Ф. А. Шамоян, О преобразованиях Фурье функций класса Р. Неванлинны в полуплоскости, *Алгебра и анализ*, 2008, том 20, выпуск 4, 218–240

Алгебра и анализ
Том 20 (2008), №4

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА Р. НЕВАНЛИННЫ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

© Ф. А. ШАМОЯН

Пусть f — голоморфная в верхней полуплоскости функция из класса Р. Неванлинны $N(\mathbb{C}_+)$, причём

$$\varlimsup_{y\to+\infty}\frac{\ln|f(iy)|}{y}\le 0,$$

граничные значения которой на вещественной оси принадлежат $L^1(\mathbb{R})$. В работе показано, что если $|\hat f(x)|\le\frac{1}{\lambda(|x|)}$, $x\in\mathbb{R}_-$, где $\hat f$ — преобразование Фурье функции f, а λ — логарифмически выпуклая положительная функция на $\mathbb{R}_+$, то из условия $\int_1^{+\infty}\frac{\ln\lambda(x)}{x^{3/2}}dx=+\infty$ следует, что $\hat f(x)=0$ для всех $x\in\mathbb{R}_-$. Обратно, если не выполняется одно из вышеуказанных условий, то строится функция $f\in N(\mathbb{C}_+)\cap L^1(\mathbb{R})$, для которой $\hat f(x)\ne 0$, $x\in\mathbb{R}_-$.

Пусть $\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ — верхняя полуплоскость, $H(\mathbb{C}_+)$ — множество всех голоморфных в $\mathbb{C}_+$ функций, $H^p(\mathbb{C}_+)$=H^p $(0<p\le+\infty)$ — класс Харди в верхней полуплоскости.

Нетрудно заметить, что если $f\in H(\mathbb{C}_+)$ и существует неотрицательная гармоническая функция U в $\mathbb{C}_+$ такая, что при некотором $p_0\in(0,+\infty)$ выполняется оценка

$$|f(z)|^{p_0}\le U(z),\quad z\in\mathbb{C}_+,\tag{1}$$

и одновременно $f|_{\mathbb{R}}\in L^1(\mathbb{R})$, то по теореме В. И. Смирнова (см. [1, 2]) $f\in H^1(\mathbb{C}_+)$; поэтому преобразование Фурье функции f

$$\hat f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt,\quad x\in\mathbb{R},$$

обращается в нуль на $\mathbb{R}_-=(-\infty,0)$.

Естественно возникает вопрос: верно ли аналогичное утверждение, если в неравенстве (1) заменить $|f|^{p_0}$ на $\ln^+|f|$? Простые примеры показывают, что существуют неотрицательная гармоническая функция U и $f\in H(\mathbb{C}_+)$ такие, что

$$\ln^+|f(z)|\le U(z),\quad z\in\mathbb{C}_+,\tag{2}$$

$f|_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$, и в то же время $\hat{f}(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}_-$. Отметим, что класс функций с условием (2) совпадает с классом Р. Неванлинны функций ограниченного вида (см. [2]). Указанный класс обозначим через $N(\mathbb{C}_+)$.

В статье устанавливается, что если в этих условиях $\hat{f}(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ с некоторой скоростью, то $\hat{f}(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}_-$. При этом мы находим полную характеризацию монотонно растущих функций $\lambda(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, для которых из условия $|\hat{f}(x)| \le \frac{1}{\lambda(|x|)}$, $x \in \mathbb{R}_-$, следует, что $\hat{f}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_-$.

Основные результаты этой статьи анонсированы в заметке [3].

§1. Формулировка основных результатов и доказательство вспомогательных утверждений

Пусть λ — монотонно растущая, непрерывная, положительная функция на $\mathbb{R}_+$, причём

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\lambda(x)} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Такую функцию назовём быстро растущим весом. Введём также обозначения

$$m_n = \sup_{x>0} \frac{x^n}{\lambda(x)}, \quad T(r) = \sup_{n \ge 1} \frac{r^n}{m_n}, \quad r \ge 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\lambda(x)$ — быстро растущий вес на $\mathbb{R}_+$, $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R})$, причём*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \tag{4}$$

$$|\hat{f}(x)| \le \frac{1}{\lambda(-x)}, \quad x \in \mathbb{R}_-. \tag{5}$$

Тогда, если

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\ln |f(iy)|}{y} \le 0, \tag{6}$$

то $\hat{f}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_-$, и, таким образом, $f \in H^1(\mathbb{C}_+)$.

Обратно, если λ — логарифмически выпуклый быстро растущий вес такой, что интеграл (4) сходится, то можно построить функцию $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R})$, для которой справедлива оценка (5), при этом $\hat{f}(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}_-$.

Из оценок функции Карлемана–Островского в случае логарифмически выпуклого веса (см. [4]) и теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть λ — логарифмически выпуклый вес. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *для каждой* $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R})$ *с условиями* (5), (6) *выполняется равенство*
$$\hat{f}(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_-;$$

2)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \lambda(x)}{x^{3/2}} dx = +\infty.$$

Замечание 1. В утверждении теоремы 1 условие (6) нельзя отбросить. Простым примером, удовлетворяющим всем условиям теоремы 1, кроме (6), являются функции вида
$$f_a(z) = \frac{1}{e^{iaz}(iN + z)^2}, \quad a > 0, \ N > 0, \ z \in \mathbb{C}_+. \tag{7}$$
Очевидно, что $\operatorname{supp} \hat{f}_a \cap \mathbb{R}_- \neq \emptyset$.

Замечание 2. Отметим также, что условие $f \in N(\mathbb{C}_+)$, в известном смысле, является необходимым: как установлено в работе [5], для произвольной, почти везде конечной и измеримой функции ψ на $\mathbb{R}$ и функции $h(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$, всегда можно построить $f \in H(\mathbb{C}_+)$ такую, что $|f(x + iy)| \leq h(y)$, и в то же время почти везде
$$\lim_{y \to 0} f(x + iy) = \psi(x).$$

Замечание 3. Изучению скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида в круге посвящена работа автора [6].

