В. К. Дзядык, Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1974, том 38, выпуск 4, 937–967

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТОМ 38, № 4, 1974

УДК 517.5

В. К. ДЗЯДЫК

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье предложен эффективный метод приближенного решения линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами, у которых на рассматриваемом сегменте коэффициент $a_0(x)$ при старшей производной отличен от нуля. В качестве приближающего аппарата искомого решения $y(x)$ служит некоторая последовательность многочленов $y_n(x)$. Доказано, что построенные многочлены при $a_0(x)=\mathrm{const}$ осуществляют в метрике L^2 с чебышевским весом асимптотически наилучшее приближение функции $y(x)$, а в общем случае обладают тем свойством, что

$$\|y(x)-y_n(x)\|_C \leqslant AE_n(y)_C, \quad E_n(y)_C=\inf_{c_k}\|y(x)-\sum_0^n c_kx^k\|, \quad A=\mathrm{const}.$$

Введение

Пусть на некотором сегменте $[-h, h]$, $h>0$, задано произвольное линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами вида

$$a_0(x)y^{(k)}+a_1(x)y^{(k-1)}+\ldots+a_k(x)y=f_m(x), \tag{1}$$

где $a_j(x)$, $j=0, 1, \ldots, k$, и $f_m(x)$ — некоторые алгебраические многочлены, первый из которых $a_0(x)$ удовлетворяет условию

$$a_0(x)\geqslant c=\mathrm{const}>0, \tag{2}$$

а последний $f_m(x)$ имеет степень не выше m. Будем считать, что решение $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям

$$y^{(j)}(0)=y_j, \quad j=0,1,\ldots,k-1, \tag{3}$$

где y_j — произвольные фиксированные числа.

Чтобы построить многочлен хорошего приближения для $y(x)$, в литературе чаще всего записывают решение $y(x)$ в виде ряда Тэйлора с неопределенными коэффициентами вида

$$y(x)=\sum_0^\infty c_jx^j \tag{4}$$

и затем, найдя первые $n+1$ коэффициентов, получают многочлен Тэйлора

$$t_n(x) = \sum_0^n c_j x^j, \tag{5}$$

который в наиболее важном случае, когда в (4) отличные от нуля коэффициенты c_j по модулю достаточно быстро убывают и $c_{n+1} \neq 0$, приближает решение $y(x)$, как правило, таким образом, что при этом выполняются неравенства:

$$\begin{gathered} A_1 |c_{n+1}| h^{n+1} \leqslant \|y(x) - t_n(x)\|_{C[-h,h]} \leqslant A_2 |c_{n+1}| h^{n+1}, \\ A_i = \mathrm{const}, \quad 0 < A_1 \leqslant A_2. \end{gathered} \tag{6}$$

Известно [см., например, ([1]), стр. 47—48], что многочлены Тэйлора $t_n(x)$ являются достаточно плохим аппаратом для приближенного решения уравнений вида (1) (на конечном отрезке $[-h, h]$). Так, например, если решение $y(x)$ уравнения (1) является целой функцией, то [см. ([2]), стр. 78] найдется бесконечное множество значений n, при которых частные суммы $S_n^h(y;\, x)$ n-го порядка ряда Фурье — Чебышева, в который разлагается на $[-h, h]$ решение $y(x)$, приближают $y(x)$ таким образом, что

$$\|y(x) - S_n^h(y;\, x)\|_{C[-h,h]} \leqslant \frac{|c_{n+1}|}{2^n} h^{n+1} \sim E_n(y)_C, \tag{7}$$

т. е., грубо говоря, многочлены Тэйлора $t_n(x)$ дают примерно в 2^n раз худшее приближение, чем многочлены $P_n^*(x)$ степени n наилучшего приближения функции $y(x)$.

К сожалению, коэффициенты A_k ряда Фурье — Чебышева при помощи которых можно построить многочлены $S_n^h(y;\, x)$, выражаются по формуле

$$A_k = A_k(y) = \frac{2}{\pi h} \int_{-h}^{h} \frac{y(x) T_k\left(\frac{x}{h}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{h}\right)^2}}\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(h \cos t) \cos kt\, dt, \quad T_k(x) = \cos k \arccos x, \tag{8}$$

т. е. представляют собой интегралы, ни один из которых, как правило, точно вычислен быть не может.

В этой статье мы предлагаем и исследуем очень простой и эффективный метод, который будем называть аппроксимационным. Этот метод дает возможность при каждом натуральном $n \geqslant m$ строить алгебраический многочлен $y_n(x) = y_n(x;\, h)$ степени не выше n, который во многих важных случаях осуществляет приближение решения $y(x)$ уравнения (1), совпадающее, с точностью до множителя $1 + \frac{A}{n^2}$, $A = \mathrm{const}$, с величиной $E_n(y)$ наилучшего приближения функции $y(x)$, а в общем случае обладает тем свойством, что

$$\|y(x)-y_n(x)\|_{C[-h,h]}\leqslant AE_n(y), \quad A=\text{const}. \tag{9}$$

Установлено, что при любом $n\geqslant m$ коэффициенты многочлена $y_n(x)$ просто выражаются в виде линейных комбинаций из $l+1$ вспомогательных параметров t_i, где через l обозначено наименьшее целое неотрицательное число (не зависящее от n), обладающее тем свойством, что при всех $s=0, 1, \ldots, k$ степень каждого из многочленов $a_s(x)$ в (1) не превышает числа $l+1-s$ и что параметры t_i, в свою очередь, находятся как решение системы из $l+1$ линейных уравнений с отличным от нуля определителем.

В § 1 этой статьи получен ряд общих результатов для одного класса линейных уравнений Вольтерра, в § 2 результаты § 1 применены к приближению функции $y(x)$, являющейся решением уравнения (1), а также к приближению функции $y^{(k)}(x)$. В § 3 приведено, в качестве примеров, применение развитого метода к приближению элементарных и некоторых специальных функций.

Истоки развитого в этой статье метода содержатся в работах автора ([3]) и ([4]).

§ 1. О приближении алгебраическими многочленами решений одного класса линейных уравнений Вольтерра с рациональными ядрами

В этом параграфе мы рассмотрим на некотором сегменте $[-h, h]$, $h>0$, эквивалентное задаче Коши (1), (3) линейное интегральное уравнение Вольтерра вида

$$y(x)=\int_0^x \frac{P_l(x;t)}{a_{l+1}^0(x)}\,y(t)\,dt+\frac{f_m(x)}{a_{l+1}^0(x)}, \tag{1.1}$$

в котором $a_{l+1}^0(x)$ и $f_m(x)$ представляют собою многочлены соответственно степеней $\leqslant l+1$ и m, где l и m — некоторые неотрицательные целые числа, при условии, что для $a_{l+1}^0(x)$ выполняется условие

$$\min_{|x|\leqslant h} a_{l+1}^0(x)=c=\text{const}>0, \tag{1.2}$$

а $P_l(x, t)$ — многочлен по переменным x и t, сумма показателей которого при x и t не превышает числа l:

$$P_l(x;t)=\sum_{i+j\leqslant l} a_{ij}x^it^j=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i} a_{ij}x^it^j. \tag{1.3}$$

Для уравнений такого вида мы здесь получим ряд общих теорем, которые по существу составляют главное содержание настоящей статьи. Введем предварительно некоторые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1. Определение 1.1. Для произвольной суммируемой при весе $\left[1-\left(\frac{\zeta}{h}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ на $[-h, h]$ с квадратом функции $f(\zeta)$, или, соответстенно, $F(x;\zeta)$, где x — параметр, обозначим через $A_k = A_k(f)$, или, соответственно, $A_k = A_k(F; x)$, коэффициенты ее ряда Фурье — Чебышева, которые вычисляются по формулам (8), а через $S_n^h(f; t)$, или, соответственно, $S_n^h(F; x; t)$, — частные суммы n-го порядка данного ряда Фурье — Чебышева:

$$S_n^h(f;t) = \frac{1}{2}A_0(f) + \sum_1^n A_k(f)T_k\left(\frac{t}{h}\right), \quad S_k^h(F;x;t) = \frac{1}{2}A_0(F;x) + \sum_1^n A_k(F;x)T_k\left(\frac{t}{h}\right), \tag{1.4}$$

$$T_k(t) = \cos k \arccos t.$$

2. Будем искать многочлены $y_n(x)$ степеней $n \geqslant \max\{0;\ m-l-1\}$, которые хорошо приближают решение $y(x)$ интегрального уравнения (1.1). С этой целью, несколько обобщая процесс, рассмотренный в статье ([3]), поставим при каждом n интегральному уравнению (1.1) в соответствие операторное уравнение вида

$$y_n(x)\,a_{l+1}^0(x) = S_n^h\left\{\int_0^\zeta P_l(\zeta;t)\,y_n(t)\,dt + f_m(\zeta);\ x\right\}. \tag{1.5}$$

В силу этого равенства при $0 \leqslant m \leqslant n+l+1$ у многочленов (степени $n+l+1$) $y_n(x)\,a_{l+1}^0(x)$ и $\int_0^x P_l(x;t)\,y_n(t)\,dt + f_m(x)$ при разложении в ряд Фурье — Чебышева совпадают все их коэффициенты до порядка n включительно. Потому если уравнение (1.5) имеет решение, то должно иметь решение также уравнение

$$y_n(x)\,a_{l+1}^0(x) = \int_0^x P_l(x;t)\,y_n(t)\,dt + f_m(x) - \varepsilon_n(x), \quad m \leqslant n+l+1, \tag{1.5'}$$

где

$$\varepsilon_n(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_{n+i} T_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right) \tag{1.6}$$

и τ_{n+i} — некоторые неизвестные нам числа (вспомогательные параметры), и наоборот. В дальнейшем именно уравнение (1.5′) будет служить предметом нашего рассмотрения.

3. Отправляясь от двух произвольных чисел a и b, введем обозначения

$$\underline{(a,b)} = \min\{a;b\}, \quad \overline{(a,b)} = \max\{a,b\}. \tag{1.7}$$

4. Отправляясь от чисел c_j, $j=0,1,\ldots,n$, и $t_\nu^{(n+i)}$, $i=1,2,\ldots,l+1$, $\nu=0,1,\ldots,n+i$, образуем для всех $j,\nu=0,1,-1,2,-2,\ldots$ числа $\overset{0}{c}_j$ и $\overset{0}{t}{}_\nu^{(n+i)}$ по формулам:

$$\begin{gathered}\overset{0}{c}_j=\begin{cases}c_j, & \text{если } 0\leqslant j\leqslant n,\\ 0, & \text{если } j<0 \text{ или } j>n,\end{cases}\\ \overset{0}{t}{}_\nu^{(n+i)}=\begin{cases}t_\nu^{(n+i)}, & \text{если } 0\leqslant\nu\leqslant n+i,\\ 0, & \text{если } \nu>n+i.\end{cases}\end{gathered}\tag{1.8}$$

Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1 (теорема существования для малого промежутка).

