



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. M. Vershik, V. Ya. Gershkovich, Geodesic flow on $SL_2\mathbb{R}$ with non-holonomic constraints, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1986, Volume 155, 7–17

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

January 22, 2025, 13:38:30



ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК НА $SL(2, \mathbb{R})$ С НЕГОЛОНОМНЫМИ
ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1. Введение. В этой работе изучается поведение геодезических на группе $SL(2, \mathbb{R})$, снабженной левоинвариантной метрикой, при наличии левоинвариантной неинтегрируемой (неголономной) связи. Общая теория таких потоков строится в [1,7]. Имеется в виду поток в а р и а ц и о н н ы х геодезических, т.е. кратчайших. В неголономном случае его нужно отличать от потока "п р я м е й ш и х" - геодезических в смысле усеченной связности [7]. Последний поток определяет динамическую систему в подрасслоении и является математическим эквивалентом механической системы с линейными связями. Первый же поток определен в так называемом смешанном распределении; он фактически не изучался с позиций теории динамических систем. Рассматриваемый ниже пример интересен еще и потому, что в нем гиперболичность, знакомая по обычному геодезическому потоку на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, появляется несколько иначе, хотя причина в обоих случаях связана со структурой $SL(2, \mathbb{R})$ (см.п.10).

2. Кратчайшие и уравнение Эйлера - Лагранжа. Пусть на группе $SL(2, \mathbb{R})$ задана левоинвариантная риманова метрика ρ и двумерное неголономное левоинвариантное распределение V . Левоинвариантное распределение на группе Ли G задается линейным подпространством \mathfrak{v} в ее алгебре Ли \mathfrak{g} и получается разнесением подпространства \mathfrak{v} с помощью левых сдвигов; неголономность означает, что наименьшая алгебра Ли, содержащая \mathfrak{v} , совпадает с \mathfrak{g} , в случае трехмерной группы Ли и двумерного распределения это просто означает, что $\mathfrak{g} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] + \mathfrak{v}$.

Кривая $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow G$ называется допустимой (относительно распределения V) если $\dot{\gamma} \in V$. Для любых двух точек $x, y \in G$ существует соединяющая их кратчайшая кривая γ , допустимая относительно неголономного распределения V (см. [1,2,7]). Кривая γ есть решение условной вариационной задачи на $SL(2, \mathbb{R})$, лагранжианом которой служит функционал длины:
 $x, y \in SL(2, \mathbb{R}); \quad i$

$$\inf_{\gamma \in S} \int_0^1 \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt, \quad S = \{ \gamma \mid \dot{\gamma} \in V, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}. \quad (I)$$

Легко видеть, что экстремали этой условной задачи, т.е.

кратчайшие удовлетворяют следующему уравнению Эйлера - Лагранжа

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \lambda \omega + \lambda (\dot{\gamma} \lrcorner d\omega), \quad (2)$$

где ∇ ковариантная производная метрической связности на $SL(2, \mathbb{R})$, λ - множитель Лагранжа, ω - I-форма, аннулирующая распределение V ; $(\dot{\gamma} \lrcorner d\omega)$ - I-форма, значение которой на векторном поле ξ определяется формулой $(\dot{\gamma} \lrcorner d\omega)\xi = d\omega(\dot{\gamma}, \xi)$. Здесь и далее мы отождествляем векторные поля и 1-формы с помощью метрического тензора.

Заметим, что уравнение (2) является дифференциальным по λ , поэтому начальными данными негеолономной геодезической, выходящей из точки x , являются:

- 1) начальная скорость $v \in V_x$
- 2) начальное значение множителя Лагранжа λ , т.е. 1-форма из V_x^{\perp} - аннулятора V_x .

3. Уравнения Эйлера - Лагранжа в ортогональном репере.