Пример функции (7) показывает, что существуют функции $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $M_k = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty$, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f^{(k)}(x) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и при этом
$$\sup_{z \in \mathbb{C}_+} |f(z)| = +\infty.$$
Пусть, как обычно, $C^\infty(M_n)$ обозначает класс Т. Карлемана на $\mathbb{R}$ (см. [4]), т.е.
$$C^\infty(M_n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ |f^{(k)}(x)| \leq A_f^k M_k, \ x \in \mathbb{R}, \ k = 0, 1, \ldots\}.$$
Естественно возникает вопрос: при каких ограничениях на монотонно растущую последовательность $\{M_k\}_{k=1}^\infty$, $M_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, из условия $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(M_n)$, следует оценка
$$|f^{(k)}(z)| \leq A_f^k M_k, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть* $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(M_n)$, *причём*

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln|f(iy)|}{y} \le 0. \tag{9}$$

Тогда, если

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \tag{10}$$

где $T(r) = \sup\limits_{k\ge1} \frac{r^k}{M_k}$, $r \in \mathbb{R}_+$, *то справедлива оценка* (8).

Обратно, если не выполняется хотя бы одно из условий (9) *или* (10), *то можно построить функцию* $f \in N(\mathbb{C}_+)\cap L^1(\mathbb{R})\cap C^\infty(M_n)$ *такую, что* $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}_+} |f(z)| = +\infty$.

Доказательство теорем 1–3 основано на нескольких вспомогательных утверждениях. Для доказательства этих утверждений сначала введём обозначения.

Пусть $m > -1$ и

$$A^1(m) = \Big\{ f \in H(\mathbb{C}_+) : ||f||_{A^1(m)} = \int_{\mathbb{C}_+} (\operatorname{Im} z)^m |f(z)| dm_2(z) < \infty \Big\}.$$

Здесь m_2 — плоская мера Лебега.

Лемма 1. *Пусть* $f \in A^1(m)$, *тогда справедливо представление*

$$f(z) = c_m \int_{\mathbb{C}_+} \frac{(\operatorname{Im}\zeta)^m f(\zeta) dm_2(\zeta)}{(\bar\zeta - z)^{m+2}}, \text{ где } c_m = -\frac{(m+1)2^{m-1}}{\pi} e^{(-i(m-1)\frac{\pi}{2})}. \tag{11}$$

Доказательство. Формула (11) непосредственно следует из формулы Коши–Грина. Достаточно установить (11) для всюду плотного подмножества множества $A^1(m)$.

Пусть, например, $F \in W_1^1(\mathbb{C}_+) \cap C_0(\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R})$, где $W_1^1(\mathbb{C}_+)$ — класс Соболева в $\mathbb{C}_+$, $C_0(\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R})$ — класс функций, непрерывных в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ и достаточно быстро стремящихся к нулю при $z \to \infty$. Тогда по формуле Коши–Грина (см., например, [7, гл. 1])

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}_+} \frac{\partial F(\zeta)}{\partial\bar\zeta} \frac{dm_2(\zeta)}{\zeta - w} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x)}{x - w} dx. \tag{12}$$

Предположим далее, что $f \in H(\mathbb{C}_+) \cap W_1^1(\mathbb{C}_+) \cap C_0(\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R})$. Положим

$$F_z(w) = f(w)\left(\frac{w-\bar{w}}{\bar{w}-z}\right)^{m+1}, \quad \text{где } w, z \in \mathbb{C}_+.$$

Тогда, применяя формулу (12) к функции $F_z(w)$ и полагая $w = z$, получим формулу (11).

В общем случае, когда f — произвольная функция из $A^1(m)$, положим

$$f_N(z) = f(z)\frac{N^p}{(iN+z)^p}, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где N и p — достаточно большие натуральные числа. Записывая представление (11) для функции f_N и переходя к пределу при $N \to +\infty$, получим доказательство леммы. □

Замечание 4. Отметим, что представление (11) было установлено в [8] другим способом.

Для формулировки следующего утверждения введём сначала обозначение:

$$C_A^\infty(\mathbb{C}_-) = \left\{f \in H(\mathbb{C}_-) \cap C^\infty(\mathbb{C}_- \cup \mathbb{R}) : \sup_{z \in \mathbb{C}_-} |f^{(n)}(z)| < \infty, n = 0, 1, 2, \dots\right\},$$

где $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Лемма 2. *Пусть $f \in C_A^\infty(\mathbb{C}_-)$. Тогда для произвольного $m \in \mathbb{Z}_+$, $g \in A^1(m)$ существует предел*

$$\Phi(g) = \lim_{y \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-iy)g(x+iy)dx.$$

При этом $\Phi \in \left(A^1(m)\right)^*$ и $||\Phi|| \le C_1(m) \sup_{z \in \mathbb{C}_-} |f^{(m+1)}(z)|$.

Доказательство. Зафиксируем $y > 0$. Тогда, используя лемму 1, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-iy)g(x+iy)dx = c_m \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-iy)\left(\int_{\mathbb{C}_+} \frac{g(\xi+i\eta)\eta^m}{(\xi-i\eta-x-iy)^{m+2}}d\xi d\eta\right)dx$$

$$= c_m \int_{\mathbb{C}_+} g(\xi+i\eta)\eta^m\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-iy)}{(\xi-i\eta-x-iy)^{m+2}}dx\right)d\xi d\eta,$$

где c_m — постоянная из формулы (11). Вычислим внутренний интеграл. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-iy)}{(\xi - i\eta - x - iy)^{m+2}} dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{-y}(x)}{(x-(\xi - i(\eta+y)))^{m+2}} dx,$$

где $f_{-y}(x) = f(x-iy)$, $y > 0$. Ясно, что в условиях леммы последний интеграл равен

$$\frac{(-1)^m 2\pi i f^{(m+1)}(\xi - i(\eta+2y))}{(m+1)!}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-iy)g(x+iy)dx = \frac{(-1)^m c_m 2\pi i}{(m+1)!} \int_{\mathbb{C}_+} (\operatorname{Im}\zeta)^m g(\zeta) f^{(m+1)}(\bar{\zeta} - 2iy) dm_2(\zeta).$$

Из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned}\Phi(g) &= \lim_{y\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-iy)g(x+iy)dx \\ &= \frac{(-1)^m c_m 2\pi i}{(m+1)!} \int_{\mathbb{C}_+} g(\zeta) f^{(m+1)}(\bar{\zeta})(\operatorname{Im}\zeta)^m dm_2(\zeta).\end{aligned}$$

Поэтому

$$|\Phi(g)| \le C_1(m) ||g||_{A^1(m)} \sup_{z\in\mathbb{C}_-} |f^{(m+1)}(z)|.$$

$\square$

В дальнейшем нам нужна будет следующая формула Фаа–ди-Бруно для производной сложной функции (см. [9, гл. 1]):

$$(g(f(z)))^{(n)} = \sum \frac{n!}{m_1! \dots m_q!} g^{(p)}(f(z)) \left(\frac{f^{(1)}(z)}{1!}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{f^{(q)}(z)}{q!}\right)^{m_q}. \quad (13)$$

Сумма распространяется на все натуральные числа такие, что $m_1 + 2m_2 + \dots + qm_q = n$, а $p = m_1 + m_2 + \dots + m_q$.