1. *При любых фиксированном n и достаточно малых $h>0$ существует единственная система чисел $\tau_{n+1}, \tau_{n+2}, \ldots, \tau_{n+l+1}$, при которой решением уравнения (1.5′) является некоторый многочлен степени n:*

$$y_n(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jx^j.\tag{1.9}$$

2. *Числа τ_{n+i}, $i=1,2,\ldots,l+1$, определяются из системы $l+1$ линейных уравнений, определитель которой отличен от нуля, а коэффициенты c_j многочлена $y_n(x)$ представимы в виде линейных комбинаций с известными коэффициентами от чисел τ_{n+i} и коэффициентов многочлена $f_m(x)$ и, следовательно, также просто вычисляются.*

Доказательство. Положим

$$a_{l+1}^0(x)=\sum_0^{l+1}a_ix^i,\quad f_m(x)=\sum_0^m f_ix^i,\quad T_{n+j}(x)=\sum_{i=0}^{n+j}t_i^{(n+j)}x^i\tag{1.10}$$

и покажем, что если в уравнении (1.5′) вместо $y_n(x)$ и $\varepsilon_n(x)$ подставить их выражения из (1.9) и (1.6) с неопределенными коэффициентами, то это уравнение при достаточно малых $h>0$ будет обращаться в тождество при некоторых вполне определенных значениях c_j и τ_{n+i}.

Действительно, на основании соотношений (1.10), (1.9) и (1.8) находим:

$$\begin{gathered}a_{l+1}^0(x)\,y_n(x)=\sum_{i=0}^{l+1}a_i\sum_{j=0}^{n}c_jx^{i+j}=\sum_{i=0}^{l+1}a_i\sum_{\nu=i}^{n+i}c_{\nu-i}x^\nu=\\ =\sum_{i=0}^{l+1}\sum_{\nu=0}^{n+l+1}a_i\overset{0}{c}_{\nu-i}x^\nu=\sum_{\nu=0}^{n+l+1}\left(\sum_{i=0}^{l+1}a_i\overset{0}{c}_{\nu-i}\right)x^\nu.\end{gathered}$$

Отсюда, учитывая, что в силу (1.8) имеют место равенства $\overset{0}{c}_{\nu-i}=0$ при $\nu-i<0$ и при $\nu-i>n$, или, что то же самое, $\overset{0}{c}_{\nu-i}=0$ при $i<\nu-n$ и при $i>\nu$, получаем:

$$a_{l+1}^0(x)\,y_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n+l+1}\left(\sum_{i=\overline{(0,\nu-n)}}^{\underline{(l+1,\nu)}}a_ic_{\nu-i}\right)x^\nu.\tag{1.11}$$

Аналогично, на основании соотношений (1.3), (1.9) и (1.8), полагая, что при $\overset{0}{c}_j=0$ будет $\frac{\overset{0}{c}_j}{0}\overset{\mathrm{df}}{=}0$, найдем:

$$\int_0^x P_l(x;\,t)\,y_n(t)\,dt=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}\sum_{k=0}^{n}a_{ij}c_k\frac{x^{i+j+k+1}}{j+k+1}=$$

$$=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}\sum_{\nu=i+j+1}^{i+j+n+1}a_{ij}c_{\nu-i-j-1}\frac{x^{\nu}}{\nu-i}=\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{l-i}\sum_{\nu=1}^{n+l+1}a_{ij}\overset{0}{c}_{\nu-i-j-1}\frac{x^{\nu}}{\nu-i}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n+l+1}\left(\sum_{i=0}^{l}\frac{1}{\nu-i}\sum_{j=0}^{l-i}a_{ij}\overset{0}{c}_{\nu-i-j-1}\right)x^{\nu}.$$

Учитывая опять, что в силу (1.8) $\overset{0}{c}_{\nu-i-j-1}=0$ при $\nu-i-j-1<0$ и при $\nu-i-j-1>n$, или, что то же самое, $\overset{0}{c}_{\nu-i-j-1}=0$ при $i+j>\nu-1$ и, значит, при $i>\nu-1$ или $j>\nu-i-1$ и при $j<\nu-n-i-1$, перепишем полученное равенство в виде

$$\int_0^x P_l(x,\,t)\,y_n(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{n+l+1}\left(\sum_{i=0}^{\overline{(l,\nu-1)}}\frac{1}{\nu-i}\sum_{j=\underline{(\nu-n-i-1,0)}}^{\overline{(l-i,\nu-i-1)}}a_{ij}c_{\nu-i-j-1}\right)x^{\nu}. \tag{1.12}$$

Согласно (1.10) и (1.6) мы, опять полагая $\overset{0}{t}{}_i^{(n+j)}=t_i^{(n+j)}$, если $0\leqslant i\leqslant n+$ $+j$, и $\overset{0}{t}{}_i^{(n+j)}=0$, если $i>n+j$, получим:

$$T_{n+j}\left(\frac{x}{h}\right)=\sum_{\nu=0}^{n+j}\frac{t_{\nu}^{(n+j)}}{h^{\nu}}x^{\nu}, \tag{1.13}$$

$$\varepsilon_n(x)=\sum_{j=1}^{l+1}\tau_{n+j}\sum_{\nu=0}^{n+j}\frac{t_{\nu}^{(n+j)}}{h^{\nu}}x^{\nu}=$$

$$=\sum_{j=1}^{l+1}\tau_{n+j}\sum_{\nu=0}^{n+l+1}\frac{\overset{0}{t}{}_{\nu}^{(n+j)}}{h^{\nu}}x^{\nu}=\sum_{\nu=0}^{n+l+1}\left(\frac{1}{h^{\nu}}\sum_{j=\underline{(1,\nu-n)}}^{l+1}\tau_{n+j}t_{\nu}^{(n+j)}\right)x^{\nu}. \tag{1.14}$$

Подставляя теперь вместо каждого из членов, фигурирующих в равенстве (1.5′), их выражения по формулам (1.11)—(1.14) и приравнивая после этого коэффициенты при одинаковых степенях x, получим для определения неизвестных коэффициентов c_j, $j=0,\,1,\,\ldots,\,n$, и параметров τ_{n+j}, $j=1,\,2,\,\ldots,\,l+1$, следующую систему из $n+l+2$ уравнений:

$$a_0c_0=\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\overset{0}{f}_0-\sum_{j=1}^{l+1}\tau_{n+j}t_0^{(n+j)},$$

$$\sum_{i=\underline{(\nu-n,0)}}^{\overline{(l+1,\nu)}}a_ic_{\nu-i}=\sum_{i=0}^{\overline{(l,\nu-1)}}\frac{1}{\nu-i}\sum_{j=\underline{(\nu-n-i-1,0)}}^{\overline{(l-i,\nu-i-1)}}a_{ij}c_{\nu-i-j-1}+\overset{0}{f}_{\nu}- \tag{1.15}$$

$$-\frac{1}{h^{\nu}}\sum_{j=\overline{(\nu-n,1)}}^{l+1}\tau_{n+j}t_{\nu}^{(n+j)},$$

$$\nu=1,2,\ldots,n+l+1,\quad \overset{0}{f}_{\nu}\overset{\text{df}}{=}\begin{cases}f_{\nu}, & \nu=0,1,2,\ldots,m,\\ 0, & \nu>m.\end{cases}$$

Эта система, как легко проверить, в развернутом виде записывается следующим образом:

$$a_0c_0+\sum_{j=1}^{l+1}t_0^{(n+j)}\tau_{n+j}=\overset{0}{f}_0,$$

$$\alpha_0^{(1)}c_0+a_0c_1+\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{l+1}t_1^{(n+j)}\tau_{n+j}=\overset{0}{f}_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_0^{(n)}c_0+\alpha_1^{(n)}c_1+\ldots+\alpha_{n-1}^{(n)}c_{n-1}+a_0c_n+\frac{1}{h^n}\sum_{j=1}^{l+1}t_n^{(n+j)}\tau_{n+j}=\overset{0}{f}_n,$$

$$\alpha_0^{(n+1)}c_0+\alpha_1^{(n+1)}c_1+\ldots\ldots\ldots+\alpha_n^{(n+1)}c_n+\frac{1}{h^{n+1}}\sum_{j=1}^{l+1}t_{n+1}^{(n+j)}\tau_{n+j}=\overset{0}{f}_{n+1},$$

$$\alpha_0^{(n+2)}c_0+\alpha_1^{(n+2)}c_1+\ldots\ldots\ldots+\alpha_n^{(n+2)}c_n+\frac{1}{h^{n+2}}\sum_{j=2}^{l+1}t_{n+2}^{(n+j)}\tau_{n+j}=\overset{0}{f}_{n+2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^{(n+l)}c_i+\frac{1}{h^{n+l}}\left(t_{n+l}^{(n+l)}\tau_{n+l}+t_{n+l}^{(n+l+1)}\tau_{n+l+1}\right)=\overset{0}{f}_{n+l},$$

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i^{(n+l+1)}c_i+\frac{1}{h^{n+l+1}}t_{n+l+1}^{(n+l+1)}=\overset{0}{f}_{n+l+1},\tag{1.15'}$$

где $\alpha_i^{(s)}$ — некоторые легко последовательно определяемые числа:

$$\alpha_0^{(1)}=a_1-a_{00},\quad \alpha_0^{(2)}=a_2-\frac{a_{01}}{2}-a_{10},\quad \alpha_1^{(2)}=a_1-\frac{1}{2}a_{00}$$

и т. д.

При рассмотрении системы (1.15′) мы без труда обнаруживаем, что:

1. Искомые коэффициенты c_j многочлена $y_n(x)$ последовательно представимы в виде линейных комбинаций подлежащих определению чисел τ_{n+j}, $j=1, 2, \ldots, l+1$, и известных чисел $\overset{0}{f}_0, \overset{0}{f}_1, \ldots, \overset{0}{f}_m$.

2. Определитель D системы (1.15′) представляет собою многочлен по $\eta\overset{\text{df}}{=}\frac{1}{h}$ с отличным от нуля коэффициентом при самой высокой степени η,

равной

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+l+1)=(l+1)\left(n+1+\frac{l}{2}\right)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\lambda,$$

$$D=D(\eta)=\sum_{j=0}^{\lambda} d_j\eta^j, \quad \eta=\frac{1}{h},$$

$$d_\lambda\stackrel{\mathrm{df}}{=}a_0^{n+1}\,t_{n+1}^{(n+1)}\,t_{n+2}^{(n+2)}\ldots t_{n+l+1}^{(n+l+1)}=a_0^{n+1}2^{n+(n+1)+\ldots+(n+l)}\neq 0. \tag{1.16}$$

Из этих двух утверждений следует справедливость теоремы 1.1.

Следствие. *Определитель $D=D\left(\frac{1}{h}\right)$ может обращаться в нуль не более, чем при конечном числе значений $h=h_j$.*

Для того чтобы распространить теорему 1.1 на большой промежуток и получить на нем после этого аппроксимационную теорему, нам потребуются следующие факты.

