Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. Н. Бабин, О суперпозициях ограниченно-детерминированных функций, *Матем. заметки*, 1990, том 47, выпуск 3, 3–10

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
26 января 2025 г., 16:32:00

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Н. Бабин

Рассматривается задача о полноте систем ограниченно-детерминированных функций относительно операции суперпозиции. Известно, что конечных полных систем о.-д. функций нет, известные полные системы [1] содержат функции с неограниченным, в совокупности, числом переменных. В работе показано, что любая о.-д. функция может быть представлена суперпозицией о.-д. функций от двух переменных. Точнее, любая о.-д. функция порождается одноместными о.-д. функциями и булевскими функциями. Заметим, что аналогичный вопрос для автоматов с бесконечной памятью, т. е. для детерминированных функций, был решен отрицательно [2].

В работе [3] было доказано, что в классе всех о.-д. функций имеется континуум предполных классов. Оставался открытым вопрос о том, всякий ли класс о.-д. функций расширяется до предполного (относительно суперпозиции) класса. В настоящей заметке указывается пример замкнутого класса, который не содержится в предполном.

Через P обозначим класс всех о.-д. функций, замыкание относительно суперпозиции системы о.-д. функций M обозначим через $[M]$, систему одноместных (одновходовых) о.-д. функций — через P_1. Ограниченно-детерминированную функцию $d(v)$ задаваемую уравнениями

$$\begin{aligned} &q(1) = 0, \\ &q(t+1) = v(t), \\ &d(t) = q(t), \end{aligned} \tag{1}$$

называем о.-д. функцией «задержки».

Константной называем о.-д. функцию, выдающую одну и ту же выходную последовательность на всех входных последовательностях одинаковой длины. Класс константных о.-д. функций обозначим через K. Можно считать, что $K \subset P_1$. Класс булевских функций обозначим через O.

Определение. Пусть f и g о.-д. функции с одинаковым числом входов и одинаковым числом выходов. Скажем, что о.-д.

© Д. Н. Бабин, 1990

функция g копирует о.-д. функцию f, если найдутся такие натуральные n, j, k, $n \leqslant j$, что для любого $l = 0, 1, 2, \ldots$ и любой входной последовательности достаточной длины значение о.-д. функции g в момент $j + kl$ совпадает со значением о.-д. функции f в момент $n + kl$.

Из работы [1] следует, что система о.-д. функций

$$F = \{f_i(x_1, \ldots, x_{m_i}), m_i = i \cdot 2^i, i = 1, 2, \ldots\} \cup O$$

полна относительно суперпозиции, $[F] = P$. Здесь f_i — о.-д. функция с m_i входами и i выходами, задаваемая уравнениями (2), $q_1^{a_{1,s}} \& \ldots \& q_i^{a_{i,s}}$ — элементарная конъюнкция, равная единице лишь при $q_1 = a_{1,s}, \ldots, q_i = a_{i,s}$, s — номер набора $(a_{1,s}, \ldots a_{i,s})$, $s = 1, 2, \ldots, 2^i$;

$$q_1(1) = 0, \ldots, q_i(1) = 0, \tag{2}$$

$$q_p(t+1) = \bigvee_{s=1}^{2^i} q_1^{a_{1,s}}(t) \& \ldots \& q_i^{a_{i,s}}(t) \& x_{m_{i,s,p}}(t),$$

$$f_{i,p}(t) = q_p(t),$$

$$p = 1, 2, \ldots, i, \quad m_{i,s,p} = p + (s-1) \cdot i.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — одна из о.-д. функций системы F. Для некоторого i, $\mathcal{F} = f_i$, $m = 2^i \cdot i$ — число входов о.-д. функции $\mathcal{F}$, i — число выходов.