Лемма 3. *Пусть* $I_n = \sum\limits_{\substack{m_1+2m_2+\\ \dots+qm_q=n}} \frac{n!}{m_1!\dots m_q!}$, *тогда справедлива оценка* $I_n \le n! 2^n e$.

Доказательство. Положим в формуле (13) $g(z)=e^z$, $f(z)=-\frac{1}{1+z}$, тогда имеем

$$\left(e^{f(z)}\right)^{(n)}=\sum_{\substack{m_1+2m_2+\\ \ldots+qm_q=n}}\frac{n!}{m_1!\ldots m_q!}e^{f(z)}\Big(\frac{f^{(1)}(z)}{1!}\Big)^{m_1}\ldots\Big(\frac{f^{(q)}(z)}{q!}\Big)^{m_q}. \tag{14}$$

Учитывая, что $f^{(j)}(z)=\frac{(-1)^{j+1}j!}{(1+z)^{j+1}}$ и $\frac{f^{(j)}(-2)}{j!}=\frac{(-1)^{j+1}}{(-1)^{j+1}}=1$, из равенства (14) получаем

$$\left(e^{f(z)}\right)^{(n)}_{z=-2}=e\sum_{\substack{m_1+2m_2+\\ \ldots+qm_q=n}}\frac{n!}{m_1!\ldots m_q!}=eI_n. \tag{15}$$

Но, с другой стороны, по формуле Коши

$$\left(e^{-\frac{1}{1+z}}\right)^{(n)}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta+2|=\frac12}\frac{e^{f(\zeta)}}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

Поэтому из (15) следует, что

$$eI_n=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta+2|=\frac12}\frac{e^{f(\zeta)}}{(\zeta+2)^{n+1}}d\zeta\right|\le\frac{n!}{2\pi}2^{n+1}\int\limits_{|\zeta+2|=\frac12}\left|e^{f(\zeta)}\right||d\zeta|$$
$$\le\frac{n!2^n}{\pi}\max_{|\zeta+2|=\frac12}|e^{f(\zeta)}|\pi=n!2^n\max_{|\zeta+2|=\frac12}|e^{-\frac{1}{1+\zeta}}|\le n!2^ne^2.$$

Отсюда получаем доказательство леммы. □

Пусть $S(z)=\exp\left(\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+tz}{t-z}\frac{d\nu(t)}{1+t^2}\right)$, где ν — сингулярная неотрицательная мера на $\mathbb{R}$, для которой $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\nu(t)}{1+t^2}<+\infty$.

Лемма 4. *Пусть $e_\lambda(z)=e^{i\lambda z}$, $z\in\mathbb{C}_+$, $\lambda\in\mathbb{R}$, тогда справедливо равенство*

$$\left(e_\lambda(z)S^\delta(z)\right)^{(n)}=e_\lambda(z)S^\delta(z)\psi_{\delta,n,\lambda}(z),\quad z\in\mathbb{C}_+,$$

где функция $\psi_{\delta,n,\lambda}\in H(\mathbb{C}_+)$, при этом $\psi_{\delta,n,\lambda}$ удовлетворяет оценке

$$|\psi_{\delta,n,\lambda}(z)|\le c(n,\lambda)\begin{cases}\sum\limits_{p=1}^{n}(U(z)\delta y)^p+1, & \textit{если } y\ge1,\\ \frac{1}{y^n}\sum\limits_{p=1}^{n}(yU(z)\delta)^p, & \textit{если } 0<y<1,\end{cases}$$

где $U(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{|t-z|^2}$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Доказательство. Применяя формулу Лейбница, имеем

$$\Big(e^{i\lambda z} S_\delta(z)\Big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k S_\delta^{(k)}(z)(e^{i\lambda z})^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (i\lambda)^{n-k} e^{i\lambda z} S_\delta^{(k)}(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где для удобства обозначено $S_\delta(z) \stackrel{\text{def}}{=} S^\delta(z)$, $z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$.

Теперь, применяя формулу (14) к функции

$$f(z) = \frac{i\delta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz}{t-z} \frac{d\nu(t)}{1+t^2}$$

и учитывая, что

$$f^{(k)}(z) = \frac{ik!}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{(t-z)^{k+1}}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \ k \in \mathbb{N},$$

имеем

$$S_\delta^{(k)}(z) = \sum_{m_1+\dots+qm_q=k} \frac{k!}{m_1!\dots m_q!} S_\delta(z) \Big(\frac{i\delta}{\pi}\Big)^{m_1+m_2+\dots+m_q} \times \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{(t-z)^2}\Bigg)^{m_1} \dots \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{(t-z)^{q+1}}\Bigg)^{m_q}. \tag{16}$$

Положим

$$\psi_{\delta,n,\lambda}(z) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (i\lambda)^{n-k} \Bigg(\sum_{\substack{m_1+2m_2+\\ \dots+qm_q=k}} \frac{k!}{m_1!\dots m_q!} \Big(\frac{i\delta}{\pi}\Big)^{m_1+\dots+m_q} \times \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{(t-z)^2}\Bigg)^{m_1} \dots \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{(t-z)^{q+1}}\Bigg)^{m_q}\Bigg) + (i\lambda)^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{C}_+. \tag{17}$$

Тогда из формулы (16) получаем

$$\Big(e^{i\lambda z} S_\delta(z)\Big)^{(n)} = e^{i\lambda z} S_\delta(z) \psi_{\delta,n,\lambda}(z).$$

Очевидно, что $\psi_{\delta,n,\lambda} \in H(\mathbb{C}_+)$. Приступим к оценке этой функции. Из (17) имеем

$$|\psi_{\delta,n,\lambda}(z)| \le \sum_{k=1}^{n} C_n^k |\lambda|^{n-k} \Bigg(\sum_{\substack{m_1+2m_2+\\ \dots+qm_q=k}} \frac{k!}{m_1!\dots m_q!} \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{m_1+\dots+m_q} \times \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{|t-z|^2} \right)^{m_1+m_2+\dots+m_q} \frac{1}{y^{m_2+\dots+(q-1)m_q}} \Bigg) + |\lambda|^n. \tag{18}$$