1. Обозначим резольвенту уравнения (1.1) через $R(x;\ t)$. В таком случае, как известно, будет иметь место следующее равенство:

$$y(x)=\frac{f_m(x)}{a_{l+1}^0(x)}+\int_0^x R(x;t)\frac{f_m(t)}{a_{l+1}^0(t)}\,dt. \tag{1.17}$$

2. Положим

$$E_n^h\left(\frac{P_l}{a_{l+1}^0}\right)_{L^2(\square)}=$$

$$=\left\{\left(\frac{2}{\pi h}\right)^2\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\frac{\left[\dfrac{\overset{0}{P}_l(x;t)}{a_{l+1}^0(x)}-S_n^h\left(\dfrac{\overset{0}{P}_l(\xi;t)}{a_{l+1}^0(\xi)};x\right)\right]^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}}\,dx\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.18}$$

где

$$\overset{0}{P}_l(x;t)=\begin{cases}P_l(x;t)\operatorname{sign}x, & \text{если } t\in[0,x) \text{ или } t\in[x,0),\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{1.19}$$

ЛЕММА 1.1. *Если многочлены $P_l(x,t)$ и $a_{l+1}^0(x)$ имеют тот же смысл, что и в формулах (1.3) и (1.2), и H — положительное число, то при фиксированном l и любом $h<H$ справедливо неравенство*

$$E_n^h\left(\frac{P_l}{a_{l+1}^0}\right)_{L^2(\square)}\leqslant A\frac{(1+h)^l}{\sqrt{n}}, \tag{1.20}$$

где постоянная A зависит от $\dfrac{P_l(x,t)}{a_{l+1}^0(x)}$ и H и не зависит ни от n, ни от h.

Доказательство. При каждом фиксированном $t \in [-h, h]$ обозначим через $a_j = a_j(t)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, коэффициенты Фурье — Чебышева функции $\dfrac{\overset{0}{P}_l(x, t)}{a^0_{l+1}(x)}$. В таком случае согласно равенству Парсеваля получим:

$$\frac{2}{\pi h}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\left[\dfrac{\overset{0}{P}_l(x,t)}{a^0_{l+1}(x)} - S^h_n\left(\dfrac{\overset{0}{P}_l(\xi;t)}{a^0_{l+1}(\xi)}; x\right)\right]^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{h}\right)^2}}\,dx = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j^2(t). \tag{1.21}$$

Чтобы оценить коэффициенты $a_j(t)$, предположим, для определенности, что $t>0$; учитывая, что в этом случае $\overset{0}{P}_l(x, t) \neq 0$ только при $x \in [t, h]$, найдем:

$$|a_j| = |a_j(t)| = \left|\frac{2}{\pi h}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\overset{0}{P}_l(x,t)\,T_j\left(\dfrac{x}{h}\right)}{a^0_{l+1}(x)\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{h}\right)^2}}\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{2}{\pi h}\int\limits_{t}^{h}\frac{P_l(x;t)\,T_j\left(\dfrac{x}{h}\right)}{a^0_{l+1}(x)\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{h}\right)^2}}\,dx\right| = \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_{\arccos\frac{t}{h}}^{0}\frac{P_l(h\cos u, t)}{a^0_{l+1}(h\cos u)}\cos ju\,du\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi j}\left|\frac{P_l(t,t)}{a^0_{l+1}(t)}\sin j\arccos\frac{t}{h} + \int\limits_{\arccos\frac{t}{h}}^{0}\sin ju\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{P_l(h\cos u, t)}{a^0_{l+1}(h\cos u)}\right)du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi j}\left(A'(1+h)^l + A''(1+h)^l\right) \leqslant \frac{A}{j}(1+h)^l, \tag{1.22}$$

где A', A'', A — постоянные.

Отметим для дальнейшего, что совершенно аналогично доказываются неравенства

$$|a_j(x)| = \left|\frac{2}{\pi h}\int\limits_{0}^{x}\frac{R(x,t)\,T_j\left(\dfrac{t}{h}\right)}{a^0_{l+1}(t)}\,dt\right| \leqslant \frac{A}{j}(1+h)^l. \tag{1.22'}$$

Подставляя найденные для $a_j(t)$ оценки в правую часть неравенства (1.21), получим:

$$\frac{2}{\pi h}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\left[\dfrac{\overset{0}{P}_l(x,t)}{a^0_{l+1}(x)} - S^h_n\left(\dfrac{\overset{0}{P}_l(\xi;t)}{a^0_{l+1}(\xi)}; x\right)\right]^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{h}\right)^2}}\,dx \leqslant \frac{A(1+h)^{2l}}{n}.$$

Используя эту оценку, убеждаемся в справедливости леммы 1.1.

ТЕОРЕМА 1.2 (теорема существования для большого промежутка). *Зафиксируем каков-нибудь число* $\sigma \in \left(0, \frac{1}{a^0_{l+1}(\ )}\right)$ *и обозначим через* H *наименьший (положительный) корень уравнения*

$$\frac{1}{\| a^0_{l+1}(x)\|_{C[-H,H]}} - \frac{\pi}{2c} AHE^H_n \left(\frac{P_l}{a^0_{l+1}}\right)_{L^2(\square)} = \sigma, \tag{1.23}$$

где число c *имеет тот же смысл, что в неравенстве* (1.2), $E^H_n\left(\frac{P_l}{a^0_{l+1}}\right)_{\square)}$ *определено по формуле* (1.18),

$$A = A(H) = 1 + \left(\int_{-H}^{H} \left| \int_0^x R^2(x,t) \sqrt{\frac{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\, dt \right| dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.24}$$

и через $R(x, t)$ *обозначена резольвента уравнения* (1.1). *В случае, если уравнение* (1.23) *корней не имеет, мы положим, что корень* $H = \infty$. *Тогда*:

1. *Корень* $H = H(n, \sigma)$ *можно сделать сколь угодно большим за счет выбора некоторого* $\sigma \in \left(0, \frac{1}{a^0_{l+1}(0)}\right)$ *и достаточно больших* n.

2. *При любом* $h \in (0, H)$ *определитель* $D\left(\frac{1}{h}\right)$ *системы* (1.15′) *отличен от нуля и, следовательно, при всех таких* h *справедливы утверждения теоремы* 1.1.

ТЕОРЕМА 1.3 (аппроксимационная теорема). *Если число* $H \in (0, \infty]$ *является наименьшим корнем уравнения* (1.23), *то при любом* $h \in (0, H)$ *многочлен* $y_n(x)$, *коэффициенты которого определяются при помощи системы линейных уравнений* (1.15′), *обладает на* $[-h, h]$ *свойствами*:

$$y(x) - y_n(x) = \frac{\varepsilon_n(x)}{a^0_{l+1}(x)} + \int_0^x R(x,t) \frac{\varepsilon_n(t)}{a^0_{l+1}(t)}\, dt, \tag{1.25}$$

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leqslant \left(1 + \frac{A_1}{n}\right) \left\| \frac{\varepsilon_n(x)}{a^0_{l+1}(x)} \right\|_C,$$

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \left\| \frac{\varepsilon_n(x)}{a^0_{l+1}(x)} \right\|_{C[-h,h]} e^{|x|K}, \quad K = \max_{-h\leqslant x,t \leqslant h} \left| \frac{P_l}{a^0_{l+1}} \right|, \tag{1.26}$$

$$\|y(x)-y_n(x)\|_{L_p^2}\leqslant\left(1+\frac{A_2}{n}\right)\left\|\frac{\varepsilon_n(x)}{a_{l+1}^0(x)}\right\|_{L_p^2},\quad \|y(x)-y_n(x)\|_{L_p^2}\leqslant A\left\|\frac{\varepsilon_n(x)}{a_{l+1}^0(x)}\right\|_{L_p^2}, \tag{1.27}$$

$$\|y(x)-y_n(x)\|_C\leqslant\left(1+\frac{\widetilde{A}_1}{n}\right)\frac{\sqrt{l+1}}{c\sigma}E_n^h[y(h\cos t)]_{L_p^2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\frac{\widetilde{A}_1}{n}\right)\frac{\sqrt{2(l+1)}}{c\sigma}E_n^h(y)_C, \tag{1.28}$$

$$\|y(x)-y_n(x)\|_{L_p^2}\leqslant\left(1+\frac{A_2}{n}\right)\frac{1}{c\sigma}E_n^h(y)_{L_p^2}, \tag{1.29}$$

где $\varepsilon_n(x)$, $a_{l+1}^0(x)$, $R(x,t)$, A, c, l *и* σ *имеют соответственно такой же смысл, как в соотношениях* (1.6), (1.1), (1.24), (1.2) *и* (1.23),

$$\|\varphi\|_C\overset{\mathrm{df}}{=}\max_{|x|\leqslant h}|\varphi(x)|,\quad \|\varphi\|_{L_p^2}\overset{\mathrm{df}}{=}\left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\varphi^2(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.30}$$

$$E_n^h(\varphi)_C\overset{\mathrm{df}}{=}\min_{a_k}\left\|\varphi(x)-\sum_0 a_kx^k\right\|_C,\quad E_n^h(\varphi)_{L_p^2}=\min_{a_k}\left\|\varphi(x)-\sum_0^n a_kx^k\right\|_{L_p^2} \tag{1.31}$$

и $A_j=A_j(h)$, $j=1, 2$ — *постоянные, которые не зависят от* n.

Замечания. 1°. Если в равенстве (1.23) зафиксировать H и считать σ функцией от n, то, в силу леммы 1.1,

$$\sigma=\sigma(n)\to\frac{1}{\|a_{l+1}^0(x)\|_{C[-H,H]}}$$

и, в частности, если $a_{l+1}^0(x)=c=\mathrm{const}$, то $\sigma\to\frac{1}{c}$ при $n\to\infty$.

2°. Вторые из неравенств в (1.26) и (1.27) имеют то преимущество перед первыми, что входящие в них константы c и A вычисляются более эффективно, чем константы A_j, $j=1, 2$.

Нам удобнее будет доказать сначала теорему 1.3, а затем теорему 1.2.

Доказательство теоремы 1.3. Из (1.1) и (1.5′) получаем равенство

$$y(x)-y_n(x)=\int_0^x\frac{P_l(x,t)}{a_{l+1}^0(x)}[y(t)-y_n(t)]\,dt+\frac{\varepsilon_n(x)}{a_{l+1}^0(x)}, \tag{1.32}$$

из которого, как следствие, вытекает равенство (1.25).

