).

Теорема Финкельштейна. *Последовательность рациональных дробей, наилучших приближений сверху второго рода числа α, совпадает с последовательностью подходящих дробей для приведенной регулярной непрерывной дроби, в которую разлагается число α.*

Далее автором будут более подробно исследованы связи между характеристиками $\mathfrak{h}$-представления, $\mathfrak{m}$-представления, r-представления, l-представления и произвольного z-представления числа α в виде обобщенной цепной дроби. При этом в некотором смысле будут детализированы и обобщены цитируемые выше теоремы Кронекера и Финкельштейна.

Напомним, что выше было определено множество z-представлений $\mathfrak{Z}$.Определим еще три типа z-представлений, $\mathfrak{M}$, $\hat{\mathfrak{Z}}$ и $\hat{\mathfrak{M}}$. Для этого будем определять посредством индукции наборы, состоящие из функции $d^z : \mathbf{R} \to \mathbf{Z}[0, \infty]$ и для каждого $\alpha \in \mathbf{R}$ из последовательностей

$$\{a_n^z(\alpha)\}_{n \in \mathbf{Z}[0, d^z(\alpha)+1)}, \quad \{u_n^z(\alpha)\}_{n \in \mathbf{Z}[1, d^z(\alpha)+1)}, \quad \{r_n^z(\alpha)\}_{n \in \mathbf{Z}[1, d^z(\alpha)+1)},$$

принимающие различные значения при различных типах z-представлений. При фиксированном $\alpha \in \mathbf{R}$ на $(n+1)$-м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, в зависимости от некоторого правила, которое задается типом z, либо будут определяться значения набора $a_n^z(\alpha)$, $u_{n+1}^z(\alpha)$, $r_{n+1}^z(\alpha)$, связанные уравнением

$$r_n^z(\alpha) = a_n^z(\alpha) + \frac{(-1)^{u_{n+1}^z(\alpha)}}{r_{n+1}^z(\alpha)},$$

причем выбор этих значений будет производиться из заданного конечного множества, либо процесс определения закончится с условием, что $a_n^z(\alpha) = r_n^z(\alpha)$ и $d^z(\alpha) = n$. Если для $\alpha \in \mathbf{R}$ этот процесс никогда не остановится, то полагаем $d^z(\alpha) = \infty$.

Положим $r_0^z(\alpha) = \alpha$.

Зафиксируем тип $z \in Z$ (и тем самым зафиксируем правила выбора).

На $(n+1)$-м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[0,\infty)$, выбор возможностей в зависимости от типа z задается соотношениями

$$\begin{array}{lll} a_n^z(\alpha) = r_n^z(\alpha), & d^z(\alpha) = n & \text{при } r_n^z(\alpha) \in \mathbf{Z}[2,\infty), \\ a_n^z(\alpha) = [r_n^z(\alpha)], & u_{n+1}^z(\alpha) = 0 & \text{при } r_n^z(\alpha) \notin \mathbf{Z}[2,\infty), \\ a_n^z(\alpha) =]r_n^z(\alpha)[, & u_{n+1}^z(\alpha) = 1 & \text{при } r_n^z(\alpha) \notin \mathbf{Z}[2,\infty). \end{array}$$

Здесь $]x[$ — ближайшее целое справа, $[x]$ — ближайшее целое слева для числа x.

Определим множество z-представлений $\mathfrak{M}$. Первый шаг индукции определяемого z-представления при $z \in \mathfrak{M}$ совпадает с первым шагом ранее определенного z-представления при $z \in \mathfrak{Z}$.

Положим $U_1^z(\alpha) = 1$, $U_n^z(\alpha) = u_n^z(\alpha)$, $n \in \mathbf{Z}[2, d^z(\alpha)+1)$.

На $(n+1)$-м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[1,\infty)$, при $k = [r_n^z(\alpha)]$ выбор возможностей определяется соотношениями

$$\begin{array}{lll} a_n^z(\alpha) = j, & u_{n+1}^z(\alpha) = 0, & j \in [1 + U_n^z(\alpha) = 0, \\ a_n^z(\alpha) = k, & d^z(\alpha) = n & \text{при } r_n^z(\alpha) = k \in \mathbf{Z}[1,\infty), \\ a_n^z(\alpha) = j, & u_{n+1}^z(\alpha) = 0, & j \in \mathbf{Z}[\max(1 + U_n^z(\alpha), k] \text{ при } r_n^z(\alpha) \notin \mathbf{Z}[1,\infty), \\ a_n^z(\alpha) = k+1, & u_{n+1}^z(\alpha) = 1 & \text{при } r_n^z(\alpha) \notin \mathbf{Z}[1,\infty). \end{array}$$

Определим множество z-представлений $\hat{\mathfrak{Z}}$. В этом случае $(n+1)$-й шаг индукции, $n \in \mathbf{Z}[0,\infty)$, определяемого z-представления, $z \in \hat{\mathfrak{Z}}$ совпадает с $(n+1)$-м шагом ранее определенного z-представления при $z \in \mathfrak{Z}$, за исключением случая остановки процесса (для $z \in \mathfrak{Z}$) при $r_n^z(\alpha) = k \in \mathbf{Z}[2,\infty)$, $n \in \mathbf{N}$, и при $r_n^z(\alpha) = k \in \mathbf{Z}$, $n = 0$, когда выбор возможностей задается соотношениями

$$\begin{array}{lll} a_n^z(\alpha) = k-1, & u_{n+1}^z(\alpha) = 0, & r_{n+1}^z(\alpha) = 1, \\ a_n^z(\alpha) = k+1, & u_{n+1}^z(\alpha) = 1, & r_{n+1}^z(\alpha) = 0, \end{array}$$

а также за исключением случая $r_n^z(\alpha) = 1$, $n \in \mathbf{N}$, когда полагаем

$$a_n^z(\alpha) = 2, \quad u_{n+1}^z(\alpha) = 1, \quad r_{n+1}^z(\alpha) = 1.$$

Наконец, определим множество z-представлений $\hat{\mathfrak{M}}$. Первый шаг индукции определяемого z-представления при $z \in \hat{\mathfrak{M}}$ совпадает с первым шагом ранее определенного z-представления при $z \in \mathfrak{Z}$, за исключением случая остановки процесса (для