В последнем неравенстве мы использовали оценку $|t-z| \ge y$, $z \in \mathbb{C}_+$, $t \in \mathbb{R}$. Учитывая равенство $m_2 + 2m_3 + \dots + (q-1)m_q = m_1 + 2m_2 + \dots + qm_q - m_1 - m_2 - \dots - m_q = k - p$, $p = m_1 + m_2 + \dots + m_q$, из оценки (18) получаем

$$|\psi_{\delta,n,\lambda}(z)| \le C(n,\lambda) \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{m_1+\dots+qm_q=k\\ p=m_1+\dots+m_q}} \frac{k!}{m_1!\dots m_q!} \frac{\delta^p (U(z))^p y^p}{y^k} \right) \right\}.$$

Теперь, применяя лемму 3, получаем нужное утверждение. □

Лемма 5. *Пусть* $S(z) = \exp\left(\frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+tz}{t-z} \frac{d\nu(t)}{1+t^2} \right)$ *— сингулярная внутренняя функция в* $\mathbb{C}_+$, $\delta > 1$. *Пусть далее*

$$\varphi_{N,n,\lambda,\delta}(z) = \frac{\left(S^\delta(z) e^{i\lambda z}\right)^{(n)} N^2}{(iN+z)^2}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Тогда существует последовательность $f_k \in H^\infty(\mathbb{C}_+) \cap H^1(\mathbb{C}_+) \cap A^1(m)$ *такая, что*

$$||f_k e_\lambda S - \varphi_{N,n,\lambda_1,\delta}||_{A^1(m)} \to 0 \quad \text{при } k \to +\infty$$

и при всех $m - n > -1$, $N > 0$, $\lambda_1 > \lambda \ge 0$.

Доказательство. По лемме 4

$$\varphi_{N,n,\lambda_1,\delta}(z) = S^\delta(z) e^{i\lambda_1 z} \psi_{n,\lambda_1,\delta}(z) \frac{N^2}{(iN+z)^2}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Следовательно, если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность из $H(\mathbb{C}_+)$, то мы имеем

$$f_k(z) e_\lambda(z) S(z) - \varphi_{N,n,\lambda_1,\delta}(z) = e_\lambda(z) S(z) \left(f_k(z) - \tilde{\varphi}_{N,n,\lambda_1,\lambda,\delta}(z) \right),$$

где $\tilde{\varphi}_{N,n,\lambda_1,\lambda,\delta}(z) = \frac{\varphi_{N,n,\lambda_1,\delta}(z)}{e_\lambda(z)S(z)}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Очевидно, что при $\lambda \geq 0$, $e_\lambda S \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$. Поэтому, учитывая, что класс функций $H^\infty(\mathbb{C}_+) \cap H^1(\mathbb{C}_+) \cap A^1(m)$ составляет всюду плотное множество в $A^1(m)$ при всех $m > -1$, достаточно доказать, что функция $\tilde{\varphi}_{N,n,\lambda_1,\lambda,\delta} \in A^1(m)$ при $m - n > -1$. С этой целью заметим, что

$$\tilde{\varphi}_{N,n,\lambda_1,\lambda,\delta}(z) = S^{\delta-1}(z)e^{i(\lambda_1-\lambda)z}\psi_{n,\delta,\lambda_1}(z)\frac{N^2}{(z+iN)^2}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Используя оценки из леммы 4, имеем

$$||\tilde{\varphi}_{N,n,\lambda_1,\lambda,\delta}||_{A^1(m)} = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}_{N,n,\lambda_1,\lambda,\delta}(x+iy)|\, y^m dxdy$$

$$+ \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}_{N,n,\lambda_1,\lambda,\delta}(x+iy)|\, y^m dxdy = I_1 + I_2.$$

Оценим каждый из этих интегралов. Оценка I_1

$$I_1 \leq \int\limits_0^1 y^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda_1-\lambda)y}|S(x+iy)|^{\delta-1}|\psi_{n,\delta,\lambda_1}(x+iy)|\frac{N^2}{(x^2+(y+N)^2)}dxdy.$$

Используя лемму 4, получаем

$$I_1 \leq c(n,\lambda_1)\sum_{p=1}^{n}\int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^{m-n}e^{-(\lambda_1-\lambda)y}$$
$$\times |S(x+iy)|^{\delta-1}\left(U(x+iy)\delta y\right)^p \frac{N^2}{x^2+(y+N)^2}dy.$$

Теперь, учитывая, что

$$|S(x+iy)| = \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{yd\nu(t)}{(x-t)^2+y^2}\right\},$$

положим

$$I_{1,p}=\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^{m-n}e^{-(\lambda_1-\lambda)y}\exp\bigg\{-(\delta-1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{yd\nu(t)}{y^2+(x-t)^2}\bigg\}$$
$$\times\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{y^2+(x-t)^2}d\nu(t)\bigg)^p\frac{\delta^pN^2dxdy}{x^2+(y+N)^2},\quad 1\le p\le n.$$

Очевидно, что

$$I_{1,p}\le\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^{m-n}\exp\bigg\{-(\delta-1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{y^2+(x-t)^2}d\nu(t)\bigg\}$$
$$\times\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{y^2+(x-t)^2}d\nu(t)\bigg)^p\frac{\delta^pN^2dxdy}{x^2+(y+N)^2}.$$

Учитывая, что при любом $A>0$, $\delta>1$ выполняется неравенство

$$e^{-A(\delta-1)}A^p\le\left(\frac{p}{\delta-1}\right)^pe^{-p}=c(p),\tag{19}$$

получаем

$$\begin{aligned}I_{1,p}&\le c(p)\int\limits_0^1y^{m-n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\delta^pN^2dx}{x^2+(y+N)^2}dy\\&=c(p)\delta^pN^2\int\limits_0^1\frac{y^{m-n}}{y+N}dy=c_1(p,\delta,N),\quad p=1,2,\dots,n.\end{aligned}\tag{20}$$

Поэтому $I_1\le C_2(\delta,N)$ при $m-n>-1$.