Уравнения негеолономных геодезических на группе Ли удобно записывать в базисе ортонормированных векторных полей. Пусть ξ_1, ξ_2 базис ортонормированных векторных полей распределения V . Поскольку распределение V негеоломно, $[\xi_1, \xi_2] \notin V$. Заметим, что решение условной вариационной задачи зависит лишь от ограничения метрического тензора на распределение. Заменяя тензор g на \tilde{g} -такой, что $g|_V = \tilde{g}|_V$, мы можем считать, что $[\xi_1, \xi_2] \perp V$. Отождествим ω с $[\xi_1, \xi_2] \equiv \xi_3$.

Поскольку $\dot{\gamma} \in V$, имеем $\dot{\gamma} = v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2$; подставим выражение для $\dot{\gamma}$ в (2) и спроектируем векторное уравнение (2) на каждое из трех ортогональных направлений ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Получаем

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -\lambda v_2 + v_1 v_2 \langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_1 \rangle \\ \dot{v}_2 = \lambda v_1 + v_1 v_2 \langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_2 \rangle \\ \dot{\lambda} = \lambda \langle [\dot{\gamma}, \xi_3], \xi_3 \rangle + v_1^2 \langle \nabla_{\xi_1} \xi_1, \xi_3 \rangle + \\ + v_2^2 \langle \nabla_{\xi_2} \xi_2, \xi_3 \rangle + v_1 v_2 \langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_3 \rangle. \end{cases} \quad (3)$$

Замечание. Мы воспользовались формулой Маурера - Картана [4].

$$(\dot{\gamma} \lrcorner d\omega)(\xi) \equiv d\omega(\dot{\gamma}, \xi) = \omega([\dot{\gamma}, \xi]) - \dot{\gamma} \omega(\xi) + \xi \omega(\dot{\gamma});$$

поскольку 1-форма ω и векторные поля $\dot{\gamma}$, ξ - левинвариантны, $\omega(\dot{\gamma}) = \text{const}$, $\omega(\xi) = \text{const}$, и $\dot{\gamma}\omega(\xi) = \xi\omega(\dot{\gamma}) = 0$.

4. Неголономный геодезический поток. Редукция.

Дифференциальное уравнение

$$\dot{\gamma} = v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 \quad (4)$$

вместе с системой (3) определяет неголономный геодезический (НГ) поток в расслоении над $SL(2, \mathbb{R})$, слоем которого над каждой точкой $x \in SL(2, \mathbb{R})$ будет прямая сумма $V \oplus V^\perp$ распределения V и его аннулятора V^\perp в пространстве 1-форм (см. п.3; общий случай и более подробное изложение см. в [1,7]). Расслоение $V \oplus V^\perp$ мы будем называть смешанным расслоением и обозначать Ken_V ("кентавр"). Смешанное расслоение над группой Ли параллелизуемо

$$\text{Ken}_V SL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) \times (v \oplus v^\perp).$$

Поскольку уравнения системы (3) имеют постоянные коэффициенты, они определяют поток на $v \oplus v^\perp$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (редукция для НГ-потоков). НГ - поток как динамическая система на $SL(2, \mathbb{R}) \times v \oplus v^\perp$ - есть косое произведение; поток на базе $v \oplus v^\perp$ определен системой (3); типовой слой есть $SL(2, \mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение о редукции непосредственно переносится на НГ - поток на однородном пространстве $SL(2, \mathbb{R})$, то есть факторгруппе $SL(2, \mathbb{R})$ по дискретной подгруппе \mathcal{A} . Базой НГ - потока на однородном пространстве по-прежнему будет $v \oplus v^\perp$, слоем $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$. Поток на базе рассмотрен в п.7.