$z \in \mathfrak{Z}$) при $\alpha \in \mathbf{Z}$, когда выбор возможностей задается соотношениями

$$\begin{aligned}
&a_0^z(\alpha) = \alpha - 1, && u_1^z(\alpha) = 0, && r_1^z(\alpha) = 1,\\
&a_0^z(\alpha) = \alpha, && u_1^z(\alpha) = 0, && r_1^z(\alpha) = \infty,\\
&a_0^z(\alpha) = \alpha, && u_1^z(\alpha) = 1, && r_1^z(\alpha) = \infty,\\
&a_0^z(\alpha) = \alpha + 1, && u_1^z(\alpha) = 1, && r_1^z(\alpha) = 1,
\end{aligned}$$

$(n+1)$-й шаг индукции, $n \in \mathbf{Z}[1,\infty)$, определяемого z-представления при $z \in \hat{\mathfrak{M}}$ совпадает с $(n+1)$-м шагом ранее определенного z-представления при $z \in \mathfrak{M}$, за исключением случая $r_n^z(\alpha) = k \in \mathbf{Z}[1,\infty]$, когда выбор возможностей при $z \in \hat{\mathfrak{M}}$ задается соотношениями

$$\begin{aligned}
&a_n^z(\alpha) = j, && u_{n+1}^z(\alpha) = 0, && j \in \mathbf{Z}[1 + U_n^z(\alpha), k+1),\\
&a_n^z(\alpha) = j, && u_{n+1}^z(\alpha) = 1, && j \in \mathbf{Z}[\max(1 + U_n^z(\alpha), k), k+1),\\
&a_n^z(\alpha) = j, && u_{n+1}^z(\alpha) = 1, && j \in \mathbf{Z}[k+1, k+2).
\end{aligned}$$

Итак, мы для каждого вещественного числа $\alpha \in \mathbf{R}$ однозначно определили в случае конечной длины $d^z(\alpha) = n \in \mathbf{Z}[0,\infty)$ конечный вектор

$$\sigma_{0,n}^z(\alpha) = (a_0^z(\alpha), u_1^z(\alpha), a_1^z(\alpha), u_2^z(\alpha), a_2^z(\alpha), \dots, u_n^z(\alpha), a_n^z(\alpha)),$$

а в случае бесконечной длины $d^z(\alpha) = \infty$ бесконечный вектор

$$\sigma_{0,n}^z(\alpha) = (a_0^z(\alpha), u_1^z(\alpha), a_1^z(\alpha), u_2^z(\alpha), a_2^z(\alpha), \dots)$$

и, таким образом, при $\alpha \in \mathbf{Z}$ мы задали функцию

$$\sigma^z(\alpha) = \begin{cases} \sigma_{0,n}^z(\alpha) & \text{при } d^z(\alpha) = n \in \mathbf{Z}[0,\infty),\\ \sigma_{0,\infty}^z(\alpha) & \text{при } d^z(\alpha) = \infty, \end{cases}$$

которую мы и будем называть z-представлением, $z \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}$, вещественных чисел в виде обобщенных цепных дробей.

Функция σ^z, $z \in \mathfrak{Z}$, однозначно задается, если на каждом шаге индукции в определении функции σ^z, $z \in \mathfrak{Z}$, при неоднозначном выборе набора значений компонент вектора σ^z, $z \in \mathfrak{Z}$, дано правило выбора из двух возможностей. Так, если задать значения вектор-функции

$$\bar{u}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{F}^\infty, \quad \bar{u}(\alpha) = (u_1(\alpha), u_2(\alpha), \dots) \in \mathbf{F}^\infty, \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

то по нему однозначно определяется функция σ^z, $z \in \mathfrak{Z}$, посредством соотношений

$$u_i^z(\alpha) = u_i(\alpha), \qquad i \in \mathbf{Z}[1, d^z(\alpha) + 1);$$

в этом случае будем говорить что z-представление $z \in \mathfrak{Z}$, определяется вектором $\bar{u}$. Другим способом задания функции σ^z, $z \in \mathfrak{Z}$, является ее определение по функции

$$\begin{aligned}
&\zeta\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Z}^* = ((\{0\} \times \mathbf{R}(0,1]) \cup (\{1\} \times \mathbf{R}[0,1)))^\infty,\\
&\qquad \zeta(\alpha) = (\varkappa_1(\alpha), \theta_1(\alpha), \varkappa_2(\alpha), \theta_2(\alpha), \dots) \in \mathbf{Z}^*, \quad \alpha \in \mathbf{R}
\end{aligned}$$

посредством соотношений

$$-(1-\theta_{n+1}(\alpha)) \leqslant \frac{(-1)^{u_{n+1}^z(\alpha)}}{r_{n+1}^z(\alpha)} < \theta_{n+1}(\alpha), \text{ если } \varkappa_{n+1}(\alpha)=0,$$

$$-(1-\theta_{n+1}(\alpha)) < \frac{(-1)^{u_{n+1}^z(\alpha)}}{r_{n+1}^z(\alpha)} \leqslant \theta_{n+1}(\alpha), \text{ если } \varkappa_{n+1}(\alpha)=1,$$

определяющих выбор на $(n+1)$-м шаге индукции, $n \in \mathbf{Z}[0,\infty)$, в случае существования двух возможностей; такое z-представление, $z \in Z$, будем называть также представлением по ζ.