Перейдем к оценке I_2. Снова используя лемму 4, получаем

$$I_2\le c(n,\lambda_1)\sum_{p=1}^n\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^mN^2}{x^2+(N+y)^2}\bigg[\bigg(\delta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{yd\nu(t)}{(x-t)^2+y^2}\bigg)^p+1\bigg]$$
$$\times\exp\bigg\{-(\lambda_1-\lambda)y-(\delta-1)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{yd\nu(t)}{(x-t)^2+y^2}\bigg\}dxdy.$$

Отсюда, применяя оценку (19), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} I_2 &\le c_1(n,\lambda_1,\delta)\sum_{p=1}^{n}\int_{1}^{+\infty} y^m e^{-(\lambda_1-\lambda)y}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N^2}{x^2+(N+y)^2}dxdy \\ &\le c_2(n,\lambda_1,\delta)\int_{1}^{+\infty}\frac{y^m e^{-(\lambda_1-\lambda)y}N^2}{y+N}dy \le c_3(n,\lambda_1,\lambda,\delta)N. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь мы учли, что $\lambda_1 > \lambda \ge 0$. Из оценок (20) и (21) следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 6. *Пусть функция $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R})$, причём преобразование Фурье функции f удовлетворяет оценке* (5), *где λ — быстро растущий вес на $(0,+\infty)$. Пусть далее*

$$f_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt, \quad \textit{соответственно при } z \in \mathbb{C}_\pm.$$

Тогда $f_- \in C_A^\infty(\mathbb{C}_-)$, а функция $f_+\varphi_N \in H^1(\mathbb{C}_+)$ при всех $N > 0$, где, как и прежде, $\varphi_N(z) = \frac{N^2}{(iN+z)^2}$.

Доказательство. Используя тождество

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-itx}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt$$

и равенство Парсеваля (см. [10, с. 11]), легко видеть, что функция $f_-(z)$ допускает представление

$$f_-(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\hat{f}(t)e^{itz}dt.$$

Поэтому $f_- \in \mathbb{C}_A^\infty(\mathbb{C}_-)$.

Учитывая теорему Сохоцкого, получаем

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \tag{22}$$

почти всюду на $\mathbb{R}$, но поскольку $f_- \in L^\infty(\mathbb{R})$, то имеем $|f_+(x)| \le |f(x)| + |f_-(x)|$, т.е.

$$\frac{f_+(x)N^2}{N^2+x^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

По теореме В. И. Смирнова (см. [11, с. 72]) $\frac{f_+(z)N^2}{(iN+z)^2} \in H^1(\mathbb{C}_+)$. $\square$

Лемма 7. *Пусть* f_+ *и* f_- — *функции из леммы* 6, *причём*

$$f(z) = \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \ \ \psi_j \in H^\infty(\mathbb{C}_+), \ \ j = 1, 2.$$

Тогда, если $\psi_2(z) = e^{iaz}S(z)h(z)$, *где* $a \geq 0$, S — *сингулярная внутренняя функция,* h — *внешняя функция в* $\mathbb{C}_+$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_-(x)e^{iax}S(x)g(x)dx = 0 \quad \textit{для всех } g \in H^1(\mathbb{C}_+).$$

Доказательство. Умножим равенство (22) на $\varphi_N\psi_2$, тогда почти всюду на $\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f_+(x)\varphi_N(x)\psi_2(x) - f_-(x)\varphi_N(x)\psi_2(x) = \psi_1(x)\varphi_N(x).$$

По лемме 6 $f_+\varphi_N \in H^1(\mathbb{C}_+)$, $\psi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$. Но поскольку $f_-\varphi_N\psi_2$, $\psi_1\varphi_N \in L^\infty(\mathbb{R})$, то по теореме В. И. Смирнова $f_+\varphi_N\psi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$. Поэтому для произвольного $g \in H^1(\mathbb{C}_+)$

$$f_-(x)\varphi_N(x)\psi_2(x)g(x) = g(x)\varphi_N(x)\psi_2(x)f_+(x) - \psi_1(x)\varphi_N(x)g(x).$$

Отсюда легко видеть, что

$$g\varphi_N\psi_2 f_+ \in H^1(\mathbb{C}_+),$$

поэтому справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_-(x)\varphi_N(x)\psi_2(x)g(x)dx = 0,$$

т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_-(x)\varphi_N(x)e^{iax}S(x)h(x)g(x)dx = 0. \tag{23}$$

Поскольку по условию леммы $\psi_2 \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, то $h \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$. По известной теореме (см. [11, с. 90]) существует последовательность внешних функций $f_n \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ таких, что $\|f_n h\|_\infty \leq 1$, $f_n(x)h(x) \to 1$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Подбирая вместо $g(x)$ в равенстве (23) функции вида $f_n g$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_-(x)e^{iax}S(x)\varphi_N(x)g(x)dx = 0, \quad g \in H^1(\mathbb{C}_+). \tag{24}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $N \to +\infty$, получим утверждение леммы. □

Лемма 8. *Пусть* $\lambda(x) > 0$ *— монотонно растущая функция на* $(0, +\infty)$ *такая, что* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln \lambda(x)}{x^{3/2}} dx < +\infty$. *Тогда существует целая функция* $G(z)$ *порядка* $\frac{1}{2}$, *нормального типа,* $G(0) = G'(0) = 0$, $G(x) \neq 0$, $x < 0$,

$$|G(x)| \leq \frac{1}{\lambda(-x)}, \quad x \in \mathbb{R}_-. \tag{25}$$

Доказательство. Не ограничивая общность, будем предполагать, что $\lambda(x) > \exp(x^\beta)$ при $x > x_0$, где $0 < \beta < 1/2$. Действительно, в противном случае мы могли взять вместо $\lambda(x)$ функцию $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x)\exp(x^\beta)$, $x \geq 0$. Из условия леммы следует, что существует чётная целая функция $\tilde{F}(z)$ такая, что $|\tilde{F}(z)| \leq \exp(c|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, и $|\tilde{F}(x)| \leq \frac{1}{(\lambda(x^2))^2}$, $\tilde{F}(x) \neq 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (см. [4]).

Положим $F(z) = z^4 \tilde{F}(z)$. Ясно, что

$$|F(z)| \leq \exp(c_1|z|), \;\; z \in \mathbb{C}, \quad |F(x)| \leq \frac{c_2}{\lambda(x^2)}, \;\; F(x) \neq 0, \;\; x \in \mathbb{R},$$

при некотором c_2. Теперь определим G следующим образом: $G(z) = \frac{F(\sqrt{-z})}{c_2}$; тогда очевидно, что $|G(x)| = |F(\sqrt{-x})| \leq \frac{1}{\lambda(-x)}$. Поэтому функция G удовлетворяет всем условиям леммы. □

Следующая лемма установлена в работе [12].

