V. G. Chirskiĭ, Estimates of linear forms and polynomials in polyadic numbers, *Chebyshevskii Sb.*, 2011, Volume 12, Issue 4, 129–133

https://www.mathnet.ru/eng/cheb116

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511.36

ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ И МНОГОЧЛЕНОВ ОТ СОВОКУПНОСТЕЙ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В. Г. Чирский (г. Москва)

Аннотация

В работе получены оценки снизу полиадического расстояния от O для линейных форм и многочленов с целыми коэффициентами от некоторых совокупностей полиадических чисел.

ESTIMATES OF LINEAR FORMS AND POLYNOMIALS IN POLYADIC NUMBERS

V. G. Chirskii(Moscow)

Abstract

The paper presents estimates from below of the polyadic distance from zero for linear forms and polynomials with integer coefficients in certain polyadic numbers.

На кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел можно ввести топологию τ, рассматривая множество идеалов (m)в качестве полной системы окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. При этом операции сложения и умножения непрерывны и кольцо целых чисел с введенной топологией имеет структуру топологического кольца (см. [1], [2]). Обозначив это кольцо $\mathbb{Z}_\tau$. На кольце $\mathbb{Z}_\tau$ можно ввести метрику (см. [1], [3]), положив

$$\rho(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta_m(x,y)}{2^m}, \tag{1}$$

где

$$\delta_m(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x\equiv y(\mathrm{mod} m),\\ 1, & \text{если } x\not\equiv y(\mathrm{mod} m).\end{cases} \tag{2}$$

Бесконечная последовательность $x_1, x_2, \ldots$ целых чисел называется фундаментальной, если для любого $k\in\mathbb{N}$ существует $\mathcal{N}\in\mathbb{N}$ такое, что для всех $m,n>\mathcal{N}$ справедливо сравнение $x_m\equiv x_n(\mathrm{mod} k!)$.

Метрическое пространство $\mathbb{Z}_\tau$ не является полным. Например, последовательность $1!, 1!+2!, \ldots, 1!+2!+\ldots+n!, \ldots$ является фундаментальной, но не

имеет предела в $\mathbb{Z}_\tau$. Для фундаментальных последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ рассмотрим последовательности $\{x_k + y_k\}$, $\{x_k - y_k\}$, $\{x_k \cdot y_k\}$. Эти последовательности также являются фундаментальными. Таким образом, фундаментальные последовательности элементов из кольца $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.
Будем называть последовательность $c_1, c_2, \dots$ нулевой последовательностью, если $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$.

Назовем фундаментальные последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ эквивалентными, если их разность $\{x_k - y_k\}$ является нулевой последовательностью. Это свойство является рефлексивным, симметричным и транзитивным, т.е. определяет отношение эквивалентности.
Полиадическим числом будем называть класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Z}_\tau$.

Легко проверить, что если последовательность $\{x_k\}$ эквивалентна последовательности $\{u_k\}$, а последовательность $\{y_k\}$ эквивалентна $\{v_k\}$, то $\{x_k + y_k\}$ эквивалентна $\{u_k+v_k\}$, $\{x_k-y_k\}$ эквивалентна $\{u_k-v_k\}$, $\{x_k\cdot y_k\}$ эквивалентна $\{u_k \cdot v_k\}$. Поэтому на множестве полиадических чисел можно ввести операции сложения и умножения, что позволяет говорить о кольце $\mathfrak{G}$ целых полиадических чисел. Вложение кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{G}$ осуществляется сопоставлением элементу $x \in \mathbb{Z}$ класса $\mathfrak{x}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных последовательности $x, x, x, \dots$.

Так как $\mathbb{Z}_\tau$ - метрическое пространство, его пополнение приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$. Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ можно метризовать. Пусть $\mathfrak{x} \in \mathfrak{G}_\tau$ состоит из последовательностей $\{x_k\}$, а $\mathfrak{y} \in \mathfrak{G}_\tau$ - последовательностей $\{y_k\}$.