5. Интеграл энергии. Начиная с этого места, будем использовать интеграл энергии, т.е. условие $|\dot{\gamma}| = \text{const}$, или $v_1^2 + v_2^2 = \text{const}$. Это условие выделяет инвариантное подмногообразие

$SL(2, \mathbb{R}) \times (S^1 \oplus v^\perp)$ в смешанном расслоении. Уравнения неголономных геодезических при этом существенно упрощаются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для неголономной геодезической γ , удовлетворяющей условию $|\dot{\gamma}| = 1$, выполнены следующие соотношения

$$\langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_2 \rangle = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим первое уравнение системы (3) на v_1 ,

второе на V_2 и сложим. Получаем

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_1^2 + V_2^2}{2} \right) = V_1 V_2 \langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, V_1 \xi_1 \rangle + \\ + V_1 V_2 \langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, V_2 \xi_2 \rangle = V_1 V_2 \langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \dot{\gamma} \rangle .$$

Таким образом, постоянный вектор $\Psi = \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1$ ортогонален $\dot{\gamma}(t)$ для любой негеодезической геодезической γ , откуда $\Psi \perp V$.

Система дифференциальных уравнений (3) приобретает следующий вид

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -\lambda V_2 \\ \dot{V}_2 = \lambda V_1 \\ \dot{\lambda} = \lambda (V_1 c_{13}^3 + V_2 c_{23}^3) - (V_1^2 c_{13}^3 + V_2^2 c_{23}^3) + V_1 V_2 (c_{13}^2 + c_{23}^2), \end{cases} \quad (5)$$

где $c_{ij}^k = ([\xi_i, \xi_j], \xi_k)$ — структурные константы; мы воспользовались здесь предложением 2 и выражением символов Кристоффеля $\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{\xi_j} \xi_i, \xi_k \rangle$ через структурные константы (см. [5]).

Поскольку $V_1^2 + V_2^2 = 1$, положим $V_1 = \cos \varphi(t)$, $V_2 = \sin \varphi(t)$, $\varphi(t) \in S^1$, мы получим систему дифференциальных уравнений на цилиндре $S^1 \otimes V^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}^1$, определяющих негеодезические геодезические

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \lambda \\ \dot{\lambda} = \lambda (c_{13}^3 \cos \varphi + c_{23}^3 \sin \varphi) - (c_{13}^1 \cos^2 \varphi + c_{23}^2 \sin^2 \varphi) + \\ + \frac{1}{2} (c_{13}^2 + c_{23}^2) \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (6)$$

6. Левоинвариантные негеодезические распределения на $SL(2, \mathbb{R})$ и метрические тензоры на них. Структурные константы, входящие в последнее уравнение системы (6), определяются негеодезическим распределением V и метрическим тензором на V ; в этом пункте мы дадим их классификацию. Динамическую систему, порожденную НГ-потокком на $SL(2, \mathbb{R})$ с ограничением V и метрическим тензором g , обозначим $T(V, g)$. Пусть $\mu \in \text{Aut } sl(2, \mathbb{R})$ — группа автоморфизмов алгебры Ли $sl(2, \mathbb{R})$; тогда $\mu T(V, g) =$

$= T(\mu V, \mu g)$, поэтому мы будем изучать орбиты распределений и метрических тензоров на них относительно действия группы автоморфизмов $sl(2, \mathbb{R})$. В алгебре Ли $sl(2, \mathbb{R})$ - алгебре (2×2) -матриц с нулевым следом имеется естественный линейный базис:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Множество неголономных левоинвариантных двумерных распределений на $SL(2, \mathbb{R})$ - есть объединение двух орбит относительно действия группы $Aut\ sl(2, \mathbb{R})$. Представителями орбит являются распределения $v_1 = Lin(\eta_1 + \eta_2, \eta_1 - \eta_2)$ и $v_2 = Lin(\eta_3, \eta_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что всякое распределение

$$v = Lin(a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 + a_3 \eta_3, b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 + b_3 \eta_3),$$

либо переводится автоморфизмом $sl(2, \mathbb{R})$ в одно из распределений v_1 или v_2 , либо интегрируемо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пространство орбит левоинвариантных метрических тензоров относительно группы автоморфизмов $sl_2 \mathbb{R}$ для каждого из двух (классов) распределений изоморфно \mathbb{R}_+ . (Представителем класса $m \in \mathbb{R}_+$ является метрический тензор, заданный матрицей $g_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ в базисе распределений, указанном в предложении 3).