Лемма 9. *Пусть* P *— монотонно растущая, непрерывная, положительная функция на* $(0, +\infty)$, *причём* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{P(r)}{r^2} dr < +\infty$ *и функция* $\frac{P(r)}{r}$ *монотонно убывает на* $\mathbb{R}_+$. *Тогда можно построить целую функцию экспоненциального типа такую, что*

$$|G(z)| \leq \exp\left(-P(|z|)\right); \quad G(z) \neq 0, \;\; z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}. \tag{26}$$

Лемма 10. *Пусть* G *— функция, построенная в лемме 8,* $G(z) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n A_{2n} z^n$, *где* A_{2n} *— коэффициенты разложения функции* F *из леммы 8, а*

$$H(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n A_{2n} n! z^n. \tag{27}$$

Тогда H *— целая функция экспоненциального типа, при этом*

$$\int\limits_{|t|<1} \frac{|H(it)|}{t^2} dt < +\infty.$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 8, формулы Стирлинга и соотношения между скоростью стремления к нулю коэффициентов разложения целой функции и ее ростом.

§2. Доказательство основных теорем

Сначала докажем теорему 1. Нетрудно видеть, что для доказательства теоремы 1 достаточно установить, что функция $f_-(z)$, построенная в лемме 6, тождественно равна нулю. С этой целью положим

$$\Phi(g) = \lim_{y\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(x-iy)g(x+iy)dx.$$

Согласно леммам 2 и 6, Φ является линейным непрерывным функционалом на пространствах $A^1(m)$, при всех $m \in \mathbb{Z}_+$. По лемме 7

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} e^{iax} S(x)g(x)f_-(x)dx = 0$$

при всех $\lambda \geq 0$, $g \in H^1(\mathbb{C}_+) \cap A^1(m)$. Учитывая леммы 2 и 5, получаем

$$\lim_{y\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} f_-(x-iy) \left(e^{i\lambda_1(x+iy)}) S^\delta(x+iy) \frac{N^2}{(iN+x+iy)^2} dx \right)^{(n)} = 0$$

$n = 0, 1, \dots$, $\delta > 1$, $\lambda_1 > a \geq 0$.

Пусть $\varphi_{N,\delta,\lambda}(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\lambda z} S^\delta(z) \frac{N^2}{(iN+z)^2}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Обозначим преобразование Фурье функции $\varphi_{N,\delta,\lambda}$ через $\hat{\varphi}_{N,\delta,\lambda}$. Согласно равенству Парсеваля (см. [10]),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)G(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(x)\hat{G}(-x)dx, \quad F, G \in L^2, \tag{28}$$

мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_-(x-iy)\varphi^{(n)}_{N,\delta,\lambda}(x+iy)dx = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{-,y}(x)\hat{\varphi}_{N,\delta,\lambda,y}(-x)x^n dx,$$

где $\hat{f}_{-,y}(x)$ — преобразование Фурье функции $f_-(x-iy)$, а $\hat{\varphi}_{N,\delta,\lambda,y}$ — преобразование Фурье функции $\varphi_{N,\delta,\lambda}(x+iy)$. Очевидно, по теореме Пэли–Винера (см. [1, с. 187])

$$f_-(x-iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \hat{f}_{-,y}(t)e^{itz}dt, \quad z = x+iy, \;\; y > 0,$$

$$\varphi_{N,\delta,\lambda}(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \hat{\varphi}_{N,\delta,\lambda}(t)e^{itz}dt, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Поэтому

$$\hat{\varphi}_{N,\delta,\lambda}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{N,\delta,\lambda}(t)e^{-itu}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S^\delta(t)\frac{N^2}{(iN+t)^2}e^{-it(u-\lambda)}dt = \hat{\varphi}_{N,\delta}(u-\lambda),$$

где $\varphi_{N,\delta}(x) = \varphi_{N,\delta,0}(x) = \frac{S^\delta(x)N^2}{(iN+x)^2}$.

Снова используя равенство (28), в итоге получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_-(x-iy)\varphi^{(n)}_{N,\delta,\lambda}(x+iy)dx = i^n \int\limits_{-\infty}^{0} \hat{f}_-(t)e^{2ty}\hat{\varphi}_{N,\delta}(-t-\lambda)t^n dt, \quad y > 0.$$

Теперь, применяя (24), приходим к равенствам

$$\lim_{y\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_-(t)\hat{\varphi}_{N,\delta}(-t-\lambda)e^{2ty}t^n dt = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots, \;\; \lambda > a \geq 0, \;\; \delta > 1.$$

Учитывая свойства функций $\hat{f}_-$ и $\hat{\varphi}_{N,\delta}$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \hat{f}_-(t)\hat{\varphi}_{N,\delta}(-t-\lambda)t^n dt = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \;\; \lambda > a \geq 0, \;\; \delta > 1.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$G(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\hat{f}_-(t)\hat{\varphi}_{N,\delta}(-t-\lambda)}{t+z^2}dt, \quad \operatorname{Im} z \neq 0,$$

и используем известный метод теории весовых приближений (см. [13]). Функция G голоморфна в верхней полуплоскости. Учитывая равенство

$$\frac{1}{t+z^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^k}{z^{2k+2}} + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{z^{2(n+1)}(t+z^2)},$$

получим

$$G(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{z^{2(n+1)}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\hat{f}_-(t)\hat{\varphi}_{N,\delta}(-t-\lambda)}{t+z^2} t^{n+1} dt.$$

Применяя неравенства Коши–Буняковского и Парсеваля, а также равенство $\hat{f}_-(t) = -\hat{f}(t)$ при $t \in \mathbb{R}_-$, имеем

$$\begin{aligned}
|G(z)| &\le \frac{1}{|z|^{2(n+1)}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{|\hat{f}(t)|^2 |t|^{2(n+1)}}{|z^2+t|^2} dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{0} |\hat{\varphi}_{N,\delta}(-t-\lambda)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&\le \frac{1}{|z|^{2(n+1)}} \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{2(n+1)}}{\lambda^2(-t)|z^2+t|^2} dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_{N,\delta}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \frac{2}{|z|^{2(n+1)}} \left(\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{t^{n+1}}{\lambda(t)} \right)^2 \frac{dt}{((x+\sqrt{t})^2+y^2)((x-\sqrt{t})^2+y^2)} \right)^{1/2} \\
&\times \left(\int_{0}^{+\infty} \frac{N^4}{(t^2+N^2)^2} dt \right)^{1/2} \le \frac{C(N)}{|z|^{2(n+1)}} \left(\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{2(n+1)} dt}{\lambda(t)^2 (y^2+t)} \right)^{1/2} \\
&\le \frac{C_1(N)}{|z|^{2(n+1)}} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left(\frac{t^{n+2}}{\lambda(t)} \right) = C_1(N) \frac{m_{n+2}}{|z|^{2(n+1)}}, \quad \operatorname{Im} z \ge 1.
\end{aligned}$$

Напомним, что m_n, $n \in \mathbb{N}$, определяются по формулам (3).

