МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 295—302

УДК 519.2

ФИНАЛЬНАЯ σ-АЛГЕБРА НЕОДНОРОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Д. В. Сенченко

Доказано, что финальная σ-алгебра в случае неоднородной марковской цепи с конечным числом состояний n порождается конечным числом ($\leqslant n$) атомов. Атомы охарактеризованы с точки зрения поведения траекторий цепи. Даны достаточные условия (в случае счетного числа состояний) существования единственного атома на бесконечности. Библ. 3 назв.

Введение. Рассмотрим неоднородную марковскую цепь $x(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$, с конечным числом состояний n и переходной функцией $p_{ij}(s, t)$. Пусть $N_{[t, \infty)}$ — минимальная σ-алгебра, индуцированная цепью за время $[t, \infty)$, $N = \bigcap\limits_t N_{[t, \infty)}$ — финальная σ-алгебра, P_{ti} — меры на $N_{[t, \infty)}$ индуцированные цепью (т. е. условные распределения при условии $x(t) = i$). Множество B, $B \in N$, мы назовем нулевым, если $P_{ti}(B) = 0$ при всех t и i. Множество $B \in N$ назовем почти наверное атомом (п. н. атомом), если B ненулевое и не распадается на сумму двух ненулевых непересекающихся множеств. Известно (см., например, [1]), что в случае однородной марковской цепи с конечным числом состояний траектория цепи, начиная с некоторого момента, попадает в одно из конечного числа замкнутых подмножеств состояний цепи (это — атом). В случае неоднородной цепи $x(t)$ верен аналогичный факт, если рассматривать траекторию по некоторой неслучайной подпоследовательности моментов времени. В работе показано, что любое ненулевое N-измеримое множество совпадает с точностью до почти наверное по любой мере P_{ti} с объединением конечного числа ($\leqslant n$)

п. н. атомов. Можно разбить пространство состояний E на подмножества E_j и райти последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$, таким образом, что каждый из п. н. атомов совпадает п. н. с одним из событий:

$$\bigcup_l \bigcap_{k>l} x(t_k) \in E_j.$$

Даны также достаточные условия для «полного перемешивания на бесконечности», т. е. для того, чтобы σ-алгебра состояла из одного п. н. атома. Достаточные условия для «перемешивания» даются для случая счетного числа состояний.

§ 1. ТЕОРЕМА 1. *σ-алгебра N содержит не больше n попарно непересекающихся ненулевых множеств.*

Доказательство. Так как цепь $x(t)$ марковская, то при $A \in N$

$$P_{si}(A/N_{[s,\,t]}) = P_{tx\,(t)}(A), \text{ п. н. } P_{si}, \tag{1}$$

где $N_{[s,t]}$ — σ-алгебра, индуцированная цепью за время $[s, t]$. Переходя в равенстве (1) к пределу при $t \to \infty$ и пользуясь сходимостью мартингалов [2], получим

$$\lim_{t\to\infty} P_{tx\,(t)}(A) = P_{si}(A/N_{[s,\,\infty)}) = \chi(A), \text{ п. н. } P_{si}, \tag{2}$$

где $\chi(A)$ — характеристическая функция множества A. Если A — ненулевое, то из (2) и конечности числа состояний цепи следует, что существует некоторое состояние j и подпоследовательность $\{t_k\}$ последовательности $\{t\} = 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ такие, что

$$\lim_{t_k\to\infty} P_{t_k j}(A) = 1. \tag{3}$$

Рассмотрим линейную оболочку, натянутую на множество вектор-функций вида

$$P_t(A) = \{P_{t1}(A),\ P_{t2}(A), \ldots, P_{tn}(A)\}, \qquad A \in N,$$

и покажем, что попарно непересекающимся ненулевым множествам $A_1, A_2, \ldots, A_l$ соответствуют линейно независимые вектор-функции

$$P_t(A_1),\ P_t(A_2), \ldots, P_t(A_l).$$

Выше было показано, что существует состояние j и последовательность $\{t_k\}$ такие, что $\lim_{t_k\to\infty} P_{t_k j}(A_1)=1$. Так как $A_2, A_3, \ldots, A_l$ не пересекаются с A_1, то $\lim_{t_k\to\infty} P_{t_k j}(A_r)=0$ при $2\leqslant r\leqslant l$. Поэтому в равенстве

$$c_1P_t(A_1)+c_2P_t(A_2)+\ldots+c_lP_t(A_l)\equiv 0,$$

$c_1=0$, аналогично проверяется, что $c_2=0, \ldots, c_l=0$. Для доказательства теоремы остается показать, что существует на больше n линейно независимых вектор-функций. Пусть при фиксированном s базис линейной оболочки векторов вида

$$P_s(A)=\{P_{s1}(A),\ P_{s2}(A),\ \ldots,\ P_{sn}(A)\},\qquad A\in N,$$

содержит $k(s)$ $(k(s)\leqslant n)$ векторов. Из марковского свойства

$$P_{si}(A)=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s,t)\,P_{tj}(A) \tag{4}$$