ЛЕММА 1. *Пусть некоторая о.-д. функция g копирует о.-д. функцию $\mathcal{F}$, тогда $\mathcal{F} \in [\{g, d\} \cup K \cup O]$.*

Доказательство. Введем вспомогательную о.-д. функцию $c(x)$ с одним входом и $k + j$ выходами, реализуемую схемой из «задержек» (рис. 1). Для всех t больших $k + j - 1$, $z_0(t) = x(t)$, $z_1(t) = x(t-1), \ldots, z_{k+j-1}(t) = x(t - k - j + 1)$. Рассмотрим схему (рис. 2), где H_1 и H_2 константные о.-д. функции, выдающие в двоичной системе номера h_1 и h_2, соответственно,

$$h_1(t) = \begin{cases} t & \text{при } t < j, \\ t - kl - n & \text{при } j + kl \leqslant t < j + kl + k, \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} k & \text{при } t < j, \\ t - kl - j & \text{при } j + kl \leqslant t < j + kl + k, \end{cases}$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

Запишем $h_1(t)$ и $h_2(t)$ для наглядности в виде

t	1	2	...	$j-1$	j	$j+1$	...	$j+k-1$	$j+k$	$j+k+1$	...
$h_1(t)$	1	2	...	$j-1$	$j-n$	$j-n+1$	...	$j-n+k-1$	$j-n$	$j-n+1$	...
$h_2(t)$	k	k	...	k	0	1	...	$k-1$	0	1	...

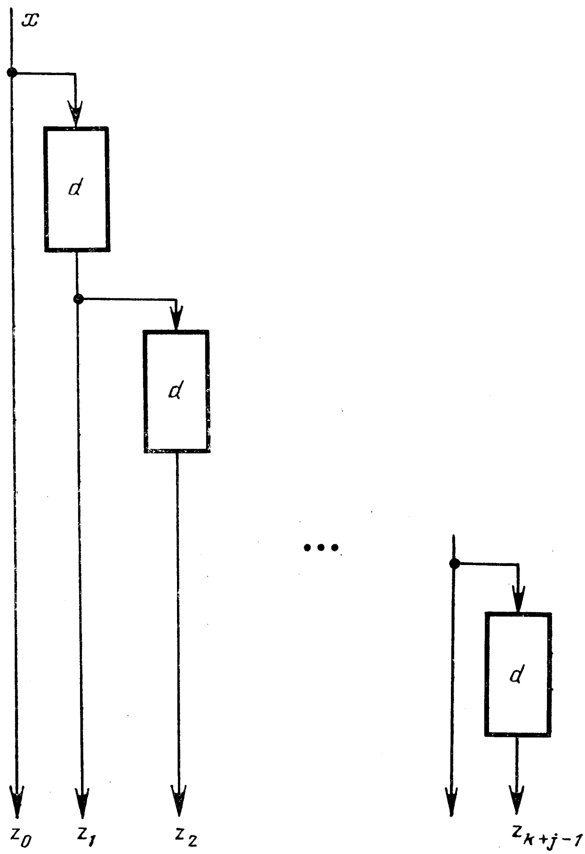


Рис. 1

$\mathcal{B}$ — булевская вектор-функция с i выходами, в которой заложена таблица результатов переработки о.-д. функцией $\mathcal{F}$, начиная со всех начальных состояний, всех слов длины, меньшей $k + j$.

В схеме (рис. 2) функция $\mathcal{B}$ всегда имеет на своем входе конец входной последовательности, а также конец выходной последовательности о.-д. функции g. Этой информации достаточно для идентификации значения о.-д. функции $\mathcal{F}$. Сначала для $t < j$, т. е. при $h_2(t) = k$, функция $\mathcal{B}$ будет выдавать последнюю выходную букву о.-д. функции $\mathcal{F}$, проработавшей с нулевого начального состояния $t = h_1(t)$ тактов. Затем для $t = j + kl + s$, $l = 0, 1, \ldots, 0 \leqslant s < k$ функция $\mathcal{B}$ будет выдавать последнюю выходную букву о.-д. функции $\mathcal{F}$, начавшей работать с состояния