Отсюда

$$\frac{|G(z)|}{|z|^2} \le C_1(N) \frac{m_{n+2}}{|z|^{2(n+2)}}, \quad n = 1, 2, \dots, \ \operatorname{Im} z \ge 1.$$

Переходя к инфимуму по n и применяя теорему единственности для класса $N(\mathbb{C}_+)$ (см. [4]), получаем, что $G(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Таким же образом мы можем установить, что $G(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$. Поэтому

$$\hat{f}_-(t)\hat{\varphi}_{N,\delta}(-t-\lambda) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \ \lambda > a \ge 0.$$

Предположим теперь, что существует $x_0 \in (-\infty, 0)$ такое, что $\hat{f}(x_0)\neq 0$. Тогда из последнего равенства получаем

$$\hat{\varphi}_{N,\delta}(-x_0 - \lambda) = 0 \quad \text{при всех } \lambda > a \geq 0.$$

Поэтому $\hat{\varphi}_{N,\delta}(u) = 0$ при $u \leq |x_0| - a$. Следовательно, если $\inf\limits_{x \in supp\, \hat{f}} x = -\infty$, то $\hat{\varphi}_{N,\delta}(u) = 0$ при всех $u \in \mathbb{R}$. Поэтому $\varphi_{N,\delta} = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$, что невозможно. Следовательно, существует $-\infty < \alpha \leq 0$ такое, что $\hat{f}_-(x) = 0$ при всех $-\infty < x < \alpha$. Тогда

$$f_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{0} \hat{f}_-(t) e^{itx} dt,$$

т.е. f_- — целая функция экспоненциального типа, $\sup\limits_{z \in \mathbb{C}_-} |f_-(z)| = M < +\infty$.

Докажем, что

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\ln |f_-(iy)|}{y} \leq 0. \tag{29}$$

Отсюда по теореме Фрагмена–Линделефа $f_-(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Для этого используем равенство (22). Поскольку $f \in N(\mathbb{C}_+)$, то по теореме единственности $f(z) = f_+(z) - f_-(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$, т.е.

$$\begin{aligned} \ln |f_-(iy)| &\leq \ln^+ |f_-(iy)| \\ &\leq \ln 2 + \ln^+ |f(iy)| + \ln^+ |f_+(iy)| \leq \ln 2 + \ln^+ |f(iy)| + \frac{c}{y}. \end{aligned}$$

Отсюда, по условию теоремы $\overline{\lim\limits_{y \to +\infty}} \frac{\ln |f_-(iy)|}{y} \leq 0$, поэтому (29) выполнено, и $f_-(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, имеем

$$f_+(z) = \frac{\psi_1(z)}{e^{iaz} S(z) h(z)}, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Поскольку f_+ принадлежит классу В. И. Смирнова в верхней полуплоскости, то получаем $a = 0$, $S(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}_+$, и $f_+ \in L^1(\mathbb{R})$. Снова учитывая теорему В. И. Смирнова, получаем, что $f_+ \in H^1(\mathbb{C}_+)$. Первая часть теоремы установлена.

Докажем обратное утверждение. Пусть $G(z)$ — функция, построенная в лемме 8 и удовлетворяющая оценке (25), а $H(z)$ — целая функция, построенная в лемме 10. Положим

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} G(t) e^{itz} dt, \quad \operatorname{Im} z < 0. \tag{30}$$

Тогда, используя разложение целой функции $G(z)$ в степенной ряд и равенство (27), получим

$$f(z) = H\Big(\frac{1}{-iz}\Big), \quad z \in \mathbb{C},\ z \neq 0. \tag{31}$$

Докажем, что функция $f(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Очевидно, что

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt = \begin{cases} G(x), & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Поэтому $|\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{\lambda(|x|)}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Кроме того, по условию леммы 8 $\hat{f}(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}_-$. Докажем, что $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Используя равенство (30), имеем

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} |G(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\lambda(-x)} < +\infty.$$

Поэтому остается оценить $\int\limits_{|x|\geq 1} |f(x)| dx$. Но в силу равенства (31), имеем

$$\int\limits_{|x|\geq 1} |f(x)| dx = \int\limits_{|x|\geq 1} \left| H\left(-\frac{1}{ix}\right)\right| dx = \int\limits_{|x|\leq 1} \frac{|H(ix)|}{x^2} dx < +\infty.$$

Поскольку $H(z)$ — целая функция, $H(0) = H'(0) = 0$, то $f \in L^1(\mathbb{R})$. Остаётся доказать, что f — функция ограниченного вида в $\mathbb{C}_+$. Используя равенство (30), нетрудно установить, что $\sup\limits_{z \in \mathbb{C}_-} |f(z)| < +\infty$.

Учитывая (31), заметим, что $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}_-} |H(x)| < +\infty$. Применяя теорему Фрагмена–Линделефа, получим, что $\sup\limits_{\operatorname{Re} z < 0} |H(z)| < +\infty$.

Пусть теперь $\Phi(z) = H(z) e^{-Bz}$, $B > 0$, $z \in \mathbb{C}$, Φ — целая функция экспоненциального типа. Оценим ее в правой полуплоскости. Имеем

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |\Phi(iy)| = \sup_{y \in \mathbb{R}} |H(iy)| < +\infty.$$

В то же время

$$|\Phi(x)| = |H(x)|\, e^{-Bx}, \quad x > 0. \tag{32}$$

Учитывая, что $H(z)$ — целая функция экспоненциального типа, имеем $|H(z)| \leq c e^{\sigma |z|}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Поэтому из неравенства (32), подбирая $B > \sigma$, по теореме Фрагмена–Линделефа получаем

$$|H(z)| \le M|e^{Bz}|, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Учитывая равенство (31), отсюда получаем

$$|f(z)| = \Big|H\Big(\frac{i}{z}\Big)\Big| \le M_1\big|e^{\frac{iB}{z}}\big|, \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Поэтому $|f(x+iy)| \le M_1 e^{\frac{By}{x^2+y^2}}$, $y > 0$. Следовательно,

$$\sup_{0<y<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+|f(x+iy)|}{1+x^2}dx < +\infty,$$

т.е. f — функция ограниченного вида в верхней полуплоскости. □

Замечание 5. Отметим, что из доказательства видно, что для справедливости первой части теоремы вместо условия $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R})$ достаточно потребовать $f \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^{p_0}(\mathbb{R})$ для некоторого $1 \le p_0 \le 2$.