При $z = \mathfrak{h} \in \mathfrak{Z}\setminus\mathfrak{M}$ функция σ^z является обычным представлением вещественных чисел в виде цепных дробей (см. [1]) или представлением по $\zeta(\alpha) = (0,1,0,1,\dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, и определяется вектором $\bar{u}(\alpha) = (0,0,\dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, при $z = \mathfrak{m} \in \mathfrak{Z}\cup\mathfrak{M}$ определяется представлением с минимальным остатком или представлением по $\zeta(\alpha) = (0,1/2,0,1/2,\dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, при $z = r \in \mathfrak{Z}\cup\mathfrak{M}$ определяется представлением в виде приведенной регулярной непрерывной дроби или представлением по $\zeta(\alpha) = (1,0,1,0,\dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ и определяется вектором $\bar{u}(\alpha) = (1,1,\dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, при $z = l \in \mathfrak{Z}\cup\mathfrak{M}$ определяется представлением в виде, близком приведенной регулярной непрерывной дроби, или представлением по $\zeta(\alpha) = (0,1,1,0,1,0,\dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, и определяется вектором $\bar{u}(\alpha) = (0,1,1,\dots)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

В дальнейшем в целях технического удобства мы будем иногда в записи функций $a_n^z(\alpha)$, $u_n^z(\alpha)$, $r_n^z(\alpha)$, $d^z(\alpha)$, $\sigma_{0,n}^z(\alpha)$, $\sigma_{0,\infty}^z(\alpha)$, $\sigma^z(\alpha)$, $\zeta(\alpha)$, $\theta_n(\alpha)$, $\varkappa_n(\alpha)$ опускать зависимость от переменной, то есть эти функции записывать в виде, соответственно a_n^z, u_n^z, r_n^z, d^z, $\sigma_{0,n}^z$, $\sigma_{0,\infty}^z$, σ^z, ζ, θ_n, $\varkappa_n$.

Положим $\sigma^A(\mathbf{R}) = \{\sigma^z(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbf{R},z\in A}$ при $A \subset \mathfrak{Z}\cup\mathfrak{M}\cup\hat{\mathfrak{Z}}\cup\hat{\mathfrak{M}}$.

Верны следующие утверждения.

Предложение 12. *Справедливы включения*

$$\sigma^{\mathfrak{Z}\cup\hat{\mathfrak{Z}}}(\mathbf{R}) \subseteq \Delta, \qquad \sigma^{\mathfrak{M}\cup\hat{\mathfrak{M}}}(\mathbf{R}) \subseteq M.$$

Предложение 13. *Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$. При $z \in \mathfrak{Z}\cup\mathfrak{M}\cup\hat{\mathfrak{Z}}\cup\hat{\mathfrak{M}}$ справедливо равенство $c(\sigma^z(\alpha) = \alpha$, при $z \in \hat{\mathfrak{Z}}\cup\hat{\mathfrak{M}}$ вектор $\sigma^z(\alpha)$ всегда является бесконечным, а при $z \in \mathfrak{Z}\cup\mathfrak{M}$ вектор $\sigma^z(\alpha)$ является конечным, если число α рационально и является бесконечным, если число α иррационально.*

Доказательство предложения 13 аналогично доказательству теоремы 14 из [1].

Предложение 14. *Справедливы равенства*

$$\sigma^{\mathfrak{Z}}(\mathbf{R}) = \Delta\setminus\Delta_{\mathbf{O}}, \qquad \sigma^{\mathfrak{M}}(\mathbf{R}) = M\setminus M_{\mathbf{O}},$$

$$\sigma^{\hat{\mathfrak{Z}}}(\mathbf{R}) = \Delta\setminus\Delta_{\mathbf{N}} = \Delta_\infty, \quad \sigma^{\hat{\mathfrak{M}}}(\mathbf{R}) = M\setminus M_{\mathbf{N}} = M_\infty.$$

Следствие 3. *Справедливы равенства*

$$\Delta_{\mathbf{Q}} = \{\sigma\in\Delta \mid c(\sigma)\in\mathbf{Q}\}, \qquad M_{\mathbf{Q}} = \{\sigma\in M \mid c(\sigma)\in\mathbf{Q}\}.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{D_O} = \{\pi = \{t_n/s_n\}_{n\in\mathbf{Z}[-1,\infty)} \in \mathbf{D}_\infty \mid \lim_{n\to\infty}(t_n/s_n) \in \mathbf{Q}\},$$
$$\mathbf{M_O} = \{\pi = \{t_n/s_n\}_{n\in\mathbf{Z}[-1,\infty)} \in \mathbf{M}_\infty \mid \lim_{n\to\infty}(t_n/s_n) \in \mathbf{Q}\},$$
$$\mathbf{D_Q} = \mathbf{D_O} \cup \mathbf{D_N}, \quad \mathbf{M_Q} = \mathbf{M_O} \cup \mathbf{M_N}, \quad \mathfrak{C}^z(\alpha) = c(\sigma^z(\alpha)),$$
$$\mathfrak{C}^A(R) = \{\mathfrak{C}^z(\alpha)\}_{\alpha\in R, z\in A}, \quad R \subseteq \mathbf{R}, \quad A \subseteq \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}.$$

Следствие 4. *Справедливы равенства*

$$\mathfrak{C}^{\mathfrak{Z}}(\mathbf{R}) = \mathbf{D} \setminus \mathbf{D_O}, \quad \mathfrak{C}^{\mathfrak{M}}(\mathbf{R}) = \mathbf{M} \setminus \mathbf{M_O}, \quad \mathfrak{C}^{\mathfrak{Z}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{D_N}, \quad \mathfrak{C}^{\mathfrak{M}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{M_N},$$
$$\mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{Z}}}(\mathbf{R}) = \mathbf{D} \setminus \mathbf{D_N}, \quad \mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{M}}}(\mathbf{R}) = \mathbf{M} \setminus \mathbf{M_N}, \quad \mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{Z}}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{D_O}, \quad \mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{M}}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{M_O}.$$

Для $\alpha \in \mathbf{R}$ определим верхнюю α-последовательность, как такую строго монотонно убывающую M-последовательность $\mathfrak{P}(\alpha) = \{t_n/s_n\}_{n\in\mathbf{Z}[-1,\mathfrak{p})} \in \mathbf{M}$, где $\mathfrak{p} \in \mathbf{Z}[0,\infty]$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

$$\text{если } \alpha \in \mathbf{Q}, \text{ то } \mathfrak{p} \in \mathbf{Z}[0,\infty) \text{ и } t_\mathfrak{p}/s_\mathfrak{p} = \alpha, \tag{13}$$
$$\text{если } \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \text{ то } \mathfrak{p} = \infty \text{ и существует } \lim_{n\to\infty}(t_n/_n) = \alpha. \tag{14}$$

Аналогично для $\alpha \in \mathbf{R}$ определим строго монотонно возрастающую, начиная с номера $n = 1$, нижнюю α-последовательность $\mathfrak{L}(\alpha)$.