$$\mathcal{F}(n + kl) = g(j + kl) = g(t - s) = g(t - h_2(t))$$

и переработавшей «хвост» входной последовательности длины $h_1(t)$:

$$1\ 2\ldots j \underbrace{+\ kl\ldots t}_{h_2(t)}\ldots j + kl + k,$$

$$1\ 2\ldots n \underbrace{+\ kl\ldots}_{h_1(t)} t\ldots$$

Таким образом, схема (рис. 2) реализует о.-д. функцию $\mathcal{F}$. Лемма 1 доказана.

Согласно уравнениям (2) о.-д. функции $\mathcal{F}$ каждый входной набор $x = (x_1, x_2, \ldots x_m)$ (буква входного алфавита E_2^m) задает подстановку множества E_2^i всех наборов $(q_1, q_2, \ldots, q_i)$ (состояний

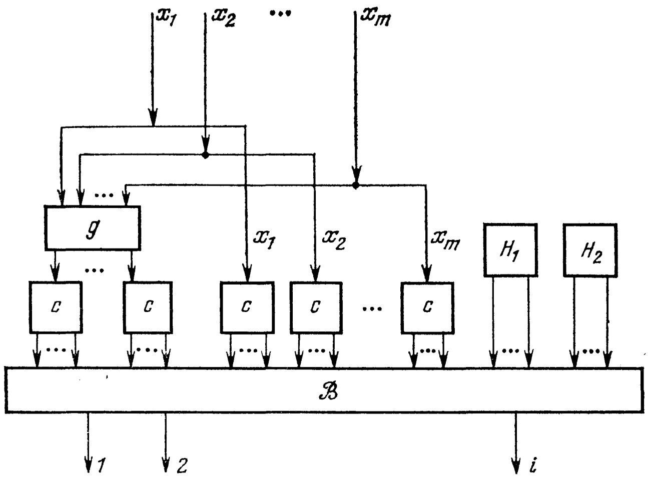


Рис. 2

о.-д. функции $\mathcal{F}$). Ограниченно-детерминированная функция $\mathcal{F}$ такова, что подстановки, задаваемые буквами входного алфавита, суть полная полугруппа подстановок множества E_2^i. Входное слово $x(t+1)\,x(t+2)\ldots x(t+m)$ также задает подстановку множества E_2^i. Пусть отображение $\alpha\colon (E_2^m)^m \to E_2^m$ каждому входному слову длины m ставит в соответствие входную букву, задающую ту же самую подстановку. Через e обозначим входную букву, задающую тождественную подстановку.

Определим о.-д. функции u, v, w.

Ограниченно-детерминированная функция $u(x)$ (сумматор) имеет m входов и m выходов, для $x(t) \in E_2^m$, $t = 1, 2, \ldots, l = 1, 2, \ldots$

$$u(t) = \begin{cases} e & \text{при } t \neq lm, \\ \alpha(x(lm-m+1)\ldots x(lm)) & \text{при } t = lm. \end{cases}$$

Представим о.-д. функцию $u(x)$ для наглядности в виде (3):

$$\left.\begin{array}{lll}
t & x(t) & u(t) \\
\hline
1 & x(1) & e \\
2 & x(2) & e \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
m-1 & x(m-1) & e \\
m & x(m) & \alpha(x(1)\ldots x(m)) \\
m+1 & x(m+1) & e \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
2m-1 & x(2m-1) & e \\
2m & x(2m) & \alpha(x(m+1)\ldots x(2m)) \\
2m+1 & x(2m+1) & e \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
3m-1 & x(3m-1) & e \\
3m & x(3m) & \alpha(x(2m+1)\ldots x(3m)) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Ограниченно-детерминированная функция $v(a)$ имеет m входов и один выход, для $a(t) = (a_1(t), \ldots, a_m(t)) \in E_2^m$, $t = 1, 2, \ldots, l = 1, 2, \ldots,$