Учитывая, что согласно (1.22′) и (1.6) имеет место неравенство

$$\left|\int_0^x R(x,t)\frac{\varepsilon_n(t)}{a^0_{l+1}(t)}dt\right| = \left|\sum_{i=1}^{l+1}\tau_{n+i}\cdot\int_0^x \frac{R(x,t)T_{n+i}\left(\frac{t}{h}\right)}{a^0_{l+1}(t)}dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{l+1}\frac{A}{n+i}|\tau_{n+i}|(1+h)^{l+1} \leqslant \frac{A_1}{n}(1+h)^{l+1}\|\tau\|, \tag{1.33}$$

где

$$\|\tau\| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(\sum_{i=1}^{l+1}\tau^2_{n+i}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad A_1 = A_1(h) = \mathrm{const}, \tag{1.34}$$

и что в силу равенств

$$\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{T_j\left(\frac{x}{h}\right)T_n\left(\frac{x}{h}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos jt\cos nt dt =$$

$$= \begin{cases} 2, \text{ если } j=n=0, \\ 1, \text{ если } j=n,\ j+n\neq 0, \\ 0, \text{ если } j\neq n, \end{cases} \tag{1.35}$$

справедливы неравенства

$$\|\tau\| = \left(\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\varepsilon_n^2(t)}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|a^0_{l+1}\|_C\left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\left[\frac{\varepsilon_n(t)}{a^0_{l+1}(t)}\right]^2\cdot\frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}}\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|a^0_{l+1}\|_C\left\|\frac{\varepsilon_n}{a^0_{l+1}}\right\|_{L^2_p} \leqslant \sqrt{2}\,\|a^0_{l+1}\|_C\left\|\frac{\varepsilon_n}{a^0_{l+1}}\right\|_C, \tag{1.36}$$

легко убедимся в справедливости (1.26) и (1.27).

Второе из неравенств (1.26) вытекает из равенства (1.32) на основании неравенства Гронуолла, а второе из неравенств (1.27) следует на основании (1.25) из того, что

$$\left\|\int_0^x R(x,t)\frac{\varepsilon_n(t)}{a^0_{l+1}(t)}dt\right\|_{L^2_p} = \left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\left[\int_{-h}^{h}\overset{0}{R}(x,t)\frac{\varepsilon_n(t)}{a^0_{l+1}(t)}dt\right]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\frac{\varepsilon_n}{a^0_{l+1}}\right\|_{L^2_p}\left\{\int_{-h}^{h}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\int_{-h}^{h}\left[\overset{0}{R}(x,t)\right]^2\sqrt{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}dt\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| \frac{\varepsilon_n}{a^0_{l+1}} \right\|_{L^2_p} \left(\int_{-h}^{h} \int_{0}^{x} [\overset{0}{R}(x, t)]^2 \sqrt{\frac{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\, dx dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\overset{0}{R}(x, t)$ определяется, отправляясь от $R(x, t)$, аналогично тому, как $\overset{0}{P}_l(x, t)$ было определено по формуле (1.19), отправляясь от $P_l(x, t)$.

Чтобы доказать неравенства (1.28) и (1.29), заметим сначала, что на основании равенства (1.32)

$$S^h_n(y - y_n;\ x) = S^h_n(y;\ x) - y_n(x) =$$

$$= \int_{-h}^{h} S^h_n\left(\frac{\overset{0}{P}_l(\xi;\ t)}{a^0_{l+1}(\xi)};\ x\right)[y(t) - y_n(t)]\, dt + S^h_n\left(\frac{\varepsilon_n}{a^0_{l+1}};x\right).$$

Вычитая это равенство из равенства (1.32), получаем:

$$y(x) - S^h_n(y;\ x) = \int_{-h}^{h} \left[\frac{\overset{0}{P}_l(x;\ t)}{a^0_{l+1}(x)} - S^h_n\left(\frac{\overset{0}{P}_l(\xi;\ t)}{a^0_{l+1}(\xi)};\ x\right)\right](y - y_n)\, dt +$$

$$+ \frac{\varepsilon_n(x)}{a^0_{l+1}(x)} - S^h_n\left(\frac{\varepsilon_n}{a^0_{l+1}};\ x\right). \tag{1.37}$$

Умножая отдельные члены в правой части этого равенства на $\frac{2}{\pi h}\frac{\varepsilon_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}$ и интегрируя полученные произведения по промежутку $[-h, h]$, мы, учитывая соотношения (1.35), (1.6), (1.2) и (1.27), а также неравенство Буняковского, найдем:

$$\frac{2}{\pi h} \int_{-h}^{h} \frac{\varepsilon_n(x)\, S^h_n\left(\frac{\varepsilon_n}{a^0_{l+1}};\ x\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\, dx = 0, \tag{1.38}$$

$$\frac{2}{\pi h} \int_{-h}^{h} \frac{\varepsilon^2_n(x)}{a^0_{l+1}(x)\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\, dx \geqslant \frac{2}{\pi h \|a^0_{l+1}\|} \int_{-h}^{h} \frac{\varepsilon^2_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\, dx = \frac{\|\tau\|^2}{\|a^0_{l+1}\|_C}, \tag{1.39}$$

$$\frac{2}{\pi h}\left| \int_{-h}^{h} [y(t) - y_n(t)] \int_{-h}^{h} \frac{\varepsilon_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}} \left[\frac{\overset{0}{P}_l(x,\ t)}{a^0_{l+1}(x)} - S^h_n\left(\frac{\overset{0}{P}_l}{a^0_{l+1}};\ x\right)\right] dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|y-y_n\|_{L_p^2}\left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\sqrt{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}\left[\int_{-h}^{h}\frac{\varepsilon_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\overset{0}{P}_l(x,t)}{a^0_{l+1}(x)}-S_n^h\left(\frac{\overset{0}{P}_l}{a^0_{l+1}};x\right)\right)dx\right]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant \|y-y_n\|_{L_p^2}\times$$

$$\times\left\{\int_{-h}^{h}\sqrt{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}\left[\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\varepsilon_n^2(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}dx\right]\left[\int_{-h}^{h}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\overset{0}{P}_l(x,t)}{a^0_{l+1}(x)}-S_n^h\left(\frac{\overset{0}{P}_l}{a^0_{l+1}};x\right)\right)^2dx\right]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}=\|y-y_n\|_{L_p^2}\|\tau\|\frac{\pi h}{2}\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{2}{\pi h}\right)^2\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\sqrt{\frac{1-\left(\frac{t}{h}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\left[\frac{\overset{0}{P}_l(x;t)}{a^0_{l+1}(x)}-S_n^h\left(\frac{\overset{0}{P}_l}{a^0_{l+1}};x\right)\right]^2dx\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi h}{2}\|y-y_n\|_{L_p^2}\|\tau\|E_n^h\left(\frac{P_l}{a^0_{l+1}}\right)_{L^2(\Box)}\leqslant A\frac{\pi h}{2}\left\|\frac{\varepsilon_n(x)}{a^0_{l+1}(x)}\right\|_{L_p^2}\|\tau\|E_n^h\left(\frac{P_l}{a^0_{l+1}}\right)_{L^2(\Box)}. \tag{1.40}$$

В силу (1.38)—(1.40) и того факта, что левая часть $F(t)$ равенства (1.23) обладает тем свойством, что при $h<H$ будет $F(h)>\sigma$, мы, отправляясь от равенства (1.37), получаем неравенства

$$\left|\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}[y(x)-S_n^h(y;x)]\frac{\varepsilon_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx\right|=$$

$$=\left|\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}[y(t)-y_n(t)]\int_{-h}^{h}\left[\frac{P_l(x;t)}{a^0_{l+1}(x)}-S_n^h\left(\frac{\overset{0}{P}_l(\xi;t)}{a^0_{l+1}(\xi)};x\right)\right]\frac{\varepsilon_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\varepsilon_n^2(x)}{a^0_{l+1}(x)\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx-\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\varepsilon_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}S_n^h\left(\frac{\varepsilon_n(\xi)}{a^0_{l+1}(\xi)};x\right)dx\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\|\tau\|^2}{\|a^0_{l+1}(x)\|_C}-A\frac{\pi h}{2}\left\|\frac{\varepsilon_n(x)}{a^0_{l+1}(x)}\right\|_{L_p^2}\|\tau\|E_n^h\left(\frac{P_l}{a^0_{l+1}}\right)_{L^2(\Box)}\geqslant$$

$$\geqslant\|\tau\|^2\left[\frac{1}{\|a^0_{l+1}\|_C}-\frac{\pi h}{2c}AE_n^h\left(\frac{P_l}{a^0_{l+1}}\right)_{L^2(\Box)}\right.\geqslant\sigma\|\tau\|^2 \tag{1.41}$$

и, следовательно, благодаря (1.27), также неравенства

$$\|y(x)-y_n(x)\|_{L_p^2} \leqslant \left(1+\frac{A_2}{n}\right)\left\|\frac{\varepsilon_n(x)}{a_{l+1}^0(x)}\right\|_{L_p^2} \leqslant \left(1+\frac{A_2}{n}\right)\frac{\|\tau\|^2}{c\|\tau\|} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{A_2}{n}\right)\frac{1}{c\|\tau\|}\cdot\frac{1}{\sigma}\left|\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}[y(x)-S_n^h(y;x)]\frac{\varepsilon_n(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{A_2}{n}\right)\frac{1}{c\sigma\|\tau\|}\left(\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\varepsilon_n^2(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{[y(x)-S_n^h(y;x)]^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{A_2}{n}\right)\frac{1}{\sigma c}E_n^h(y)_{L_p^2}.$$

Этим неравенство (1.29) доказано. Кроме того, мы попутно установили, что

$$\|\tau\| \leqslant \frac{1}{\sigma}E_n^h(y)_{L_p^2}. \tag{1.42}$$

Используя (1.42) и (1.26), получаем:

$$\|y(x)-y_n(x)\|_C \leqslant \left(1+\frac{A_1}{n}\right)\left\|\frac{\varepsilon_n(x)}{a_{l+1}^0(x)}\right\|_C \leqslant \left(1+\frac{A_1}{n}\right)\frac{1}{c}\sum_{1}^{l+1}|\tau_{n+i}| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{A_1}{n}\right)\frac{\sqrt{l+1}}{c}\|\tau\| \leqslant \left(1+\frac{A_1}{n}\right)\frac{\sqrt{l+1}}{c\sigma}E_n^h(y)_{L_p^2} \leqslant \left(1+\frac{A_1}{n}\right)\frac{\sqrt{2(l+1)}}{c\sigma}E_n^h(y)_C.$$

Этим неравенство (1.28), а вместе с ним и теорема 1.3 полностью доказаны.

Заметим, что при доказательстве теоремы 1.3 и, в частности, при доказательстве неравенства (1.41) мы воспользовались тем обстоятельством, что при $h \in (0, H)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\|a_{l+1}^0(x)\|_{C[-h,h]}} - \frac{\pi h}{2c}AE_n^h\left(\frac{P_l}{a_{l+1}^0}\right)_{L^2(\square)} > \sigma. \tag{1.23'}$$

Само же равенство (1.23) нам не потребовалось.

Доказательство теоремы 1.2. 1. Тот факт, что $H=H(n)$ можно сделать за счет σ и n сколь угодно большим, следует из того, что при каждом фиксированном конечном H и $\sigma < \dfrac{1}{\|a_{l+1}^0(x)\|_{C[-H,H]}}$, $\sigma > 0$, левая часть (1.23) при достаточно больших n станет большей, чем σ.