Если в этих двух определениях убрать свойство (13), а вместо него считать что свойство (14) выполнено для всех $\alpha \in \mathbf{R}$, то такие α-последовательности будем называть проколотыми, соответственно, верхними и нижними и обозначать их, соответственно, через $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$ и $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$.

Положим

$$\sigma^{\hat{r}}(\alpha) = (\sigma^r_{0,d^r-1}(\alpha), u^r_{0,d^r}(\alpha), a^r_{0,d^r}(\alpha) + 1, 1, 2, 1, 2, \dots),$$
$$\sigma^{\hat{l}}(\alpha) = (\alpha - 1, 0, 2, 1, 2, 1, 2, \dots), \qquad \alpha \in \mathbf{Z},$$
$$\sigma^{\hat{l}}(\alpha) = (\sigma^l_{0,d^l-1}(\alpha), u^l_{0,d^l}(\alpha), a^l_{0,d^l}(\alpha) + 1, 1, 2, 1, 2, \dots), \qquad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}.$$

Теорема 1. *Для $\alpha \in \mathbf{R}$ существует единственная α-последовательность, соответственно, верхняя $\mathfrak{P}(\alpha)$, нижняя $\mathfrak{L}(\alpha)$, проколотая верхняя $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$ и проколотая нижняя $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$. При этом $\mathfrak{P}(\alpha)$, $\mathfrak{L}(\alpha)$, $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$ и $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$ равны, соответственно, последовательностям $\mathfrak{C}^r(\alpha)$, $\mathfrak{C}^l(\alpha)$, $\mathfrak{C}^{\hat{r}}(\alpha)$ и $\mathfrak{C}^{\hat{l}}(\alpha)$ и все их члены и только они являются наилучшими приближениями, соответственно, сверху, снизу, проколотыми сверху и проколотыми снизу первого рода вещественного числа α.*

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 15 из [1].

Теорема 2. *Последовательность $\mathfrak{C}$ всех подходящих и промежуточных дробей, не меньших α и расположенных в порядке убывания, при $\sigma \in (\Delta \cup M) \setminus (\Delta_\mathbf{O} \cup M_\mathbf{O})$ и $\sigma \in (\Delta \cup M) \setminus (\Delta_\mathbf{N} \cup M_\mathbf{N})$ совпадает, соответственно, с верхней α-последовательностью $\mathfrak{P}(\alpha)$ и проколотой $\hat{\mathfrak{P}}(\alpha)$, а последовательность таких дробей, не больших α и расположенных в порядке возрастания, совпадает (исключая c_{-1}), соответственно, с нижней α-последовательностью $\mathfrak{L}(\alpha)$ и проколотой $\hat{\mathfrak{L}}(\alpha)$.*

Утверждение теоремы следует из теоремы 1 и следующего замечания.

Замечание 1. Из неравенств $c_n < \alpha$ и $c_{n+1} < \alpha$ следует, что $c_n < c_{n+1} < \alpha$ и $u_{n+2} = 1$, а из неравенств $c_n > \alpha$ и $c_{n+1} > \alpha$ следует, что $\alpha < c_{n+1} < c_n$ и $u_{n+2} = 1$, и, наоборот, из равенства $u_{n+2} = 1$ следует, что либо $c_n < c_{n+1} < \alpha$, либо $\alpha < c_{n+1} < c_n$.

Из неравенств $c_n < \alpha < c_{n+1}$ следует равенство $u_{n+2} = 0$, а из неравенств $c_{n+1} < \alpha < c_n$ следует равенство $u_{n+2} = 0$, и, наоборот, из равенства $u_{n+2} = 0$ следует, что либо $c_n < \alpha < c_{n+1}$, либо $c_{n+1} < \alpha < c_n$. Промежуточные дроби $c_{n,i}$ при $i \in \mathbf{Z}[0, a_n]$ лежат по одну сторону от α и чем больше номер i, тем ближе к α, подходящая дробь c_{n-1} при этом лежит по другую сторону от α.

Обозначим через $\mathfrak{A}_\alpha$ множество всех элементов последовательностей $\mathfrak{P}(\alpha)$ и $\mathfrak{L}(\alpha)$ и будем называть его α-множеством. Соответствующим образом определим $\hat{\alpha}$-множество $\hat{\mathfrak{A}}_\alpha$.

Отметим, что полученные в данной работе результаты имеют прямую аналогию с представлением вещественных чисел в виде систематических дробей и, в частности, десятичных.

Теорема 2 показывает, что с позиции рассмотрения всего множества $\mathfrak{A}_\alpha$ подходящих и промежуточных дробей обобщенной цепной дроби конструкция z-представления вещественных чисел в виде обобщеных цепных дробей ничего нового не дает по сравнению с представлением вещественных чисел в виде цепных дробей по А. Я. Хинчину [1]. Тем не менее частный случай этой конструкции оказался полезным при исследовании новых по сравнению с [1] понятий односторонних наилучших приближений вещественного числа α (см., в частности [3, 4]).

3. Далее будем исследовать свойства элементов и индексов разложения числа α в обобщенную цепную дробь с минимальным остатком и их связь с элементами разложения числа α в обычную цепную дробь.