7. Движение на базе косоугольного произведения. Предложения 3 и 4 дают возможность вычислить структурные константы, входящие в последнее уравнение системы (6). Получаем

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \lambda \\ \dot{\lambda} = f(m) \sin 2\varphi, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$f(m) = \begin{cases} 2 - 2m^{-1} & \text{для распределения } V_1 \\ 2 + 2m & \text{для распределения } V_2 \end{cases}$$

m - параметр метрического тензора.

Опишем фазовый портрет системы (7) на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}^1$. Выделим "особый" случай $m = 1$ для распределения V_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В неособом случае (7) есть уравнения маятника. Фазовый портрет системы (7) на цилиндре описывается следую-

щим образом.

1) Имеются четыре неподвижные точки x_i , $i = 0, 1, 2, 3$,

$$x_i = (\varphi_i, 0), \quad \varphi_i = \frac{2\pi i}{4}.$$

2а. Для распределения V_2 , а также для распределения V_4 при $m > 1$, точки x_1 и x_3 соединены четырьмя сепаратрисами.

2в. Для распределения V_1 при $m < 1$ четырьмя сепаратрисами соединены точки x_0 и x_2 .

3. Все траектории, отличные от неподвижных точек и сепаратрис, являются периодическими.

Периодические траектории образуют четыре семейства траекторий, непрерывно зависящих от параметра: τ :

(1-2) α_τ^+ (α_τ^-) - траектории в верхней (нижней) части цилиндра

(3-4) β_τ^+ (β_τ^-) - траектории обходящие неподвижную точку x_0 (x_2) для распределения V_1 и $m > 1$; И неподвижную точку x_1 (x_3) - в остальных случаях.

В качестве параметра τ можно взять значение множителя Лагранжа на прямой $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}$ для распределения V_1 и $m > 1$ и $\varphi \equiv 0$ - в остальных случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. В особом случае ($v_1, m=1$) портрет системы (7) описывается следующим образом $V_1, m=1$

1) Все точки окружности, заданной условием $\lambda = 0$, являются неподвижными.

2) Все остальные траектории системы (7) замкнуты.

В особом случае замкнутые траектории образуют два семейства: α_τ^+ и α_τ^- .

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко указать зависимость периода T_τ траектории α_τ от параметра τ . Пусть значение параметра τ_0 соответствует сепаратрисе. Тогда

$$1) T_\tau \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \tau_0.$$

$$2) T_\tau \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \pm \infty, \quad \text{более точно,} \quad T_\tau \sim \frac{1}{|\tau|}.$$

$$3) T_\tau \rightarrow \sqrt{2|f(m)|} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0.$$

8. Инвариантные компоненты. Отображение монодромии. Результаты предыдущего пункта показывают, что множества уровня интеграла энергии - $S^1 \times \mathbb{R} \times (S^1 \times \mathbb{R}^2)$ разбиваются в объединение трехмерных и четырехмерных инвариантных множеств. Перечислим их:

- 1-2) $\alpha_{\tau}^{\pm} \times SL(2, \mathbb{R})$
 3-4) $\beta_{\tau}^{\pm} \times SL(2, \mathbb{R})$
 5) $h_i \times SL(2, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3, 4$ (h_i - сепаратрисы системы (7);
 6) $x_i \times SL(2, \mathbb{R})$, $i = 0, 1, 2, 3$; $\{x_i\}$ - набор