2. Предположим от противного, что некоторое число $h_0 \in (0, H)$ является корнем определителя $D\left(\frac{1}{h}\right)$: $D\left(\frac{1}{h_0}\right) = 0$. В таком случае, определив из первых $n+1$ уравнений системы (1.15′) последовательно $c_0, c_1, \ldots, c_n$ и подставив найденные значения в последующие $l+1$ уравнений, получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} c_{11}\tau_{n+1} + \ldots + c_{1,l+1}\tau_{n+l+1} &= b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{l+1,1}\tau_{n+1} + \ldots + c_{l+1,l+1}\tau_{n+l+1} &= b_{l+1}, \end{aligned} \tag{1.43}$$

определитель которой равен нулю: $\det\left\|c_{ij}\left(\frac{1}{h_0}\right)\right\| = 0$. Путем замены в первоначальной системе (1.15′) коэффициентов правой части $\overset{0}{f}_{n+1}, \overset{0}{f}_{n+2}, \ldots, \overset{0}{f}_{n+l+1}$ на $\overset{0}{f}_{n+1} + \delta_1, \overset{0}{f}_{n+2} + \delta_2, \ldots, \overset{0}{f}_{n+l+1} + \delta_{l+1}$, где $\delta_i \in [0, 1)$ — достаточно малые числа, мы всегда можем добиться того, чтобы система (1.43) стала несовместной. После этого, заменив число h_0 на $h_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, мы получим совместную систему. Решив эту систему, за счет уменьшения ε можно добиться того, чтобы некоторые из неизвестных $\tilde{\tau}_i$ полученной системы, а вместе с ними и величина $\|\tilde{\tau}\|$, стали сколь угодно большими. Докажем, что это невозможно. Действительно, обозначим через $\tilde{y}(x)$ решение уравнения

$$\tilde{y}(x) = \int_0^x \frac{P_l(x, t)}{a_{l+1}^0(x)} \tilde{y}(t)\, dt + \frac{\tilde{f}_m(x)}{a_{l+1}^0(x)}, \tag{1.1′}$$

которое отличается от уравнения (1.1) тем, что в нем многочлен $f_m(x)$ заменен на многочлен

$$\tilde{f}_m(x) = f_m(x) + \sum_{i=1}^{l+1} \delta_i x^{n+i},$$

а через $\tilde{\tau}_i, \|\tilde{\tau}\|$ и $\tilde{\varepsilon}_n(x)$ — соответственно измененные значения τ_i, $\|\tau\|$ и $\varepsilon_n(x)$. Согласно (1.17) и (1.2),

$$\|\tilde{y}(x)\|_C \leqslant \left\|\frac{\tilde{f}_m(x)}{a_{l+1}^0(x)}\right\| \left(1 + \left\|\int_0^x |R(x; t)|\, dt\right\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c}\left(1 + \left\|\int_0^x |R(x, t)|\, dt\right\|\right)\left[\|f_m(x)\|_C + \sum_1^{l+1} H^{n+i}\right] \overset{\mathrm{df}}{=} C = \mathrm{const} < \infty. \tag{1.44}$$

Используя эту оценку, на основании неравенства (1.41) находим:

$$\|\tilde{\tau}\| \leqslant \frac{1}{\sigma\|\tilde{\tau}\|}\left|\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h} [\tilde{y}(x) - S_n^h(\tilde{y}; x)] \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{h}\right)^2}}\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma\|\tau\|}\left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\widetilde{\varepsilon}_n^2(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{[\widetilde{y}(x)-S_n^h(\widetilde{y};x)]^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{[\widetilde{y}(x)-S_n^h(\widetilde{y};x)]^2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma}E_n^h(\widetilde{y})_{L_p^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{2}{\pi h}\int_{-h}^{h}\frac{\widetilde{y}^2(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{h}\right)^2}}dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{\sigma}C\sqrt{2}=\text{const}<\infty.$$

Таким образом, величина $\|\widetilde{\tau}\|$ является ограниченной. Полученное противоречие доказывает теорему 1.2.

Замечание. Зафиксируем какое-нибудь число $h>0$. Поскольку согласно лемме 1.1 при всех $h'\in[0, h]$ последовательность $E_n^{h'}\left(\frac{P_l}{a_{l+1}^0}\right)_{L^2(\square)}$ равномерно стремится к нулю при $n\to\infty$, то найдется последовательность положительных чисел σ_n со свойствами:

i) при каждом достаточно большом n и всех $h'\in[0, h]$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\|a_{l+1}^0(x)\|_{C[-h',h']}}-\frac{\pi h'}{2c}A(h')E_n^{h'}\left(\frac{P_l}{a_{l+1}^0}\right)_{L^2(\square)}>\sigma_n; \tag{1.45}$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\frac{1}{\|a_{l+1}^0(x)\|_{C[-h,h]}}. \tag{1.46}$$

Поэтому, подставляя на основании замечания к доказательству теоремы 1.3, при каждом n в правые части неравенств (1.28) и (1.29) вместо $\sigma=\sigma(n)$ числа σ_n, мы путем перехода к пределу получим следующие, представляющие самостоятельный интерес, неравенства:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|y-y_n\|_{C[-h,h]}}{E_n^h(y)_{L^2}}&\leqslant A_0\sqrt{l+1},\\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|y-y_n\|_{C[-h,h]}}{E_n^h(y)_C}&\leqslant A_0\sqrt{2(l+1)},\end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\|y-y_n\|_{L^2}}{E_n^h(y)_{L^2}}\leqslant A_0, \tag{1.48}$$

где

$$A_0=\frac{\|a_{l+1}^0(x)\|_{C[-h,h]}}{c}=\frac{\max\limits_{x\in[-h,h]}a_{l+1}^0(x)}{\min\limits_{x\in[-h,h]}a_{l+1}^0(x)}. \tag{1.49}$$

Из неравенства (1.48), в силу (1.49), вытекает, что если $a_{l+1}^0(x) = \text{const}$, то $A_0 = 1$ и, следовательно, в этом случае имеет место равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\| y - y_n \|_{L^2}}{E_n^h(y)_{L^2}} = 1, \tag{1.48'}$$

которое показывает, что при $a_{l+1}^0(x) = \text{const}$ многочлены $y_n(x)$ асимптотически осуществляют в метрике L_p^2 наилучшее приближение решения $y(x)$ уравнения (1.1). В этом смысле многочлены $y_n(x)$ «близки» к многочленам, представляющим собою частные суммы ряда Фурье — Чебышева, которые в метрике L_p^2 осуществляют просто наилучшее приближение. Их преимущество перед этими последними состоит в том, что их коэффициенты c_k вычисляются эффективно в виде решения системы линейных уравнений (1.15′) с отличным от нуля определителем, в то время, как коэффициенты $a_k = a_k(y)$ частных сумм ряда Фурье — Чебышева для функции $y(x)$ выражаются при помощи формул (9), в которых, во-первых, фигурирует решение $y(x)$, которое нам в общем случае не известно и, во-вторых, если решение $y(x)$ известно, то интегралы вида (9), как правило, в элементарных функциях не выражаются.

В заключение этого параграфа приведем один результат о том, что, отправляясь от многочленов $y_n(x)$ и равенства (1.25), можно очень просто строить новые многочлены хорошего приближения решения $y(x)$.

ТЕОРЕМА 1.4. *Если в уравнении* (1.1) $a_{l+1}^0(x) \equiv 1$, *то для решения* $y(x)$ *этого уравнения, отправляясь от многочленов* $y_n(x)$, *можно эффективно построить последовательность натуральных чисел* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *и соответственно последовательность многочленов* $P_{n_j}^*(x)$ *степеней не выше* n_j *со свойствами:*

$$0 < n_{j+1} - n_j \leqslant l + 1,$$

$$\| y(x) - P_n^*(x) \|_{C[-h,h]} \leqslant \left(1 + \frac{A}{n_j^{\frac{1}{l+1}}} \right) E_{n_j}(y)_C, \tag{1.50}$$

где $A = \text{const}$ *и через* $E_{n_j}(y)_C$ *обозначена величина наилучшего равномерного приближения на* $[-h, h]$ *функции* $y(x)$ *при помощи всевозможных алгебраических многочленов* $P_{n_j}(x)$ *степени не выше* n_j:

$$E_{n_j}(y)_C = \inf_{P_{n_j}} \max_{|x| \leqslant h} | y(x) - P_{n_j}(x) |.$$

Доказательство. Нам требуется установить, что среди $l+1$ чисел $n+1, n+2, \ldots, n+l+1$ найдется по крайней мере одно число, которое мы обозначим через n_j, при котором можно построить многочлен $P_{n_j}^*(x)$, удовлетворяющий неравенству (1.50). С этой целью мы покажем, что в качестве числа n_j можно взять, например, любое натуральное число $n^* \in [n+1, n+l+1]$, для которого числа τ_{n+i}, фигурирующие в

(1.6), обладают следующими двумя свойствами:

$$\begin{aligned} &\text{i)}\quad |\tau_{n^*+1}| + \ldots + |\tau_{n+l+1}| \leqslant \frac{\breve{A}}{n^{\frac{1}{l+1}}} |\tau_{n^*}|, \\ &\text{ii)}\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l+1} |\tau_{n+i}| \leqslant \frac{\breve{A}}{n^{\frac{1}{l+1}}} |\tau_{n^*}| \end{aligned} \tag{1.51}$$

(при $n^*=n+l+1$ условие i), очевидно, отпадает). Чтобы убедиться, что среди чисел $n+1, n+2, \ldots, n+l+1$ по крайней мере одно число с такими свойствами существует, поступим следующим образом. Предположим, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant l+1} |\tau_{n+i}| = |\tau_{n+r}|, \quad 1 \leqslant r \leqslant l+1,$$

и среди чисел $r, r+1, \ldots, l+1$ обозначим через j наибольшее целое число, для которого выполняется неравенство

$$|\tau_{n+j}| \geqslant \frac{|\tau_{n+r}|}{n^{\frac{j-r}{l+1}}}.$$

В таком случае, полагая

$$n+j=n^*=n_j,$$

при $j<l+1$ получим:

$$|\tau_{n^*+1}| + \ldots + |\tau_{n+l+1}| < \frac{|\tau_{n+r}|}{n^{\frac{j+1-r}{l+1}}} + \ldots + \frac{|\tau_{n+r}|}{n^{\frac{l+1-r}{l+1}}} \leqslant$$

$$\leqslant |\tau_{n+j}| \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{l+1}}} + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{l+1-j}{l+1}}} \right) \leqslant \breve{A} \frac{|\tau_{n+j}|}{n^{\frac{1}{l+1}}} = \breve{A} \frac{|\tau_{n^*}|}{n^{\frac{1}{l+1}}},$$