следует, что $k(s)$ не убывает при $s\to\infty$. Так как $k(s)\leqslant n$, то, начиная с некоторого s_0, $k(s)$ остается постоянным, $k(s)=k$ при $s\geqslant s_0$. Если $\{P_{s_0}(A_r),\ r=1, 2, \ldots, k\}$ — базис указанного пространства векторов в момент s_0, то $\{P_t(A_r),\ r=1, 2, \ldots, k\}$ остается в силу (4) базисом при любом $t\geqslant s_0$. Применяя опять марковское свойство (4), находим, что в разложении

$$P_t(A)=c_1^tP_t(A_1)+c_2^tP_t(A_2)+\ldots+c_k^tP_t(A_k),\qquad A\in N,$$

константы $c_1^t, c_2^t, \ldots, c_k^t$ можно считать не зависящими от t. Это показывает, что существует не больше k $(k\leqslant n)$ линейно независимых вектор-функций, и теорема тем самым доказана.

Утверждение теоремы 1 аналогично лемме 2 из [3], где рассматривался неоднородный непрерывный справа марковский процесс с конечным числом состояний и изучалась σ-алгебра, индуцированная процессом слева от точки накопления скачков.

Из теоремы 1 следует, что существуют п. н. атомы

$$A_1, A_2, \ldots, A_k\qquad (k\leqslant n)$$

такие, что их объединение дает пространство элементарных событий и любое N-измеримое множество является или нулевым или отличается на нулевое от объединения некоторого числа из атомов $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Так как число состояний конечно, то в силу (3) для каждого п. н. атома A можно найти некоторое подмножество $I = I(A)$ пространства состояний и подпоследовательность $\{s_m\}$ такие, что

$$\lim_{s_m \to \infty} P_{s_m i}(A) = 1, \qquad i \in I, \tag{5}$$

но $P_{s_m i}(A) < \alpha < 1$, если $i \overline{\in} I$. Очевидно, в (2), (3) можно заменить последовательность $\{t\}$ на любую подпоследовательность $\{t'\}$, считая теперь $\{t_k\}$ подпоследовательностью $\{t'\}$. Это дает возможность для конечного числа п. н. атомов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ выбрать единую подпоследовательность $\{s_m\}$ и единое число α в (5). Очевидно,

$$I(A_i) \cap I(A_j) = \phi.$$

ТЕОРЕМА 2. *Существует последовательность* $\{s_m\}$ *и разбиение пространства состояний*

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_j + \ldots + E_k$$

такие, что каждый п. н. атом A_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, *с точностью до п. н. по любой мере* P_{si} *совпадает с множеством*

$$\bigcup_l \bigcap_{m>l} x(s_m) \in E_j.$$

Доказательство. Докажем сначала, что каждый п. н. атом A с точностью до почти наверное совпадает с множеством

$$A' = \bigcup_l \bigcap_{m>l} x(s_m) \in I,$$

$$I = I(A) \quad \text{и} \quad \{s_m\}$$

определены в (5). По марковскому свойству имеем

$$P_{si}(A, \bigcap_{r \geqslant m > l} x(s_m) \in I) =$$

$$= \sum_{j \in I} P_{si}(\bigcap_{r>m>l} x(s_m) \in I, x(s_r) = j)\, P_{s_r j}(A).$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ и принимая во внимание (5), получаем

$$P_{si}(A, \bigcap_{m>l} x(s_m) \in I) = P_{si}(\bigcap_{m>l} x(s_m) \in I).$$

Отсюда получаем при $l \to \infty$

$$P_{si}(AA') = P_{si}(A'). \tag{6}$$

Аналогично из (5) и марковского свойства следует

$$P_{si}(A, \bigcup_{r \geqslant m > l} x(s_m) \overline{\in} I) \leqslant \alpha P_{si}(\bigcup_{r \geqslant m \geqslant l} x(s_m) \overline{\in} I).$$

Переходя к пределу сначала по r, а затем по l, получим

$$P_{si}(A\overline{A'}) \leqslant \alpha P_{si}(\overline{A'}), \tag{7}$$

где $\bar{A}'$ — дополнение к A'. Из (6), (7) следует

$$P_{si}(A) \leqslant \alpha + (1-\alpha) P_{si}(A'),$$

откуда получаем, что

$$\lim_{s_m \to \infty} P_{s_m i}(A') = 1$$

при $i \in I(A)$. Поэтому

$$\lim_{s_m \to \infty} P_{s_m i}(AA') = 1$$

при $i \in I(A)$ и множество AA' ненулевое. Это значит, что $A\overline{A'}$ — нулевое множество, так как A — п. н. атом, и $= AA' + A\overline{A'}$. Поэтому для любой меры P_{si} имеем

$$P_{si}(A) = P_{si}(AA').$$

Отсюда и из (6) следует, что множества A и A' отличаются на нулевое множество. Пусть E' — множество состояний, не входящих ни в одно из $I(A_1)$, $I(A_2)$, . . ., $I(A_k)$. Мы получим утверждение теоремы 2, полагая, например,

$$E_1 = I(A_1), \quad E_2 = I(A_2), \quad \ldots, \quad E_{k-1} = I(A_{k-1}),$$
$$E_k = I(A_k) + E'.$$