неподвижных точек системы (7). Наша задача теперь - описать движение в слое косоуго произведения, т.е. на группе $SL(2, \mathbb{R})$. Начнем со случая движения над периодической траекторией на базе. Пусть $x(\cdot)$ одна из периодических траекторий на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}^1$, τ ее период. Движение в слое - на группе $SL(2, \mathbb{R})$ задается уравнением

$$y^{-1} \dot{y} = x(\dot{t}) \quad (8)$$

(см.п.4). Теорема Флоке ([8]) показывает, что отображение сдвига вдоль траекторий дифференциального уравнения (8) за время, равное периоду τ траектории $x(\cdot)$, не зависит от выбора начального момента времени, иначе говоря, для любых двух неголомонных геодезических γ_1 и γ_2 , выходящих из точки $x \in SL(2, \mathbb{R})$, таких, что их начальные данные (φ_1, λ_1) и (φ_2, λ_2) лежат на одном и том же периодическом решении системы (7) на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}^1$, справедливо равенство $\gamma_1(\tau) = \gamma_2(\tau)$. Отображение $\Gamma: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, сопоставляющее точке x точку $\gamma(\tau)$, где $\gamma(\cdot)$ неголомонная геодезическая, выходящая из точки x с начальными данными, лежащими на периодической траектории x , назовем отображением монодромии. Отображение монодромии есть правый сдвиг на $SL(2, \mathbb{R})$, $\Gamma = R_{g_x}$, $g_x \in SL(2, \mathbb{R})$. Обозначим через x_{τ}^{\pm} элемент $g_{\alpha_{\tau}^{\pm}}$, через y_{τ}^{\pm} элемент $g_{\beta_{\tau}^{\pm}}$. Отображение монодромии, таким образом, позволяет описать динамику в слое. При обходе окружности α_{τ}^{\pm} (или β_{τ}^{\pm}) точка слоя $x \in SL(2, \mathbb{R})$ умножается справа на x_{τ}^{\pm} (или y_{τ}^{\pm}). Для более полного описания динамики нам потребуется информация об элементах x_{τ} и y_{τ} .

9. Подмногообразие монодромии. Множество точек $M = \{x_{\tau}\} \cup \{y_{\tau}\}$ - одномерное подмногообразие (с особенностями) в $SL(2, \mathbb{R})$, которое мы будем называть подмногообразием монодромии. Опишем его. Напомним, что элемент g алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ называется

- 1) гиперболическим, если q имеет вещественные собственные числа разных знаков,
- 2) параболическим, если q имеет нулевые собственные числа,
- 3) эллиптическим, если собственные числа q - комплексные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть на $SL(2, \mathbb{R})$ задано распределение V_1 и левоинвариантная метрика, определенная тензором $g_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ с $m \neq 1$. Тогда подмножеством монодромии \mathcal{M} есть объединение трех непересекающихся компонент

- 1) $\{x_\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}^1}$ - однопараметрическая подгруппа в $SL(2, \mathbb{R})$ с гиперболическим генератором η_3 (гомеоморфная \mathbb{R}).
- 2) $\{y_\tau^+\}$ - луч на однопараметрической подгруппе с параболическим генератором $\xi = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$ или $\xi = \frac{\eta_1 - \eta_2}{2}$, $y_\tau^+ \in \{\exp t \xi, t > T_0\}$ - параболический.
- 3) $\{y_\tau^-\}$ - луч на той же однопараметрической подгруппе, $y_\tau^- \in \{\exp t \xi, t < -T_0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть на $SL(2, \mathbb{R})$ задано распределение V_1 и левоинвариантная метрика с тензором $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда \mathcal{M} есть однопараметрическая подгруппа в $SL(2, \mathbb{R})$ с гиперболическим генератором.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть на $SL(2, \mathbb{R})$ задано распределение V_2 и произвольная левоинвариантная метрика. Тогда подмножеством монодромии \mathcal{M} есть несвязное объединение трех компонент