Предложение 15. *Для любого* $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} a_k^{\mathfrak{m}} &\geqslant 2, \ \textit{если}\ k \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{m}} + 1), \\ a_k^{\mathfrak{m}} &\geqslant 3, \ \textit{если}\ k \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{m}}), \ u_{k+1}^{\mathfrak{m}} = 1, \\ a_{d^{\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}} &\geqslant 3, \ \textit{если}\ d^{\mathfrak{m}} < \infty, \ u_{d^{\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}} = 1. \end{aligned}$$

Это утверждение следует из определения $\mathfrak{m}$-представления.

Оказывается, что предложение 15 обратимо в следующем смысле.

Предложение 16. *Пусть для* $\sigma = \sigma_{0,l} \in \Delta$, $l \in \mathbf{Z}[0, \infty]$

$$\begin{aligned} a_k &\geqslant 2, \ \textit{если}\ k \in \mathbf{Z}[1, l + 1), \\ a_k &\geqslant 3, \ \textit{если}\ k \in \mathbf{Z}[1, l), \quad u_{k+1} = 1, \\ a_l &\geqslant 3, \ \textit{если}\ l < \infty, \quad u_l = 1, \end{aligned}$$

тогда

$$\sigma = \sigma^{\mathfrak{m}}(c(\sigma)).$$

Доказательство предложения 16 аналогично доказательству теоремы 14 из [1]. Положим

$$u_0^z = u_{d^z+1}^z = 0, \quad d^z < \infty, \quad z \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}.$$

Предложение 17. *Для любого* $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} a^{\mathfrak{h}}_{k+|\bar{u}^{\mathfrak{m}}_k|} &= a^{\mathfrak{m}}_k - u^{\mathfrak{m}}_{k+1} - u^{\mathfrak{m}}_k, && k \in \mathbf{Z}[0, d^{\mathfrak{m}}+1),\\ u^{\mathfrak{m}}_k = 1 &\Rightarrow a^{\mathfrak{h}}_{k+|\bar{u}^{\mathfrak{m}}_{k-1}|} = 1, && k \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{m}}+1),\\ r^{\mathfrak{h}}_{k+|\bar{u}^{\mathfrak{m}}_k|} &= r^{\mathfrak{m}}_k - u^{\mathfrak{m}}_k, && k \in \mathbf{Z}[0, d^{\mathfrak{m}}+1),\\ d^{\mathfrak{h}} &= d^{\mathfrak{m}} + |\bar{u}^{\mathfrak{m}}_{d^{\mathfrak{m}}}|, && \alpha \in \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Доказательство несложно вывести из определений $\mathfrak{m}$- и $\mathfrak{h}$-представлений.

На основе предложения 17 легко построить алгоритм, в результате реализации которого из последовательности $\sigma^{\mathfrak{m}}$ получается последовательность $\sigma^{\mathfrak{h}}$. Фактически этот алгоритм в последовательности $\sigma^{\mathfrak{m}}$ для каждого индекса, равного единице, изменяет его значение на нулевое, уменьшает соседние элементы на единицу и вставляет между ними элемент, равный единице, с индексом равным нулю (здесь под элементом понимается элемент обобщенной цепной дроби, а соседними элементами называются те элементы, номера у которых отличаются на единицу).

Аналогично можно построить алгоритм получения из последовательности $\sigma^{\mathfrak{h}}$ последовательности $\sigma^{\mathfrak{m}}$. Фактически этот алгоритм в последовательности $\sigma^{\mathfrak{h}}$ производит последовательно по номерам (начиная с первого) поиск элемента, равного единице, вычеркивает его вместе с индексом, при этом увеличивая соседние элементы на единицу и изменяя значение верхнего индекса на единицу (здесь под верхним индексом понимается индекс с номером, на единицу большим исходного).

Непосредственным следствием предложения 17 является приводимое ниже предложение 18.

При $\alpha \in \mathbf{Q}$ и $m \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}}]$ пусть $s(m) \in \mathbf{Z}[0,\infty)$ и последовательности $\{i_j\}_{j\in\mathbf{Z}[1,s(m)]}$ и $\{n_j(m)\}_{j\in\mathbf{Z}[1,s(m)]}$ таковы, что $i_j \in \mathbf{N}$, $n_j(m) \in \mathbf{N}$ при $j \in \mathbf{Z}[1, s(m)]$; $i_{j-1} + n_{j-1}(m) - 1 < i_j$ при $j \in \mathbf{Z}[2, s(m)]$; $i_{s(m)} + n_{s(m)}(m) - 1 \leqslant m$; при $1 \leqslant r \leqslant m$ равенство $a^{\mathfrak{h}}_r = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда найдутся такие $j \in \mathbf{Z}[1, s(m)]$ и $k \in \mathbf{Z}[1, n_j(m)]$, что $r = i_j + k - 1$. Фактически, $n_j(m)$ равно количеству единиц в j-м по порядку наборе подряд идущих единиц в векторе $\bar{a}^{\mathfrak{h}}_m = (a^{\mathfrak{h}}_1, a^{\mathfrak{h}}_2, \ldots, a^{\mathfrak{h}}_m)$. Введем обозначения $s^{\mathfrak{h}} = s(d^{\mathfrak{h}})$, $n^{\mathfrak{h}}_j = n_j(d^{\mathfrak{h}})$.

Если $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ является решением уравнения второй степени с целыми коэффициентами, то, как показано в [1], последовательность $\bar{a}^{\mathfrak{h}}_\infty = (a^{\mathfrak{h}}_1, a^{\mathfrak{h}}_2, \ldots)$ является периодической, то есть существует такой номер $N^{\mathfrak{h}}$ и такое натуральное число $T^{\mathfrak{h}}$ (период), что для любого $m > N^{\mathfrak{h}}$ выполнено равенство $a^{\mathfrak{h}}_m = a^{\mathfrak{h}}_{m+T^{\mathfrak{h}}}$. Как следует из описания алгоритма, тогда последовательности

$$\bar{a}^{\mathfrak{m}}_\infty = (a^{\mathfrak{m}}_1, a^{\mathfrak{m}}_2, \ldots), \qquad \bar{u}^{\mathfrak{m}}_\infty = (u^{\mathfrak{m}}_1, u^{\mathfrak{m}}_2, \ldots)$$