§ **2.** В этом параграфе даны достаточные условия для того, чтобы σ-алгебра N содержала всего один п. н. атом. В этом случае любое N-измеримое множество или нулевое или имеет P_{si}-вероятность, равную 1 по любой мере P_{si}, такое множество назовем единичным. Следующая теорема верна для случая счетного числа состояний цепи.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть существует подпоследовательность* $\{s_k\}$ *последовательности* $\{t\} = 0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$ *такая, что для любого* $j, j \in E$, *и любой подпоследовательности* $\{t_k\}$ *последовательности* $\{s_k\}$ *множество*

$$D = \bigcap_{l} \bigcup_{k>l} x(t_k) = j$$

имеет вероятность 1 *по любой мере* P_{si}. *Тогда* σ-*алгебра* N *состоит из нулевых и единичных множеств.*

Доказательство. Пусть $A \in N$, A ненулевое. Так же, как в теореме 1,

$$\lim_{s_k \to \infty} P_{s_k x(s_k)}(A) = \chi(A)$$

— почти наверное по любой мере P_{si}. Пусть сначала в выражении для D $t_k = s_k$ и $j = 1$.

Так как A ненулевое, а D единичное, то существует φ, $\varphi \in A \cdot D$, такое, что

$$\lim_{s_k \to \infty} P_{s_k x(s_k,\ \varphi)}(A) = 1.$$

Так как $\varphi \in D$, то найдется подпоследовательность последовательности $\{s_k\}$ такая, что

$$x(t_k^{(1)}, \varphi) = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{t_k^{(1)} \to \infty} P_{t_k^{(1)} 1}(A) = 1.$$

Заменим далее в D t_k на $t_k^{(1)}$ и положим $j = 2$. Аналогично найдем подпоследовательность $\{t_k^{(2)}\}$ последовательности $\{t_k^{(1)}\}$ такую, что

$$\lim_{t_k^{(2)} \to \infty} P_{t_k^{(2)} 2}(A) = 1.$$

По индукции для любого j построим подпоследовательность $\{t_k^{(j)}\}$ последовательности $\{t_k^{(j-1)}\}$ такую, что

$$\lim_{t_k^{(j)}\to\infty} P_{t_k^{(j)}j}(A) = 1.$$

Выбирая диагональную последовательность u_k, $u_k = t_k^{(k)}$, получим при $u_k \to \infty$

$$P_{u_k j}(A) \to 1$$

для любого j. Отсюда следует, что σ-алгебра N не может содержать два ненулевых непересекающихся множества. В самом деле, пусть $A \cdot B = \phi$ и A, B ненулевые. Тогда, так же, как u_k, можно построить подпоследовательность $\{m_k\}$ последовательности $\{u_k\}$ такую, что при $m_k \to \infty$

$$P_{m_k j}(B) \to 1$$

для всех j. Поэтому

$$P_{m_k j}(A+B) = P_{m_k j}(A) + P_{m_k j}(B) \to 2$$

при $m_k \to \infty$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

Замечание. Условие теоремы 3 выполняется, например, в случае однородной, неприводимой цепи с эргодическими (с точностью до периодичности) состояниями.

В самом деле, в этом случае для произвольной меры P_{si}

$$P_{si}(D) \geqslant \lambda_j > 0,$$

где $\lambda_j = \lim\limits_{m\to\infty} p_{ij}(m)$. В силу (2) $\overline{D}$ — нулевое множество, так как ни для какой последовательности $\{t_k\}$ $P_{t_k x(t_k)}(\overline{D})$ не стремится к 1. Поэтому D единичное. Условие теоремы 3 выполняется также в случае неоднородной марковской цепи, если существует последовательность $\{s_k\}$ такая, что для всех i, j

$$p_{ij}(s_k, s_{k+1}) \geqslant \lambda_j > 0.$$

В этом случае также $P_{si}(D) \geqslant \lambda_j > 0$ для произвольной меры P_{si}.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 10.XII.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, М., 1967.

[2] Л о э в М., Теория вероятностей, М., 1962.

[3] С е н ч е н к о Д. В., О характеристиках неоднородных марковских процессов с конечным числом состояний, Теория вероятн. и ее примен., 13 (1968), 548—555.