а при $j=1, 2, \ldots, l+1$ будем иметь:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l+1} |\tau_{n+i}| \leqslant \frac{(l+1)|\tau_{n+r}|}{n} \leqslant \frac{(l+1)|\tau_{n+j}|\, n^{\frac{j-r}{l+1}}}{n} \leqslant \frac{(l+1)\tau_{n^*}}{n^{\frac{1}{l+1}}}.$$

Этим существование числа $n_j=n^*$, при котором выполняются условия (1.51), доказано. Положим теперь

$$P^*_{n^*}(x) = P^*_{n_j}(x) = y_n(x) + \sum_{i=1}^{n_j-n-1} \tau_{n+i} T_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right), \tag{1.52}$$

где $y_n(x)$ и τ_{n+i} имеют те же значения, что и в соотношениях (1.9) и (1.6). Если окажется, что $n_j=n+1$, то сумму в правой части (1.52) следует опустить. В таком случае, пользуясь равенствами (1.25) и (1.6), получим:

$$y(x)-P^*_{n_j}(x)=y(x)-y_n(x)-\sum_{i=1}^{n^*-n-1}\tau_{n+i}T_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right)=$$

$$=\tau_{n^*}T_{n^*}\left(\frac{x}{h}\right)+\ldots+\tau_{n+l+1}T_{n+l+1}\left(\frac{x}{h}\right)+\sum_{i=1}^{l+1}\tau_{n+i}\int_0^x R(x,t)\,T_{n+i}\left(\frac{t}{h}\right)dt$$

и, значит, в силу соотношений (1.51) и того факта, что в силу достаточной гладкости резольвенты $R(x, t)$ равномерно по всем $x\in[-h, h]$ имеет место соотношение

$$\int_0^x R(x,t)\,T_{n+i}\left(\frac{t}{h}\right)dt=O\left(\frac{1}{n+i}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

найдем:

$$(y(x)-P^*_{n_j}(x)=\tau_{n^*}T_{n^*}\left(\frac{x}{h}\right)+\ldots+\tau_{n+l+1}T_{n+l+1}\left(\frac{x}{h}\right)+O\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{l+1}|\tau_{n+i}|\right)=$$

$$=\tau_{n^*}T_{n^*}\left(\frac{x}{h}\right)+O(|\tau_{n^*+1}|+\ldots+|\tau_{n+l+1}|)+O\left(\frac{1}{n}\sum_{1}^{l+1}|\tau_{n+i}|\right)=$$

$$=\tau_{n^*}\left[T_{n^*}\left(\frac{x}{h}\right)+O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{l+1}}}\right)\right].$$

Отсюда с учетом теоремы Валле-Пуссена заключаем, что действительно

$$\|y(x)-P^*_{n_j}(x)\|_{C[-h,h]}=E_{n_j}(y)_C\left[1+O\left(\frac{1}{n_j^{\frac{1}{l+1}}}\right)\right]=|\tau_{n+j}|\left[1+O\left(\frac{1}{n_j^{\frac{1}{l+1}}}\right)\right].$$

Этим теорема 1.4 доказана.

Заметим, что эта теорема может быть обобщена также на случай, когда $a^0_{l+1}(x)\neq\mathrm{const}$. Для того чтобы такое обобщение осуществить, требуется отправляться не от многочленов $y_n(x)$, а от многочленов $\tilde{y}_n(x)$, которые мы получим, если с самого начала функцию $\varepsilon_n(x)$, определенную по формуле (1.6), заменим функцией

$$\tilde{\varepsilon}_n(x)=\sum_{1}^{l+1}\tau_{n+i}\tilde{T}_{n+i}(x), \tag{1.6'}$$

где через $\tilde{T}_{n+i}(x)$ обозначены многочлены, которые являются взвешенными наименее уклоняющимися от нуля многочленами с весом, равным $a^0_{l+1}(x)]^{-1}$:

$$\max_{|x|\leqslant h}\left|\frac{\tilde{T}_{n+i}(x)}{a^0_{l+1}(x)}\right|=\min_{\gamma_j}\max_{|x|\leqslant h}\left|\frac{x^{n+i}-\sum_{j=0}^{n+i-1}\gamma_j x^j}{a^0_{l+1}(x)}\right|, \tag{1.53}$$

или же отличаются от таких многочленов на некоторые постоянные множители.

Возможно также обобщение на случай приближения в метрике L^p, $p \geqslant 1$.

§ 2. Приближенное решение линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами

1°. Пусть на некотором сегменте $[-h, h]$ задано обыкновенное линейное уравнение вида

$$a_0(x)\, y^{(k)} + a_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + a_{k-1}(x)\, y' + a_k(x)\, y = f(x), \tag{2.1}$$

в котором $a_j(x) \in C^{(k-j)}$, $j=0,1, \ldots, k$, и $f(x) \in C$. Мы покажем, что для хорошей аппроксимации решения $y(x)$ этого уравнения может быть применена развитая в предыдущем параграфе теория. С этой целью мы установим сначала, что уравнение (2.1) эквивалентно некоторому интегральному уравнению Вольтерра. Для этого нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $f(x)$ и $p(x)$ — произвольные k раз непрерывно дифференцируемые на некотором промежутке $[-h, h]$ функции, первая из которых удовлетворяет в точке $x=0$ условиям*

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(k-1)}(0) = y_{k-1}, \tag{22}$$

где y_i — какие-нибудь фиксированные числа. Тогда при всех $k \geqslant 0$ имеет место равенство

$$J_k(py^{(k)}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} J_j(p^{(j)}y) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j^{(k)}}{j!} x^j, \tag{2.3}$$

где

$$\alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)}(p;\, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{k!}{j!} \sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} p^{(\nu)}(0)\, y_{j-\nu} \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \frac{(j-i)!}{(k-i)!} \binom{\nu}{i}, \tag{2.4}$$

для произвольной функции $f \in L$ через $J_j(f)$ обозначен j-й интеграл от f вида

$$\begin{gathered} J_j(f) = \frac{1}{(j-1)!} \int_0^x (x-t)^{j-1} f(t)\, dt, \quad j = 1, 2, \ldots, \\ J_0(f) \overset{\mathrm{df}}{=} f(x) \end{gathered} \tag{2.5}$$

и сумму $\sum\limits_0^{-1}$ (при $k=0$) следует считать равной нулю.

Доказательство. Поскольку в силу (2.5) левая часть соотношения (2.3) $J_k(py^{(k)}) \overset{\mathrm{df}}{=} z$ удовлетворяет уравнению

$$z^{(k)} = p(x)\, y^{(k)}(x) \tag{2.6}$$

и начальным условиям

$$z(0)=z'(0)=\ \dots\ =z^{(k-1)}(0)=0, \tag{2.7}$$

то для доказательства равенства (2.2) достаточно убедиться в том, что и правая часть W равенства

$$W \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}J_j(p^{(j)}y)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\alpha_j^{(k)}}{j!}x^j \tag{2.8}$$

также удовлетворяет уравнению (2.6) с начальными условиями (2.7). Докажем это. Согласно (2.8), полагая

$$\alpha_{j\nu}=\begin{cases}1, & \text{если } \nu\geqslant j,\\ 0, & \text{если } \nu<j,\end{cases} \tag{2.9}$$

получаем:

$$W^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}}(p^{(j)}y)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_{i=0}^{k-j}\binom{k}{j}\binom{k-j}{i}\times$$

$$\times\, p^{(j+i)}y^{(k-j-i)}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_{i=0}^{k-j}\frac{k!}{j!\,i!\,(k-j-i)!}\,p^{(j+i)}y^{(k-j-i)}=$$

$$=k!\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sum_{\nu=0}^{k}\frac{p^{(\nu)}y^{(k-\nu)}\alpha_{j\nu}}{j!\,(\nu-j)!\,(k-\nu)!}=k!\sum_{\nu=0}^{k}\frac{p^{(\nu)}y^{(k-\nu)}}{(k-\nu)!\,\nu!}\sum_{j=0}^{\nu}(-1)^j\frac{\nu!}{j!\,(\nu-j)!}=$$

$$=p(x)\,y^{(k)}(x)+\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}p^{(\nu)}(x)\,y^{(k-\nu)}(x)\,(1-1)^{\nu}=p(x)\,y^{(k)}(x). \tag{2.10}$$

С другой стороны, при любом $r=0,1,\dots,k-1$, согласно (2.8) и (2.4),

$$\left.\frac{d^rW(x)}{dx^r}\right|_{x=0}=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{k}{j}\left.\frac{d^{r-j}}{dx^{r-j}}(p^{(j)}y)\right|_{x=0}-\alpha_r^{(k)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{k}{j}\sum_{i=0}^{r-j}\binom{r-j}{i}p^{(j+i)}(0)\,y_{r-j-i}-\alpha_r^{(k)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{k}{j}\sum_{\nu=j}^{r}\binom{r-j}{\nu-j}p^{(\nu)}(0)\,y_{r-\nu}-\alpha_r^{(k)}=$$

$$=k!\sum_{\nu=0}^{r}\frac{p^{(\nu)}(0)\,y_{r-\nu}}{(r-\nu)!}\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\frac{(r-i)!}{(k-i)!\,i!\,(\nu-i)!}-\alpha_r^{(k)}=$$

$$=\frac{k!}{r!}\sum_{\nu=0}^{r}\binom{r}{\nu}p^{(\nu)}(0)\,y_{r-\nu}\sum_{i=0}^{\nu}(-1)^i\frac{(r-i)!}{(k-i)!}\binom{\nu}{i}-\alpha_r^{(k)}=0. \tag{2.11}$$

Равенства (2.10) и (2.11) показывают, что функция $W(x)$ действительно также удовлетворяет уравнению (2.8) с начальными условиями (2.7). Этим лемма 2.1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.1 (теорема эквивалентности). *Каждое линейное обыкновенное уравнение*

$$\begin{gathered} a_0(x)\,y^{(k)} + a_1(x)\,y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)\,y = f(x), \\ y^{(j)}(0) = y_j, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \end{gathered} \tag{2.1}$$

в котором $f(x) \in C$, $a_j(x) \in C^{(k-j)}$, $j = 0, 1, \ldots, k$, *и* y_j — *произвольные действительные числа, эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра вида*

$$y(x) = \int_0^x \frac{P(x, t)}{a_0(x)}\,y(t)\,dt + \frac{\hat{f}(x)}{a_0(x)}, \tag{2.12}$$

в котором

$$\begin{gathered} P(x, t) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(x-t)^{j-1}}{(j-1)!} a_0^{(j)}(t) + \\ + \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-s} (-1)^{j-1} \binom{k-s}{j} \frac{(x-t)^{s+j-1}}{(s+j-1)!} a_s^{(j)}(t), \end{gathered} \tag{2.13}$$

$$\hat{f}(x) = \sum_{s=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{\alpha_j^{(k-s)}(a_{k-s}, y)}{(j+s)!} x^{j+s} + J_k(f), \tag{2.14}$$

$\alpha_j^{(k-s)} = \alpha_j^{(k-s)}(a_{k-s}, y)$ *и* $J_k(f)$ *определяются по формулам* (2.4) *и* (2.5) *и сумма* $\sum\limits_0^{-1} \overset{\text{df}}{=} 0$.