Доказательство теоремы 3. Пусть G — целая функция экспоненциального типа, построенная в лемме 9. Будем предполагать, что $P(r) \ge r^\beta$, $0 < \beta < 1$. Из построения следует, что $G \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ и $G \ne 0$, $z \in \mathbb{C}_+$, G — внешняя функция в верхней полуплоскости. Учитывая оценку (26) и положив $F(z) = G(z) \cdot f(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$, заметим, что $F \in N(\mathbb{C}_+) \cap L^1(\mathbb{R})$. Оценим $F^{(n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Применив формулу Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} |F^{(n)}(x)| &\le \sum_{k=0}^{n} C_n^k |f^{(n-k)}(x)| \cdot |G^{(k)}(x)| \\ &\le A_f^n M_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k |G^{(k)}(x)|, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F^{(n)}(x)|dx \le A_f^n M_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_{-\infty}^{+\infty} |G^{(k)}(x)|dx. \tag{33}$$

Но поскольку G — целая функция экспоненциального типа, то, согласно неравенству типа Бернштейна (см. [14, с. 190]),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G^{(k)}(x)|dx \le \sigma^k \int_{-\infty}^{+\infty} |G(x)|dx \le 2\sigma^k \int_{0}^{+\infty} e^{-P(r)}dr = C\sigma^k.$$

Теперь, учитывая оценку (33), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F^{(n)}(x)|dx \leq A_f^n M_n C \sum_{k=0}^{+\infty} C_n^k \sigma^k,$$

т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F^{(n)}(x)|dx \; le A_f^n M_n C\,(1+\sigma)^n = A_{1,f}^n M_n, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье функции F. Имеем

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-itx} dt.$$

Интегрируя по частям этот интеграл, получаем

$$\hat{F}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}(ix)^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{(n)}(t) e^{-itx} dt,$$

откуда

$$\left|\hat{F}(x)\right| \leq \frac{A_1^n M_n}{|x|^n}, \quad n = 1,2,\dots,\; x \in \mathbb{R}.$$

Подбирая n соответствующим образом, получаем

$$|\hat{F}(x)| \leq \frac{1}{T\left(\frac{|x|}{A_1}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Заметим также, что

$$\ln|F(iy)| = \ln|f(iy)| + \ln|G(iy)|.$$

Учитывая оценки (9), (26), отсюда получаем

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}} \frac{\ln|F(iy)|}{y} \leq 0.$$

Следовательно, все условия теоремы 1 выполнены. Применяя эту теорему, получаем, что $\hat{F}(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}_-$. При этом $F \in H^1(\mathbb{C}_+)$, но поскольку G — внешняя функция, а $f \in L^1(\mathbb{R})$, то по теореме В. И. Смирнова $f \in H^1(\mathbb{C}_+)$. Поэтому f в верхней полуплоскости представима интегралом Пуассона, т.е.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}}\right) dt, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Отсюда

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f^{(n)}(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(t) \frac{y}{(x-t)^2+y^2} dt,$$

и, следовательно,

$$|f^{(k)}(x+iy)| \le A_f^k M_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Чтобы установить обратное утверждение, остается применить леммы 8 и 10 и в точности повторить рассуждения, применяемые при доказательстве второй части теоремы 1. □

Таким же образом устанавливается

Теорема 4. *Пусть $f \in N(\mathbb{C}_+)$, причём $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(n)}(t)| dt \le A_f^n M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Предположим далее, что выполняются условия (9), (10). Тогда $f \in H^1(\mathbb{C}_+)$, при этом справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(n)}(x+iy)| dx \le A_f^n M_n, \quad y > 0, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Из теорем 1 и 3 следует уточнение теоремы Р. Салинаса (см. [15]).

Теорема 5. *Пусть $g \in C^\infty(M_n)$, причём существует функция $f \in N(\mathbb{C}_+)$ такая, что почти всюду*

$$\lim_{y \to 0} f(x+iy) = g(x).$$

Предположим далее, что выполняются условия (9), (10). Тогда если $g^{(n)}(x_0) = 0, n = 0, 1, \ldots$ при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$, то $g(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Список литературы

[1] Гофман К., *Банаховы пространства аналитических функций*, ИЛ, М., 1963.

[2] Duren P., *Theory of H^p spaces*, Pure Appl. Math., vol. 38, Acad. Press, New York–London, 1970.

[3] Шамоян Ф. А., *О преобразовании Фурье функций ограниченного вида*, Научная конференция, посвященная столетию со дня рождения академика И. Г. Петровского: Тез. докл., БГУ, Брянск, 2001, с. 27–28.

[4] Мандельбройт С., *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения*, ИЛ, М., 1955.

[5] Kahane J.-P., Katznelson Y., *Sur le comportement radial des fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), A718–A719.

[6] Шамоян Ф. А., *Характеристика скорости убывания коэффициентов Фурье функций ограниченного вида и классы аналитических функций с бесконечно дифференцируемыми граничными значениями*, Сиб. мат. ж. **36** (1995), №4, 943–953.

[7] Хермандер Л., *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.

[8] Джрбашян М. М., Джрбашян А. Э., *Интегральное представление для некоторых классов аналитических функций в полуплоскости*, Докл. АН СССР **285** (1985), №3, 547–550.

[9] Бурбаки Н., *Функции действительного переменного*, Наука, М., 1965.

[10] Винер Н., Пэли Р., *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964.

[11] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[12] Джрбашян М. М., *Об асимптотическом приближении целыми функциями в полуплоскости*, Докл. АН СССР **111** (1956), №4, 749–752.

[13] Мергелян С. Н., *Весовые приближения многочленами*, Успехи мат. наук **11** (1956), №5, 107–152.

[14] Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.

[15] R.-Salinas B., *Functions with null moments*, Rev. Acad. Ci. Madrid **49** (1955), 331–368.

Поступило 5 июля 2007 г.

Брянский
государственный университет
241050, Брянск
Россия
E-mail: shamoyan@tu-bryansk.ru