являются периодическими, то есть существует такой номер $N^{\mathfrak{m}}$ и такое натуральное число $T^{\mathfrak{m}}$ (период), что для любого $n > N^{\mathfrak{m}}$ выполнены равенства

$$a^{\mathfrak{m}}_n = a^{\mathfrak{m}}_{n+T^{\mathfrak{m}}}, \qquad u^{\mathfrak{m}}_n = u^{\mathfrak{m}}_{n+T^{\mathfrak{m}}}.$$

Тогда аналогично случаю, когда α — рациональное число, можно определить параметр $n^{\mathfrak{h}}_j$, $j \in \mathbf{Z}[1, s^{\mathfrak{h}}]$, как количество единиц в j-м по порядку наборе подряд идущих единиц в векторе $\bar{a}^{\mathfrak{h}}_{m,m+T^{\mathfrak{h}}} = (a^{\mathfrak{h}}_m, a^{\mathfrak{h}}_{m+1}, \ldots, a^{\mathfrak{h}}_{m+T^{\mathfrak{h}}})$, где $m > N^{\mathfrak{h}}$ и $a^{\mathfrak{h}}_m \geqslant 2$. В вырожденном случае, когда $a^{\mathfrak{h}}_m = 1$ для любого $m > N^{\mathfrak{h}}$, очевидно, $T^{\mathfrak{h}} = T^{\mathfrak{m}} = 1$ и $a^{\mathfrak{m}}_n = 3$, $u^{\mathfrak{m}}_n = 1$ для любого $n > N^{\mathfrak{m}}$.

Для вектора $\bar{a}_{r,k} = (a_r, a_{r+1}, \dots, a_k) \in \mathbf{R}^{k-r+1}$ положим

$$|\bar{a}_{r,k}| = \sum_{j=r}^{k} a_j.$$

Предложение 18. *Если $\alpha \in \mathbf{Q}$, то*

$$d^{\mathfrak{h}} - d^{\mathfrak{m}} = |\bar{a}^{\mathfrak{m}}_{0,d^{\mathfrak{m}}}| - |\bar{a}^{\mathfrak{h}}_{0,d^{\mathfrak{h}}}| = |\bar{u}^{\mathfrak{m}}_{d^{\mathfrak{m}}}| = \sum_{j=1}^{s^{\mathfrak{h}}}]n^{\mathfrak{h}}_j/2[,$$

а если $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ является решением уравнения второй степени с целыми коэффициентами, то в случае, когда $a^{\mathfrak{h}}_m = 1$ для любого $m > N^{\mathfrak{h}}$, выполнены равенства $T^{\mathfrak{h}} = T^{\mathfrak{m}} = 1$ и $a^{\mathfrak{m}}_n = 3$, $u^{\mathfrak{m}}_n = 1$ для любого $n > N^{\mathfrak{m}}$, в противном случае

$$T^{\mathfrak{h}} - T^{\mathfrak{m}} = |\bar{a}^{\mathfrak{m}}_{n,n+T^{\mathfrak{m}}}| - |\bar{a}^{\mathfrak{h}}_{m,m+T^{\mathfrak{h}}}| = |\bar{u}^{\mathfrak{m}}_{n,n+T^{\mathfrak{m}}}| = \sum_{j=1}^{s^{\mathfrak{h}}}]n^{\mathfrak{h}}_j/2[.$$

Следствие 5. *Длина $\mathfrak{m}$-представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби не больше длины $\mathfrak{h}$-представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби и не меньше половины этой длины, то есть*

$$\frac{1}{2} d^{\mathfrak{h}} \leqslant d^{\mathfrak{m}} \leqslant d^{\mathfrak{h}}.$$

Следствие 6. *Период $\mathfrak{m}$-представления числа $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, являющегося решением уравнения второй степени с целыми коэффициентами, в виде обобщенной цепной дроби не больше периода $\mathfrak{h}$-представления числа α в виде обобщенной цепной дроби и не меньше половины этого периода, то есть*

$$\frac{1}{2} T^{\mathfrak{h}} \leqslant T^{\mathfrak{m}} \leqslant T^{\mathfrak{h}}.$$

Как было отмечено выше, первая часть утверждения следствия 5 была ранее доказана Кронекером в более общем случае (для всех z-представлений, $z \in \mathfrak{Z}$).

Нетрудно вывести из вышеприведенного алгоритма, что подходящие дроби $\mathfrak{m}$-представления и $\mathfrak{h}$-представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби тесно связаны друг с другом, что отражено в следующем утверждении.

Предложение 19. *Любая подходящая дробь $\mathfrak{m}$-представления является подходящей дробью $\mathfrak{h}$-представления.*

Оказывается, что расположение подходящих дробей произвольной обобщенной цепной дроби c при $\sigma \in \Delta \cup M$ (а, значит, и произвольного z-представления, $z \in \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{M} \cup \hat{\mathfrak{Z}} \cup \hat{\mathfrak{M}}$) тесно связано с расположением подходящих и промежуточных дробей $\mathfrak{h}$-представления вещественного числа α в виде обобщенной цепной дроби, что отражено в следующих утверждениях.

Предложение 20. *Пусть $\sigma = \sigma_{0,l} \in \Delta \setminus \Delta_{\mathbf{O}}$ и $c(\sigma) = \alpha$. Тогда, если $\alpha \in \mathbf{Z}$. то длина σ равна $l = 0$ и $c_0 = \alpha$, если $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, то для любого $k \in \mathbf{Z}[0, l+1)$ найдется такое $m \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}} + 1)$ и такое $j \in \mathbf{Z}[0, a^{\mathfrak{h}}_m]$, что $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{m,j}$, при этом,* *если* $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{n,i}$ *при* $n \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}} + 1)$, $i \in \mathbf{Z}[0, a^{\mathfrak{h}}_n - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, l)$, *то, во-первых, найдется такое* σ, *что выполнено условце, по которому либо* $u_{k+2} = 1$, *либо* $\sigma = \sigma_{0,k+1}$ *(при* $n = d^{\mathfrak{h}}$, $i = a^{\mathfrak{h}}_n - 1$*), и это условие эквивалентно выполнению равенства* $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n,i+1}$, *и, во-вторых, найдется такое* σ, *что выполнено условие, по которому* $u_{k+2} = 0$ *(исключая случай* $n = d^{\mathfrak{h}}$, $i = a^{\mathfrak{h}}_n - 1$*), и это условие эквивалентно выполнению равенства* $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n-1}$ *(исключая случай* $n = d^{\mathfrak{h}}$, $i = a^{\mathfrak{h}}_n - 1$*), и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;*