Доказательство. Действительно, пользуясь леммой 2.1, мы, проинтегрировав левую часть уравнения (2.1) в пределах от 0 до x k раз, получим:

$$\sum_{s=0}^{k} J_k\{a_s y^{(k-s)}\} = \sum_{s=0}^{k} J_s J_{k-s}(a_s y^{(k-s)}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} J_s \left\{ \sum_{j=0}^{k-s} (-1)^j \binom{k-s}{j} J_j(a_s^{(j)} y) - \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{\alpha_j^{(k-s)}}{j!} x^j \right\} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k} \left\{ \sum_{j=0}^{k-s} (-1)^j \binom{k-s}{j} J_{s+j}(a_s^{(j)} y) - \sum_{j=0}^{k-s-1} \frac{\alpha_j^{(k-s)}}{(j+s)!} x^{j+s} \right\} =$$

$$= a_0(x)\,y(x) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} J_j(a_0^{(j)} y) + \sum_{s=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-s} (-1)^j \binom{k-s}{j} \times$$

$$\times J_{s+j}(a_s^{(j)}y) - \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{\alpha_j^{(k-s)}}{(j+s)!}x^{j+s} =$$

$$= a_0(x)\,y(x) + \int\limits_0^x\left\{\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j}{(j-1)!}\binom{k}{j}(x-t)^{j-1}a_0^{(j)}(t) +\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}(-1)^j\binom{k-s}{j}\frac{(x-t)^{s+j-1}}{(s+j-1)!}a_s^{(j)}(t)\right\}y(t)\,dt - \sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{\alpha_j^{(k-s)}}{(j+s)!}x^{j+s}. \tag{2.15}$$

Проинтегрировав же правую часть (2.1) k раз, получим $J_k(f)$. Из этих двух фактов немедленно следует справедливость теоремы 2.1.

Из теоремы 2.1 в качестве следствия вытекает следующая теорема 2.1′, устанавливающая, что вопрос о приближении решений дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами эквивалентен вопросу о приближении многочленами решений интегральных уравнений вида (1.1), который был подробно изучен в предыдущем параграфе.

ТЕОРЕМА 2.1′. *Всякое линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами вида*

$$a_0(x)\,y^{(k)} + a_1(x)\,y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)\,y = f_k(x), \qquad a_0(x) \geqslant c = \text{const} > 0, \tag{2.16}$$

при начальных условиях

$$y^{(j)}(0) = y_j, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{2.17}$$

эквивалентно рассмотренному в § 1 *интегральному уравнению Вольтерра вида*

$$y(x) = \int\limits_0^x \frac{P_l(x, t)}{a_{l+1}^0(x)}\,y(t)\,dt + \frac{\hat{f}(x)}{a_{l+1}^0(x)}, \tag{2.18}$$

в котором многочлены $P(x, t) = P_l(x, t)$ *и* $\hat{f}(x)$ *выражаются по формулам* (2.13) *и* (2.14), $a_{l+1}^0(x) \overset{\mathrm{df}}{=} a_0(x)$ *и через* l *обозначено минимальное целое число, обладающее тем свойством, что степень каждого из многочленов* $a_s(x)$ *не превышает* $l+1-s$, $s = 0, 1, \ldots, k$.

2°. Отметим, что метод сведения дифференциальных уравнений к интегральным позволяет получать также многочлены, которые хорошо приближают k-ую производную $y^{(k)}(x)$ от решения $y(x)$ уравнения (1.1). Чтобы в этом убедиться, положим $y^{(k)}(x) = z(x)$ и учтем, что если функция $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (2.2), то $z(x)$ служит решением следующего интегрального уравнения Вольтерра [см., например, ([5]), стр. 32—33]:

$$a_0(x)\,z(x) = \int\limits_0^x P(x, t)\,z(t)\,dt + F(x),$$

где $P(x, t)$ представляет собою по переменным x и t многочлен, который определяется по формуле

$$P(x, t) = -\sum_{1}^{k} a_j(x) \frac{(x-t)^{j-1}}{(j-1)!},$$

и

$$F(x) = f_m(x) - y_{k-1}a_1(x) - (y_{k-1}x + y_{k-2})\,a_2(x) - \ldots$$
$$\ldots - \left(y_{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + y_0\right) a_k(x). \qquad (2.19)$$

3°. Заметим, наконец, что если интегральное уравнение Вольтерра достаточно общего вида

$$y(x) = \int_0^x P(x, t)\,y(t)\,dt + f(x) \qquad (2.20)$$

с непрерывным свободным членом и ядром $P(x, t)$, которое задано на квадрате $[-h, h]\times[-h, h]$, ограничено некоторым числом A: $|P(x, t)| \leqslant A$, и равномерно по $x \in [-h, h]$ допускает по t в метрике L сколь угодно хорошее приближение функциями вида $\frac{P_l(x, t)}{a^0_{l+1}(x)}$, где $a^0_{l+1}(x)$ и $P_l(x, t)$ — многочлены и $a^0_{l+1}(x) \geqslant c = \mathrm{const} > 0$, заменить уравнением

$$z(x) = \int_0^x \frac{P_l(x, t)}{a^0_{l+1}(x)} z(t)\,dt + \frac{f_m(x)}{a^0_{l+1}(x)}, \qquad (2.21)$$

где многочлен $f_m(x)$ выбран так, чтобы частное $\frac{f_m(x)}{a^0_{l+1}(x)}$ хорошо приближало в метрике C свободный член $f(x)$ уравнения (2.20), то

$$\max_{|x|\leqslant h} \left| \int_0^x \left[P(x, t) - \frac{P_l(x, t)}{a^0_{l+1}(x)} \right] y(t)\,dt + f(x) - \frac{f_m(x)}{a^0_{l+1}(x)} \right| = \varepsilon = \varepsilon(l, m) \to 0 \qquad (2.22)$$

при $l, m \to \infty$ и для разности $y(x) - z(x)$ решений уравнений (2.20) и (2.21) будет справедлива оценка

$$|y(x) - z(x)| = \left| \int_0^x \left[P(x, t) - \frac{P_l(x, t)}{a^0_{l+1}(x)} \right] y(t)\,dt + f(x) - \frac{f_m(x)}{a^0_{l+1}(x)} + \right.$$
$$\left. + \int_0^x \frac{P_l(x, t)}{a^0_{l+1}(x)} [y(t) - z(t)]\,dt \right| \leqslant \varepsilon + \int_0^x \left| \frac{P_l(x, t)}{a^0_{l+1}(x)} \right| |y(t) - z(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + 2\int_0^x |P(x, t)|\,|y(t) - z(t)|\,dt \leqslant \varepsilon + A\int_0^x |y(t) - z(t)|\,dt, \qquad A = \mathrm{const}.$$

Из этой оценки в силу неравенства Гронуолла следует, что при всех $|x| \leqslant h$ будет иметь место неравенство

$$\| y(x) - z(x) \| \leqslant \varepsilon e^{Ah}.$$

Таким образом, мы видим, что решение $y(x)$ уравнения (2.20) общего вида можно достаточно хорошо аппроксимировать решениями $z(x)$ уравнений вида (2.21), которые мы умеем приближать алгебраическими многочленами.

§ 3. Приближение многочленами элементарных и некоторых специальных функций

1°. Элементарные функции

$$\begin{gathered} (1+x)^{\alpha}, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad e^{x}, \quad \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{arc\,tg} x, \\ \arcsin x, \quad \ln(1+x), \quad \ln\frac{1+x}{1-x} \end{gathered} \tag{3.1}$$

представляют собою решения соответственно интегральных уравнений Вольтерра вида

$$(1+x)\,y = (1+\alpha)\int_0^x y(t)\,dt + 1, \qquad y(x) = x - \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt,$$

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt,$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt, \quad y(x) = x + \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt, \quad y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\,y(t)dt,$$

$$(1+x^2)\,y(x) = 2\int_0^x t\,y(t)\,dt + x, \qquad (1-x^2)\,y(x) = \int_0^x (x-4t)\,y(t)\,dt + x,$$

$$(1+x)\,y(x) = \int_0^x y(t)\,dt + x, \qquad (1-x^2)\,y(x) = -2\int_0^x t\,y(t)\,dt + 2x. \tag{3.2}$$

Поэтому для функций

$$\sin x, \quad \cos x, \quad e^{x}, \quad \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{arctg} x$$

на любом промежутке $[-h, h]$ построенные по изложенному в § 1 методу многочлены $y_n(x)$ (в виде решения уравнения (1.5′), в котором $y_n(x)$ и $\varepsilon_n(x)$ имеют соответственно вид (1.9) и (1.6) с неопределенными коэффициентами), начиная с некоторого номера, будут осуществлять приближение, которое мало отличается от наилучшего.

Для функций $(1+x)^{\alpha}$, $\arcsin x$, $\ln(1+x)$ и $\ln\frac{1+x}{1-x}$ такие многочлены будут хороши только на промежутке $[-h, h]$, где $h \in (0, 1)$.

2°. Если изложенный в § 1 метод применить на некотором сегменте $[-h, h]$ к функции $y=e^x$, то в качестве аппроксимирующих многочленов $y_n(x)$ мы после решения полученных для коэффициентов (и чисел τ_{n+i}) уравнений получим многочлены (более подробно об этом см. ([4]))

$$y_n(x) = \sum_0^n c_k x^k, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{gathered} c_k = c_k(n) = \frac{1}{k!}\,\frac{\tau_n(n-k)}{\tau_n(n+1)}, \\ \tau_n(s) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} (-1)^j \frac{(n-j)!}{j!}\left(\frac{2}{h}\right)^{n+1-2j}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

и равенства

$$e^x - y_n(x) = \tau_n\left[T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right) + \int_0^x e^{x-t}T_{n+1}\left(\frac{t}{h}\right)dt\right], \tag{3.5}$$

$$e^x - y_n(x) = \tau_n T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right) + \int_0^x [e^t - y_n(t)]\,dt, \qquad \tau_n \overset{\mathrm{df}}{=} \tau_n(n+1). \tag{3.5'}$$

Из первого из этих равенств легко усмотреть, что

$$\max_{|x|\leqslant h} |e^x - y_n(x)| = |\tau_n|(1+\alpha_n) = E_n(e^x)(1+\beta_n), \qquad \alpha_n \to 0, \qquad \beta_n \to 0, \tag{3.6}$$

а из второго, благодаря неравенству Гронуолла, что

$$\max_{|x|\leqslant h} |e^x - y_n(x)| \leqslant |\tau_n| e^h, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.6'}$$

Кроме того, если выражение, которое находится под интегралом в правой части (3.5), проинтегрировать четыре раза по частям, то после проведения достаточно громоздких преобразований и приведения подобных членов мы получим вместо многочленов $y_n(x)$ многочлены $y_n^*(x)$ вида [см. ([4])]

$$\begin{gathered} y_n^*(x) = \frac{y_n(x)}{1-\gamma_n}, \\ \gamma_n = (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{h}{\tau_n(n+1)^2}\left\{\left[1 - \frac{1-h^2}{(n+1)^2}\right]\frac{1+(-1)^n}{2}(n+1) + \right. \\ \left. + \frac{1-(-1)^n}{2}h\left[1 - \frac{4-h^2}{(n+1)^2}\right]\right\}, \end{gathered} \tag{3.7}$$

которые обладают тем свойством, что

$$\max_{|x|\leqslant h} |e^x - y_n^*(x)| \leqslant \left(1+\frac{A}{n^2}\right) E_n(e^x), \quad A = A(h) = \text{const}, \tag{3.8}$$

и, в частности, например, при $h=1$ и всех $n\geqslant 3$

$$\max_{|x|\leqslant 1} |e^x - y_n^*(x)| \leqslant \left(1+\frac{7}{n^2}\right) E_n(e^x). \tag{3.8$'$}$$

Совершенно аналогичные результаты получены в ([4]) также для случая приближения функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

Применяя развитый автором метод, В. К. Столярчук получил аналогичные результаты в случае приближения функций Эри, интегрального синуса, интеграла теории вероятностей и всех функций Бесселя целого порядка [см. ([6])]. Тот факт, что у дифференциальных уравнений для интегрального синуса и для функций Бесселя коэффициент при старшей производной обращается в нуль, оказалось возможным обойти.