Определим
$$\rho(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k), \tag{3}$$
где расстояние $\rho(x_k, y_k)$ между элементами $x_k, y_k \in \mathbb{Z}_\tau$ определено равенством (1).

Элементы $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_t$ имеют каноническое представление в виде ряда
$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{4}$$
где $a_n \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом $\mathbb{Z}_{p_i}$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n - сумма цифр в p - ичном разложении числа n. Следовательно, для любого p_i при $n \to \infty$
$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \to 0,$$
что является достаточным условием сходимости ряда (4) в $\mathbb{Z}_{p_i}$.

Одной из задач теории трансцендентных чисел является задача получения оценки снизу для линейных форм и многочленов от совокупностей чисел.

Рассмотрим совокупность $\overline{\mathfrak{a}}$ полиадических чисел $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_m$. Обозначим

$$L(\overline{\mathfrak{a}}) = h_1\mathfrak{a}_1 + \ldots + h_m\mathfrak{a}_m\,, \tag{5}$$

где $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{Z},\ H = max_{i=1,\ldots,m}|h_i|$.

Число H называют высотой линейной формы (5).

Теорема 1. *Пусть существует число H_0 такое, что для любой линейной формы (5), коэффиценты которой удовлетворяют условию $H \geqslant H_0$, существует интервал $(a(H), b(H))$, где $a(H) < b(H)$, $a(H), b(H)$ - возрастающие функции и существует простое число p, $p \in (a(H), b(H))$ такое, что*

$$|L(\overline{\mathfrak{a}})|_p > p^{-r(p,H)}$$

при некотором $r(p, H) \in \mathbb{N}$. Тогда существуют последовательность чисел H_k, $H_k \in \mathbb{N}$, последовательность простых чисел p_k и последовательность чисел $r_k = r(p_k, H_k)$ такие, что определенное равенством (3) расстояние $\rho(L(\overline{\mathfrak{a}}), 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(L(\overline{\mathfrak{a}}), 0) \geqslant \sum_{m\in M} \frac{1}{2^m}, \tag{6}$$

где $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, а множество M_k состоит из натуральных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел $p_i^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Пусть $H \geqslant H_0$. Положим $H_1 = H$, $\gamma_1 = 1$, а число p_1 положим равным тому простому числу p, существование которого требуется в условии теоремы. Предполагая, что для числа $k \geqslant 2$ уже выбраны все числа H_l, γ_l, p_l, $l \leqslant k-1$, выберем число $\gamma_k \in \mathbb{N}$ так, что для $H_k = \gamma_k H$ выполняется условие

$$b(H_{k-1}) \leqslant b(H_k). \tag{7}$$

Этого можно добиться, так как функции $a(x)$ и $b(x)$ возрастают по условию.

Рассмотрим линейную форму $L_k(\overline{\mathfrak{a}}) = \gamma_k L(\overline{\mathfrak{a}})$. Ее высота равна $H_k = \gamma_k H_k$ удовлетворяет неравенству $H_k \geqslant H_0$.

По условию теоремы, в интервале $(a(H_k), b(H_k))$ существует простое число p_k такое, что

$$|L_k(\overline{\mathfrak{a}})|_{p_k} > p_k^{-r_k}, \tag{8}$$

причем, ввиду (7), число p_k отлично $p_1, \ldots, p_{k-1}$. Так как $L_k(\overline{\mathfrak{a}}) = \gamma_k L(\overline{\mathfrak{a}})$ и $\gamma_k \in \mathbb{N}$, из (8) следует неравенство

$$|L(\overline{\mathfrak{a}})|_{p_k} > p_k^{-r_k},$$

откуда в виду сделанных предположений, получим

$$|L(\overline{\mathfrak{a}})|_{p_l} > p_l^{-r_l}, l = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь произведение

$$\prod_{l=1}^{k} p_l^{-r_l} \tag{10}$$

и выберем число $N_k \in \mathbb{N}$ так, чтобы число $N_k!$ делилось на число (10).