если $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}-1}$, *то* $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}} = \alpha$;

если длина σ *конечна и равна* l, *то либо* $c_{l-1} = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}-1}$, *либо* $c_{l-1} = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}},a^{\mathfrak{h}}-1}$, *и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть.*

Доказательство заключается в многократном применении теоремы 2 и замечания 1 данной работы и леммы из [1].

Аналогично доказываются подобные утверждения для множеств $\Delta_{\mathbf{O}}$, $M \setminus M_{\mathbf{O}}$ и $M_{\mathbf{O}}$.

При $\alpha \in \mathbf{R}$ положим

$$\sigma^{\hat{\mathfrak{h}}+}(\alpha) = (\sigma^{\mathfrak{h}}_{0,d^{\mathfrak{h}}(\alpha)-1}(\alpha), u^{\mathfrak{h}}_{0,d^{\mathfrak{h}}(\alpha)}(\alpha), a^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}(\alpha)}(\alpha) + 1, 1, 2, 1, 2, \dots),$$
$$\sigma^{\hat{\mathfrak{h}}-}(\alpha) = (\sigma^{\mathfrak{h}}_{0,d^{\mathfrak{h}}(\alpha)-1}(\alpha), u^{\mathfrak{h}}_{0,d^{\mathfrak{h}}(\alpha)}(\alpha), a^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}(\alpha)}(\alpha) - 1, 0, 2, 1, 2, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что $\hat{\mathfrak{h}}+, \hat{\mathfrak{h}}- \in \hat{Z}$ и

$$c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_{n,i} = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_{n,i} = c^{\mathfrak{h}}_{n,i}, \quad n \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}} + 1), \quad i \in \mathbf{Z}[0, a^{\mathfrak{h}}_n - 1], \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z},$$
$$c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_{d^{\mathfrak{h}}+i-1} = \frac{ia + (i+1)c}{ib + (i+1)d}, \quad c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_{d^{\mathfrak{h}}+i} = \frac{(i+1)a + ic}{(i+1)b + id}, \quad i \in \mathbf{Z}[0, \infty),$$

где $a/b = \alpha - 1$ при $\alpha \in \mathbf{Z}$ и $a/b = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}},a^{\mathfrak{h}}-1}$ при $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $c/d = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}-1}$.

Предложение 21. *Пусть* $\sigma = \sigma_{0,\infty} \in \Delta_{\mathbf{O}}$, $c(\sigma) = \alpha$ *и* $\alpha \in \mathbf{Q}$. *Тогда, если* $\alpha \in \mathbf{Z}$, *то либо* $\sigma = \sigma^{\hat{\mathfrak{h}}+}(\alpha)$ *и* $\mathfrak{C}(\sigma) = \mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{h}}+}(\alpha)$, *либо* $\sigma = \sigma^{\hat{\mathfrak{h}}-}(\alpha)$ *и* $\mathfrak{C}(\sigma) = \mathfrak{C}^{\hat{\mathfrak{h}}-}(\alpha)$, *а если* $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, *то для любого* $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$ *либо найдется такое* $m \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}} + 1)$ *и такое* $j \in \mathbf{Z}[0, a^{\mathfrak{h}}_m - 1]$, *что* $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{m,j}$, *либо найдется такое* $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}}, \infty)$, *что либо* $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_s$, *либо* $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_s$,

при этом, если $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{n,i}$ *при* $n \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}}+1)$, $i \in \mathbf{Z}[0, a^{\mathfrak{h}}_n - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, *исключая случай* $n = d^{\mathfrak{h}}$, $i = a^{\mathfrak{h}}_n - 1$, *то, во-первых, найдется такое* σ, *что выполнено условие, по которому* $u_{k+2} = 1$, *и это условие эквивалентно выполнению равенства* $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n,i+1}$, *и, во-вторых, найдется такое* σ, *что выполнено условие, по которому* $u_{k+2} = 0$, *и это условие эквивалентно выполнению равенства* $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n-1}$, *и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;*

если $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}-1}$ *или* $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}},a^{\mathfrak{h}}-1}$, *то либо* $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_{d^{\mathfrak{h}}}$, *либо* $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_{d^{\mathfrak{h}}+1}$, *либо, если* $c_{k-1} \neq c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}},a^{\mathfrak{h}}-1}$ *или* $c_{k-1} \neq c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}-1}$, *то соответственно* $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}},a^{\mathfrak{h}}-1}$ *или* $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{d^{\mathfrak{h}}-1}$;

если $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_s$ *при* $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}}, \infty)$, *либо* $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_s$ *при* $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}} + 1, \infty)$, *то соответственно* $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_{s+1}$, *либо* $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_{s+1}$.