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < m, \\ a_{s+1}(ml) & \text{при } t = ml + s,\ 0 \leqslant s < m. \end{cases}$$

Представим $v(a)$ в виде (4):

$$\left.\begin{array}{lll}
t & a(t) & v(t) \\
\hline
1 & (a_1(1), \ldots, a_m(1)) & 0 \\
2 & (a_1(2), \ldots, a_m(2)) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
m-1 & (a_1(m-1), \ldots, a_m(m-1)) & 0 \\
m & (a_1(m), \ldots, a_m(m)) & a_1(m) \\
m+1 & (a_1(m+1), \ldots, a_m(m+1)) & a_2(m) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
2m-1 & (a_1(2m-1), \ldots, a_m(2m-1)) & a_m(m) \\
2m & (a_1(2m), \ldots, a_m(2m)) & a_1(2m) \\
2m+1 & (a_1(2m+1), \ldots, a_m(2m+1)) & a_2(2m) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
3m-1 & (a_1(3m-1), \ldots, a_m(3m-1)) & a_m(2m) \\
3m & (a_1(3m), \ldots, a_m(3m)) & a_1(3m) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Ограниченно-детерминированная функция $w(b)$ имеет один вход и m выходов

$$w(t)=\begin{cases} e \text{ при } t \neq lm, l=2,3,\ldots, t=m; \\ (b(lm-m),\ b(lm-m+1),\ldots,b(lm-1)) \\ \text{при } t=lm, l=2,3,\ldots \end{cases}$$

Представим $w(b)$ в виде (5):

$$\left.\begin{array}{lll}
t & b(t) & w(t) \\
\hline
1 & b(1) & e \\
2 & b(2) & e \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
m & b(m) & e \\
m+1 & b(m+1) & e \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
2m-1 & b(2m-1) & e \\
2m & b(2m) & (b(m), b(m+1),\ldots, b(2m-1)) \\
2m+1 & b(2m+1) & e \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
3m-1 & b(3m-1) & e \\
3m & b(3m) & (b(2m), b(2m+1),\ldots, b(3m-1)) \\
3m+1 & b(3m+1) & e \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Рассмотрим о.-д. функцию g, реализуемую схемой (рис. 3).

ЛЕММА 2. *Ограниченно-детерминированная функция g копирует о.-д. функцию $\mathscr{F}$.*

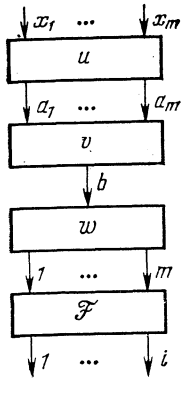


Рис. 3

Доказательство. Покажем, что для любой входной последовательности

$$x(1)\,x(2)\ldots x(t)$$
$$g(lm+m+1)=\mathscr{F}(lm+1),$$

где $lm+m+1 \leqslant t,\ l=1,2,\ldots$

Таблица выходных значений о.-д. функций u, v, w, в схеме (рис. 3) для последовательности $x(1)\,x(2)\ldots x(t)$ имеет вид (6). Здесь $\alpha(x(sm+1)\ldots x(sm+m))=(\alpha_1(x(sm+1)\ldots x(sm+m)),\ \alpha_2(x(sm+1)\ldots x(sm+m))\ldots\alpha_m(x(sm+1)\ldots x(sm+m))),\ s=0,1,2,\ldots$ $g(2m+1)$ — это состояние, в которое перейдет о.-д. функция $\mathscr{F}$ в схеме (рис. 3) после подачи слова $ee\ldots e\alpha(x(1)\ldots x(m))$ или, согласно определению функции $\alpha\colon (E_2^m)^m \to E_2^m$, слова $x(1)\ldots x(m)$. Значит, $g(2m+1) \Rightarrow$