Предположим, что $\mathfrak{a}_i \in \mathfrak{G}_\tau$ имеет вид

$$\mathfrak{a}_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,i} n!,\ a_{n,i} \in \{0, 1, \ldots, n\}, i = 1, \ldots, n$$

и обозначим

$$\mathfrak{a}_{i,N_k} = \sum_{n=1}^{N_k} a_{n,i} n!. \tag{11}$$

Ввиду свойств p - адического нормирования и неравенств (9), для всех $l = 1, \ldots, k$ выполняется неравенство

$$|L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k})|_{p_l} > p_l^{-r_l}. \tag{12}$$

Кроме того из (11), (5) следует что $L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k}) \in \mathbb{Z}$.

Оценим определенное равенством (1) расстояние $\rho(L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k}), 0)$. Из неравенств (12) следует, что $L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k})$ не делится ни на одно из чисел $p_i^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Поэтому из (2)следует, что если $m \in \mathbb{N}$ делится хотя бы на одно из чисел $p_i^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$, то

$$\delta_m(L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k}), 0) = 1.$$

Значит,

$$\rho(L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k}), 0) \geqslant \sum_{m \in M_k} \frac{1}{2^m}, \tag{13}$$

где, как определено в формулировке теоремы, множество M_k состоит из чисел m, которые делятся хотя бы на одно из чисел $p_i^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Так как $M_{k+1} \supset M_k$ для любого k и так как при $k \to \infty$

$$L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k}) \to L(\overline{\mathfrak{a}})$$

в кольце $\mathfrak{G}_\tau$ по определению (3) получим, что неравенство (6) и следовательно, теорема доказаны.

Замечание **1.** *Правую часть неравенства (13) можно представить, как разность двух чисел, причем уменьшаемое число представляет собой сумму всех геометрических прогрессий, знаменатели которых представляют собой число 2, возведенное в степень, равную произведению нечетного числа различных множителей вида $p_i^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Вычитаемое число имеет аналогичную структуру, но степень числа 2 равна произведению четного числа таких множителей.*

Теорема 2. *Пусть существует H_0 такое, что для любого отличного от тождественного нуля многочлена $P(\overline{x}) = P(x_1, \ldots, x_m)$ степени d по совокупности переменных и высоты H, удовлетворяющей условию $H \geqslant H_0$, существует интервал $(a(H), b(H))$, $a(H) < b(H)$, $a(H), b(H)$ - возрастающие функции и существует простое число p, $p \in (a(H), b(H))$ такое, что*

$$|P(\overline{\mathfrak{a}})|_p > p^{-r(p,d,H)}$$

при некотором $r(p, d, H) \in \mathbb{N}$. Тогда существует последовательность чисел H_k, $H_k \in \mathbb{N}$, последовательность простых чисел p_k и последовательность чисел $r_k = r(p_k, d, H_k)$ такие, что расстояние $\rho(P(\overline{\mathfrak{a}}), 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(P(\overline{\mathfrak{a}}), 0) \geqslant \sum_{m \in M} \frac{1}{2^m}, \tag{14}$$

где $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, а множество M_k состоит из натуральных чисел, которые делятся хотя бы на одно из чисел $p_i^{r_i}$, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство теоремы 2 совпадает с доказательством теоремы 1, в котором все велечины $L(\overline{\mathfrak{a}})$, $L(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k})$ заменены, соответственно на $P(\overline{\mathfrak{a}})$, $P(\overline{\mathfrak{a}}_{N_k})$, что и доказывает неравенство (14).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М. Наука. 1971.

[2] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М. Наука. 1984 .

[3] Новоселов Е. В. Топологическая теория делимости целых чисел. Учен. зап. Елабуж. гос. пед. ин-та 3, 1960, С. 3 – 23.

Московский педагогический государственный университет
Поступило 23.12.2011