Предложение 22. *Пусть $\sigma = \sigma_{0,l} \in M \setminus M_{\mathbf{O}}$ и $c(\sigma) = \alpha$. Тогда, если $\alpha \in \mathbf{Z}$, то длина σ равна $l = 0$ и $c_0 = \alpha$, если $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, то для любого $k \in \mathbf{Z}[0, l+1)$ найдется такое $m \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}}]$ и такое $j \in \mathbf{Z}[0, a^{\mathfrak{h}}_m]$, что $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{m,j}$,*

при этом, если $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{n,i}$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}} + 1)$, $i \in \mathbf{Z}[1, a^{\mathfrak{h}}_n - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, l)$, то $u_{k+2} = 1$ (при $n = d^{\mathfrak{h}}$ и $i = a^{\mathfrak{h}}_n - 1$ это условие отсутствует) и $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n,i+1}$;

если $c_k = c^{\mathfrak{h}}_n$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}})$, $k \in \mathbf{Z}[0, l)$, то, во-первых, для каждого i из $\mathbf{Z}[1, a^{\mathfrak{h}}_{n+1}]$ найдется такое σ, что $u_{k+2} = 0$ и $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n+1,i}$ (при $n = d^{\mathfrak{h}} - 1$ и $i = a^{\mathfrak{h}}_{n+1}$ условие $u_{k+2} = 0$ отсутствует), и, во-вторых, при $n < d^{\mathfrak{h}} - 1$ найдется такое σ, что $u_{k+2} = 1$ и $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n+2,1}$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_0 = c^{\mathfrak{h}}_0$, то, во-первых, для каждого $i \in \mathbf{Z}[2, a^{\mathfrak{h}}_1]$ найдется такое σ, что $u_2 = 0$ и $c_1 = c^{\mathfrak{h}}_{1,i}$ (при $d^{\mathfrak{h}} = 1$ и $i = a^{\mathfrak{h}}_1$ условие $u_2 = 0$ отсутствует), и, во-вторых, при $d^{\mathfrak{h}} > 1$ найдется такое σ, что $u_2 = 1$ и $c_1 = c^{\mathfrak{h}}_{2,1}$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

либо $c_0 = c^{\mathfrak{h}}_0$, либо $c_0 = c^{\mathfrak{h}}_0 + 1$ и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть.

Предложение 23. *Пусть $\sigma = \sigma_{0,\infty} \in M_{\mathbf{O}}$, $c(\sigma) = \alpha$ и $\alpha \in \mathbf{Q}$. Тогда для любого $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$ либо найдется такое $m \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}} + 1)$ и такое $j \in \mathbf{Z}[0, a^{\mathfrak{h}}_m - 1]$, что $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{m,j}$, либо найдется такое $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}}, \infty)$, что либо $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_s$, либо $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_s$,*

при этом, если $\alpha \in \mathbf{Z}$, то пара (c_0, c_1) может принимать любое значение из множества

$$\{(\alpha - 1, \alpha - 1/2), (\alpha - 1, \alpha - 1/2)\} \cup \left\{ \left(\alpha, \frac{(-1)^u}{z} \right) \right\}_{u \in \mathbf{F}, z \in \mathbf{Z}[2,\infty)};$$

если $c_k = c^{\mathfrak{h}}_{n,i}$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}} + 1)$, $i \in \mathbf{Z}[1, a^{\mathfrak{h}}_n - 1]$, $k \in \mathbf{Z}[0, \infty)$, $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то $u_{k+2} = 1$ (при $n = d^{\mathfrak{h}}$ и $i = a^{\mathfrak{h}}_n - 1$ найдется как такое σ, что $u_{k+2} = 1$, так и такое σ, что $u_{k+2} = 0$) и $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n,i+1}$;

если $c_k = c^{\mathfrak{h}}_n$ при $n \in \mathbf{Z}[1, d^{\mathfrak{h}})$, $k \in \mathbf{Z}[0, l)$, $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то, во-первых, для каждого $i \in \mathbf{Z}[1, a^{\mathfrak{h}}_{n+1}]$ найдется такое σ, что $u_{k+2} = 0$ и $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n+1,i}$ (при $n = d^{\mathfrak{h}} - 1$ и $i = a^{\mathfrak{h}}_{n+1}$ найдется как такое σ, что $u_{k+2} = 1$, так и такое σ, что $u_{k+2} = 0$), и, во-вторых, при $n < d^{\mathfrak{h}} - 1$ найдется такое σ, что $u_{k+2} = 1$ и $c_{k+1} = c^{\mathfrak{h}}_{n+2,1}$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_0 = c^{\mathfrak{h}}_0$, $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то, во-первых, для каждого $i \in \mathbf{Z}[2, a^{\mathfrak{h}}_1]$ найдется такое σ, что $u_2 = 0$ и $c_1 = c^{\mathfrak{h}}_{1,i}$ (при $d^{\mathfrak{h}} = 1$ и $i = a^{\mathfrak{h}}_1$ найдется как такое σ, что $u_2 = 1$, так и такое σ, что $u_2 = 0$), и, во-вторых, при $d^{\mathfrak{h}} > 1$ найдется такое σ, что $u_2 = 1$ и $c_1 = c^{\mathfrak{h}}_{2,1}$, и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_k = \alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, то, во-первых, для каждого $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}}, \infty)$ найдется такое σ, что $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_s$, и, во-вторых, для каждого $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}} + 1, \infty)$ найдется такое σ, что $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_s$;

при $\alpha \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ либо $c_0 = c^{\mathfrak{h}}_0$, либо $c_0 = c^{\mathfrak{h}}_0 + 1$ и других возможностей, кроме двух перечисленных выше, не может быть;

если $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_s$ при $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}}, \infty)$, либо $c_k = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_s$ при $s \in \mathbf{Z}[d^{\mathfrak{h}} + 1, \infty)$, то соответственно $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}+}_{s+1}$, либо $c_{k+1} = c^{\hat{\mathfrak{h}}-}_{s+1}$.

Список литературы

1. Хинчин А. Я. *Цепные дроби.* Наука, Москва, 1978.
2. Perron O. *Die Lehre von der Kettenbrüchen*, V. 1. Taubner, Berlin, 1954.
3. Финкельштейн Ю. Ю. Односторонние наилучшие приближения и их геометрическая интерпретация. *Экономика и матем. методы* (1992) **28**, №1, 130–136.
4. Финкельштейн Ю. Ю. Полигоны Клейна и приведенные регулярные непрерывные дроби. *Успехи матем. наук* (1933) **48**, №3, 205–206.
5. Zurl E. Theorie der reduziert-regelmäßigen Kettenbrüche. *Math. Annalen* (1934) **110**, №5.

Статья поступила 18.07.1996.
Переработанный вариант поступил 28.04.1998.