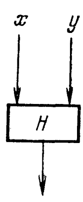
$= \mathcal{F}(m+1)$:

t	$u(t)$	$v(t)$	$w(t)$
1	e	0	e
2	e	0	e
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	e	0	e
m	$\alpha(x(1)\dots x(m))$	$\alpha_1(x(1)\dots x(m))$	e
$m+1$	e	$\alpha_2(x(1)\dots x(m))$	e
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2m-1$	e	$\alpha_m(x(1)\dots x(m))$	e
$2m$	$\alpha(x(m+1)\dots x(2m))$	$\alpha_1(x(m+1)\dots x(2m))$	$\alpha(x(1)\dots x(m))$
$2m+1$	e	$\alpha_2(x(m+1)\dots x(2m))$	e
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3m-1$	e	$\alpha_m(x(m+1)\dots x(2m))$	e
$3m$	$\alpha(x(2m+1)\dots x(3m))$	$\alpha_1(x(2m+1)\dots x(3m))$	$\alpha(x(m+1)\dots x(2m))$
$3m+1$	e	$\alpha_2(x(2m+1)\dots x(3m))$	e
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(6)

Далее, $g(3m+1)$ — это состояние о.-д. функции $\mathcal{F}$ после подачи слова $ee\dots e\alpha(x(1)\dots x(m))e\dots e\alpha(x(m+1)\dots x(2m))$ или слова $x(1)\dots x(m)\,x(m+1)\dots x(2m)$, значит, $g(3m+1) = \mathcal{F}(2m+1)$, и т. д. Получим, что $g(lm+m+1) = \mathcal{F}(lm+1)$. Лемма 2 доказана.

Заметим, что о.-д. функция g получается суперпозицией о.-д. функций $u(v(x_1, \dots x_m))$ и одноместной о.-д. функции $\mathcal{F}(w(b))$ (рис. 3). Ограниченно-детерминированные функции u и v могут быть выражены через одноместные о.-д. функции и булевские функции.



ЛЕММА 3. $u \in [K \cup O \cup \{d\}]$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 4. $v(a_1, \dots, a_m) \in [K \cup O \cup \{d\}]$.

Доказательство. Пусть о.-д. функция $H(x, y)$

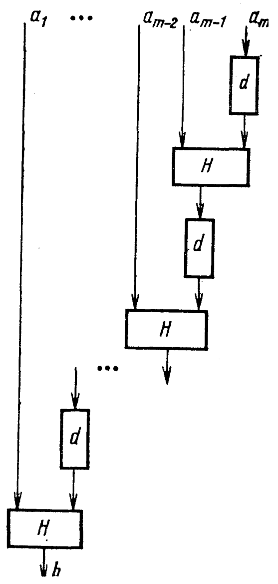


Рис. 4

(рис. 4) задается уравнениями

$$H(t)=\begin{cases} y(t) & \text{при } t\neq ml, l=1,2,\ldots;\\ x(t) & \text{при } t=ml, l=1,2,\ldots\end{cases}$$

Ограниченно-детерминированная функция H может быть выражена через константную о.-д. функцию и булевские функции. Схема (рис. 4, справа) реализует о.-д. функцию v. Лемма 4 доказана.

Поскольку «задержка» d является одноместной функцией и константные о.-д. функции можно считать одноместными.

ЛЕММА 5. $\mathcal{F}\in[P_1\cup O]$.

Система F полна и каждую ее о.-д. функцию можно выразить через одноместные о.-д. функции и булевские функции. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 1. $P=[P_1\cup O]$.

На основании теоремы 1 можно доказать теорему 2.

ТЕОРЕМА 2. *Класс* $[K\cup O\cup\{d, f_1\}]$ *не содержится ни в одном предполном классе о.-д. функций.*

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
24.06.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985. С. 151—174.

[2] Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Проблемы кибернетики. 1980. Вып. 37. С. 5—17.

[3] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 45—74.