3°. Если нам требуется получить многочлены $\tilde{y}_n(x)$, которые осуществляют хорошее приближение решения $y(x)$ уравнения вида (1.1) в каком-нибудь линейном нормированном пространстве A, отличном от пространства C, то следует в уравнении (1.5′) функцию $\varepsilon_n(x)$ вида (1.6) заменить функцией $\varepsilon_n(\tilde{x})$ вида

$$\tilde{\varepsilon}_n(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_{n+i}\mathcal{L}_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right), \tag{1.6$''$}$$

где через $\mathcal{L}_k(x)$ обозначены многочлены степени k, являющиеся на сегменте $[-1, 1]$ многочленами наименьшего отклонения от нуля в выбранном нами пространстве A в том смысле, что

$$\mathcal{L}_k(x) = a_k x^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^j, \qquad \|\mathcal{L}_k(x)\|_A = \inf_{c_j} \left\| a_k x^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^j \right\|_A, \tag{3.9}$$

где a_k — некоторые постоянные числа (сравни замечание к теореме 1.4).

Заметим, что многочлены $\mathcal{L}_k(x)$, как правило, являются четными при четных k и нечетными при нечетных k и что почти все рассуждения § 1, которые мы проводили в предположении, что $\mathcal{L}_k(x) = T_k(x) = \cos k \arccos x$, остаются справедливыми и при замене там $T_k(x)$ на $\mathcal{L}_k(x)$.

4°. Покажем на примерах, что вычисление коэффициентов многочленов $y_n(x)$ действительно производится очень просто.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in [-1, 1].$$

Поскольку $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, то функция $y = \operatorname{arctg} x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1+x^2)\, y' - 1 = 0, \quad y(0) = 0.$$

Беря от обеих частей этого тождества интеграл от 0 до x и учитывая при этом условие $y(0)=0$, получим:

$$\int_0^x [(1+t^2)\,y'(t)-1]\,dt = (1+t^2)\,y(t)\,\Big|_0^1 - 2\int_0^x ty(t)\,dt =$$

$$= (1+x^2)\,y(x) - 2\int_0^x ty(t)\,dt - x = 0. \tag{3.10}$$

Учитывая, что функция $y(x)$ нечетная мы, для упрощения выкладок, будем многочлены $y_n(x)$ также считать нечетными. Полагая, например, $n=5$ и учитывая, что при приведении уравнения (3.14) к виду (1.1) будет $l=1$, получим для определения многочлена $y_5(x)$ следующее уравнение вида (1.5′):

$$y_5(x)\,(1+x^2) = 2\int_0^x ty_5(t)\,dt + x - \varepsilon(x),$$

где, согласно (1.9), (1.6),

$$y_5(x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5, \quad \varepsilon(x) = \tau T_7(x) = \tau\,(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x).$$

Подставляя эти значения в написанное выше уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующую систему линейных уравнений:

$$c_1 = 1 + 7\tau, \quad c_1 + c_3 = \frac{2}{3}c_1 - 56\tau, \quad c_3 + c_5 = \frac{2}{5}c_3 + 112\tau, \quad c_5 = \frac{2}{7}c_5 - 64\tau.$$

Решая эту систему, найдем:

$$\tau = -\frac{1}{1183}, \quad c_1 = 1 - \frac{1}{169}, \quad c_3 = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{25}{169}\right), \quad c_5 = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{105}{169}\right),$$

так что

$$y_5(x) = x\left(1 - \frac{1}{169}\right) - \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{25}{169}\right) + \frac{x^5}{5}\left(1 - \frac{105}{169}\right) \tag{3.11}$$

и, согласно равенствам (1.32) и (1.25) и неравенству Гронуолла — Беллмана [см. ([7]), стр. 188], получим:

$$\operatorname{arctg} x - y_5(x) = -\frac{T_7(x)}{1183\,(1+x^2)} + \int_0^x \frac{2t}{1+x^2}\,[\operatorname{arctg} t - y_5(t)]\,dt,$$

$$\operatorname{arctg} x - y_5(x) = -\frac{1}{1183}\left[\frac{T_7(x)}{1+x^2} + \int_0^x R_1(x, s)\,\frac{T_7(s)}{1+s^2}\,ds\right],$$

$$|\operatorname{arctg} x - y_5(x)| \leqslant \frac{1}{1183}\,e^{\int_0^x \frac{2t}{1+x^2}\,dt} = \frac{1}{1183}\,e^{\frac{x^2}{1+x^2}} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{1183} < 0{,}0014. \tag{3.12}$$

Для сравнения отметим, что многочлен Тэйлора $t_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ приближает функцию $\operatorname{arctg} x$ таким образом, что

$$\max_{|x|\leqslant 1} |\operatorname{arctg} x - t_5(x)| = |\operatorname{arctg} 1 - t_5(1)| = \left|\frac{\pi}{4} - \frac{13}{15}\right| > 0{,}0814. \quad (3.13)$$

Предоставляем читателю убедиться, что при произвольном натуральном нечетном n имеет место неравенство

$$|\operatorname{arctg} x - y_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{e}}{S_{n+2}} < \frac{\sqrt{e}}{(n+2)\,2^{n+1}}, \quad x \in [-1, 1], \qquad (3.12')$$

где через S_j обозначена сумма модулей коэффициентов полинома $T_j'(x)$, $j = 1, 3, \ldots$.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$y = \ln(1+x), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

В этом случае, например, при $n=4$ аналогично предыдущему получим:

$$y_4(x) = x\left(1 - \frac{1}{209}\right) - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{1}{209}\right) + \frac{x^3}{3}\left(1 + \frac{47}{209}\right) - \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{47}{209}\right),$$

$$\ln(1+x) - y_4(x) = \frac{T_5(2x)}{2090(1+x)} + \frac{1}{1+x}\int_0^x [\ln(1+t) - y_4(t)]\,dt,$$

$$\ln(1+x) - y_4(x) = \frac{1}{2090}\left[\frac{T_5(2x)}{1+x} + \int_0^x R_2(x, s)\frac{T_5(2s)}{1+s}\,ds\right],$$

где $R_2(x, s)$ — резольвента ядра $\frac{1}{1+x}$,

$$\max_{|x|\leqslant \frac{1}{2}} |\ln(1+x) - y_4(x)| \leqslant \frac{e}{2090}.$$

Предоставляем читателю убедиться, что при произвольных натуральном n и $h \in (0, 1)$ при всех $|x| \leqslant h$ имеет место неравенство

$$\max_{|x|\leqslant h} |\ln(1+x) - y_n(x)| \leqslant \frac{e^{\frac{h}{1-h}}}{\left|T'_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right)_{x=1}\right|}. \qquad (3.14)$$

В заключение сделаем следующие два замечания.

1. Построенные по изложенному в § 1 методу многочлены $y_n(x)$ осуществляют при каждом натуральном n, как правило, примерно в 2^n раз лучшее приближение, чем многочлены Тэйлора $t_n(x)$ того же порядка.

В случае, когда функция $y(x)$ целая и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left| \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

это для некоторой подпоследовательности больших n следует из упомянутого во введении результата С. Н. Бернштейна [см. ([2]), стр. 78], согласно которому

$$\lim_{j\to\infty} \left[\frac{2^{n_j} E_{n_j}(y)}{f^{(n_j+1)}(0)} (n_j + 1)! \right] = 1. \qquad (3.15)$$

В общем случае о справедливости этого утверждения говорят многочисленные примеры.

2. На сегментах, не содержащих полюсов, уравнения Ламе, Матье, Бесселя, Вебера, Эрмита, Стокса, а также уравнение Гаусса для гипергеометрических функций и др. с точностью до сдвига удовлетворяют условиям теоремы 2.1, а значит, и теорем 1.1—1.4 (см., например, ([8]), т. I, стр. 279, и т. II).

Поступило
12.I.1973

Литература

1 **Hart J. F., Cheney E. W., Lawson C. L., Maehly H. J., Mesztenyi C. K., Rice J. R., Thacher Jr. H. G.** and **Witzgall C.**, Computer approximations, New York — London — Sydney, 1968.

2 **Бернштейн С. Н.**, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, М.— Л., ОНТИ, 1937.

3 **Дзядык В. К.**, О применении линейных методов к приближению полиномами решений обыкновенных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Гаммерштейна, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34 (1970), 827—848.

4 **Дзядык В. К.**, Об эффективном построении многочленов, которые осуществляют близкое к наилучшему приближение функций e^x, $\sin x$ и др. Укр. матем. ж., т. 25, № 4 (1973), 435—453.

5 **Трикоми Ф.**, Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960.

6 **Столярчук В. К.**, О равномерном приближении многочленами на сегменте функций Бесселя с целыми индексами, Укр. матем. ж., т. 26, № 5 (1974).

7 **Беккенбах Э., Беллман Р.**, Неравенства, М., «Мир», 1965.

8 **Уиттекер Г. Т.** и **Ватсон Г. Н.**, Курс современного анализа. I, II, М., ГТТИ, 1933—1934.

Технический редактор Кроткова Т. М.

Сдано в набор 5/V-1974 г. Подписано к печати 10/VI-1974 г. Тираж 1995 экз.
Формат бумаги 70×108 1/16. Усл. печ. л. 21,7. Бум. л. 7 3/4. Уч.-изд. л. 18,6 Зак. 4130.

2-я типография издательства «Наука», Москва, Шубинский пер., 10