- 1) - однопараметрической подгруппы $\{x_\tau\} \in SL(2, \mathbb{R})$ с эллиптическим генератором $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (гомеоморфной окружности).
- 2) $\{y_\tau^+\}$ на однопараметрической подгруппе с генератором η_3 , $y_\tau^+ \in \{\exp t \eta_3, t > T_0\}$
- 3) $\{y_\tau^-\}$ на той же однопараметрической подгруппе $y_\tau^- \in \{\exp t \eta_3, t < -T_0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображение монодромии дает возможность сразу получить описание HF -потока на односвязной накрывающей $SL(2, \mathbb{R})$ - группе Ли - $SL(2, \mathbb{R})$, гомеоморфной \mathbb{R}^3 . HF -поток в этом случае с динамической точки зрения устроен тривиально: на базе обхода окружности, на слое каждый обход окружности - правый сдвиг

на элемент $h \in \widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ и, таким образом, все "траектории" уходят на бесконечность. Интерес, как обычно, представляет динамика на компактных однородных пространствах, к описанию которой мы переходим.

10. Связь НГ-потока на $SL(2, \mathbb{R})$ с потоками на плоскости Лобачевского. Пусть \mathcal{A} дискретная подгруппа $SL(2, \mathbb{R})$ такая, что $X = SL(2, \mathbb{R}) / \mathcal{A}$ — компактно. Мы опишем НГ-поток Γ на X . Как сказано выше (п.8), фазовое пространство НГ-потока распадается на четырехмерные и трехмерные инвариантные множества:

$$(I-2) \quad X \times \alpha_{\tau}^{\pm}$$

$$(3-4) \quad X \times \beta_{\tau}^{\pm}$$

$$(5) \quad X \times h_i$$

$$(6) \quad X \times x_i$$

Определим на $(X \times \alpha_{\tau}^{\pm})$, $(X \times \beta_{\tau}^{\pm})$ меру $\mu = \chi \times \frac{d\varphi}{\lambda}$, где χ — мера Хаара на $SL(2, \mathbb{R})$, $d\varphi$ — равномерная мера на окружности S^1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Мера μ инвариантна относительно НГ-потока Γ на каждой из компонент $(X \times \alpha_{\tau}^{\pm})$ и $(X \times \beta_{\tau}^{\pm})$.

Поток Γ на четырехмерной компоненте $(X \times \alpha_{\tau}^{\pm})$, $(X \times \beta_{\tau}^{\pm})$ тесно связан с классическими потоками на плоскости Лобачевского. Напомним (см. [6]), что динамическая система Φ на $SL(2, \mathbb{R})$, порожденная сдвигом вдоль однопараметрической подгруппы с генератором $u \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$\Phi_u^t(x) = x \exp t u$$

естественно изоморфна с

- а) геодезическим потоком на плоскости Лобачевского, если u — гиперболический,
- б) орициклическим потоком на плоскости Лобачевского, если u — параболический.

Если u эллиптический, то поток, определенный Φ^t — циклический. Связь НГ-потока Γ с описанным выше потоком Φ основана на наличии у них общего каскада. Действительно, пусть T_{τ} период траектории α_{τ} (обозначим его $\tilde{t} = T_{\tau}$) и пусть x_{τ} соответствующий элемент подмножества монодромии. Тогда

$$T_{\tilde{t}} \Big|_{X \times \alpha_{\tau}} = \Phi_{\log x_{\tau}}^1$$

Таким образом, потоки Γ и $\Phi_{\log x_{\tau}}$ имеют общий каскад. Свойства потока Φ описываются следующей классической теоремой [6].

ТЕОРЕМА. I. Геодезический поток на плоскости Лобачевского эргодичен и является K -системой.

2. Орициклический поток эргодичен.

Мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть \mathcal{A} компактная подгруппа $SL(2, \mathbb{R})$, $\chi = SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$, $\alpha_\tau^\pm, \beta_\tau^\pm$ - решение системы (7) на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}^1$, x_τ, y_τ - соответствующий элемент подмногообразия монодромии. Тогда

1) Если $\log x_\tau, \log y_\tau$ гиперболически, то поток T эргодичен на $X \times \alpha_\tau, X \times \beta_\tau$.

2) Если $\log x_\tau$ параболически, то поток T эргодичен на $X \times \beta_\tau$.

3) Если $\log x_\tau$ эллиптически, то $X \times \alpha_\tau, X \times \beta_\tau$ распадается в объединение двумерных и одномерных инвариантных торов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1-2) Покажем, что из эргодичности каскада $\{T^{n\hat{t}}\} = \{\Phi_{\log x_\tau}^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $T^{n\hat{t}}: SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$ следует эргодич-

ность потока $T^{\hat{t}}$ на $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A} \times \alpha_\tau$. Действительно, если Y инвариантное множество потока $T^{\hat{t}}$, то пересечение Y с каждым из слоев $SL(2, \mathbb{R}) \times \varphi_0$, есть инвариантное множество каскада, а значит, его мера Хаара равна 0 или 1. Остается заметить, что меры всех таких пересечений равны между собой.

3) Если x_τ эллиптически, то траектория в слое периодична; если периоды траекторий на базе и в слое соизмеримы, то это окружность, если нет, то всюду плотная обмотка двумерного тора.

II. НГ-поток на компактных однородных пространствах

Предложение 9 позволяет описать НГ-поток на каждой из неприводимых компонент, указанных в п.8.

ТЕОРЕМА I (об НГ-потоке на $(SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}, V_1)$). Пусть на $(SL(2, \mathbb{R}), V_1)$ задана левоинвариантная метрика g_m ($m \neq 1$). Тогда НГ-поток эргодичен на каждой из инвариантных компонент $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A} \times \alpha_\tau^\pm, SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A} \times \beta_\tau^\pm$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Траектории, соответствующие неподвижным точкам на базе, всюду плотны на слое $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$, а траектории, соответствующие точкам сепаратрис, к ним неограниченно приближаются.

Случай метрики, соответствующей параметру $m = 1$ описывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть на $(SL(2, \mathbb{R}), V_1)$ задана левоинвариан-

тная метрика, соответствующая параметру $m = 1$. Тогда на каждой компоненте $(SL(2, \mathbb{R}), \mathcal{A})$ НГ-поток эргодичен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Траектории, соответствующие неподвижным точкам (всем точкам окружности $\lambda = 0$, см. п. 7), есть однопараметрические подгруппы h_φ с генераторами $\begin{pmatrix} 0 & \sin \varphi \\ \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \in S^1$.

Подгруппа h_φ всюду плотна на $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$ при $\sin 2\varphi > 0$ периодична при $\sin 2\varphi < 0$.

ТЕОРЕМА 2 (Об НГ-потоке для $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}, V_2$). Пусть на $SL(2, \mathbb{R})$ задано распределение V_2 , \mathcal{A} - равномерная подгруппа $SL(2, \mathbb{R})$. Тогда

- 1) Каждое из множеств $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A} \times \alpha_\tau$ распадается в объединение двумерных и одномерных инвариантных торов.
- 2) НГ-поток эргодичен на каждой из компонент $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A} \times \beta_\tau$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Однопараметрические подгруппы $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A} \times z_i$ всюду плотны в $SL(2, \mathbb{R})/\mathcal{A}$.

Литература

1. В е р ш и к А.М., Г е р ш к о в и ч В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. - 7. М.: ВИНТИ, 1986.
2. Г р и ф ф и т с П. А Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. - М., 1986.
3. F r a n k l i n P., M o o r e C.L.E. Geodesics of Pfaffians. - Journ. of Math. and Phys., 1931, v.10, p.157-190.
4. С т е р н б е р г С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970.
5. Д у б р о в и н Б.А., Н о в и к о в С.П., Ф о м е н к о А.Т. Современная геометрия. М., 1979.
6. К о р н ф е л ь д И.П., С и н а й Я.Г., Ф о м и н С.В. Эргодическая теория. М., 1980.
7. В е р ш и к А.М., Г е р ш к о в и ч В.Я. Неголономные задачи и геометрия распределений. Дополнение к книге: Гриффитс П.А. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М., 1986.
8. Л е ф ш е ц С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., 1965.