Е. Л. Коротяев, В. А. Слоущ, Асимптотика и оценки дискретного спектра оператора Шрёдингера на дискретном периодическом графе, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 1, 12–39

Алгебра и анализ
Том 32 (2020), №1

АСИМПТОТИКА И ОЦЕНКИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА ДИСКРЕТНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ГРАФЕ

© Е. Л. КОРОТЯЕВ, В. А. СЛОУЩ

Рассматривается периодический оператор Шрёдингера H на дискретном периодическом графе. Получены оценки дискретного спектра возмущенного оператора $H_{\pm}(t) = H \pm tV$, $t > 0$, где $V \geqslant 0$ убывающий потенциал. В случае потенциала, имеющего степенную асимптотику на бесконечности найдена асимптотика дискретного спектра оператора $H_{\pm}(t)$ при большой константе связи.

Введение

0.1. Операторы Лапласа и Шрёдингера на графах имеют многочисленные приложения в физике и химии, см., например, обзор [18] и ссылки в нем (двое авторов обзора Новоселов и Гейм получили нобелевскую премию за открытие графена). На дискретном графе оператор Лапласа действует в пространстве функций, определенных на множестве вершин графа. Здесь главную роль играют вершины графа, а ребра показывают взаимодействие между вершинами графа. В основном изучают два вида *дискретного* оператора Лапласа: комбинаторный оператор Лапласа [31] и нормированный оператор Лапласа [30]; изучают и другие виды операторов Лапласа на дискретном графе (по поводу различных определений оператора Лапласа на графе см. также [20,51]). Спектр дискретного оператора Лапласа на периодическом графе состоит из конечного числа зон, разделенных лакунами.

Большинство результатов для дискретных операторов Шрёдингера

$$H = \Delta + V$$

Ключевые слова: дискретный оператор Шрёдингера, интегральные операторы, оценки сингулярных чисел, классы компактных операторов.

Работа первого автора поддержана грантом РНФ 18-11-00032.

Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 17-01-00668.

для равномерно убывающих потенциалов V получено на многомерной кубической решетке $\mathbb{Z}^d$, где Δ — оператор Лапласа на $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$. Буте де Монвель и Сахбани [3] изучали случай степенного убывания V на бесконечности (при показателе убывания больше 2). Они показали, используя метод Мурра, что волновые операторы

$$W_\pm = s - \lim e^{itH} e^{-it\Delta}, \quad t \to \pm\infty,$$

существуют и полны, т. е., $\operatorname{Ran} W_\pm = \mathscr{H}_{ac}(H)$. Более того, они доказали отсутствие сингулярного непрерывного спектра и локальную конечность собственных значений H вне краев непрерывного спектра. Введем оператор-функцию

$$F(z) = |V|^{\frac{1}{2}}(\Delta - z)^{-1}|V|^{\frac{1}{2}}, \quad z \in \Lambda = \mathbb{C} \setminus \sigma(\Delta).$$

В работах [3,47], показано, что оператор-функция $F(z)$ аналитическая в Λ и непрерывная вплоть до границы за исключением конечного числа точек на спектре $\sigma(\Delta)$. Исозаки и Коротяев [25] показали, что таких точек нет при $d \geqslant 3$. Более того, они решили обратную задачу о восстановлении потенциала по матрице рассеяния при всех энергиях, а также получили формулы следов. Исозаки и Мориока доказали, что точечный спектр операторов Шрёдингера на непрерывном спектре отсутствует в случае потенциала с конечным носителем. Случай потенциала $V \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$ изучался в работе [29]. Здесь рассмотрен оператор Лапласа на решетке $\mathbb{Z}^d$ и получены оценки группы $e^{it\Delta}$ и резольвенты $(\Delta - z)^{-1}$, действующих в пространствах $\ell_q(\mathbb{Z}^d)$. Эти результаты применяются к изучению оператора Шрёдингера в $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ с потенциалом из $\ell_p(\mathbb{Z}^d)$ при подходящем $p \geqslant 1$. Собственные значения и формулы следов для комплексного потенциала рассматривались в [27,28]. Парра и Ричард [39] распространили результаты Буте де Монвеля, Сахбани [3] на общие периодические графы.

Настоящая работа посвящена описанию дискретного спектра $\mathbb{Z}^d$-периодического оператора Шрёдингера, возмущенного убывающим потенциалом, на дискретном $\mathbb{Z}^d$-периодическом графе. Подробнее, в качестве невозмущенного оператора рассмотрим дискретный периодический оператор Шрёдингера $H = \Delta + Q$ на связном локально-конечном $\mathbb{Z}^d$-периодическом графе G, вложенном в $\mathbb{R}^d$; здесь Δ — дискретный (комбинаторный) оператор Лапласа на G, Q — вещественный ограниченный $\mathbb{Z}^d$-периодический потенциал на G. Спектр оператора H состоит из конечного числа зон, разделенных лакунами; некоторые зоны (не все см. [32]) могут вырождаться в точку (собственное значение оператора H бесконечной кратности).

Рассмотрим возмущенные операторы Шрёдингера

$$H_\pm(t) := H \pm tV, \quad t > 0,$$

где V — неотрицательный убывающий на бесконечности потенциал. Нас интересует спектр операторов $H_\pm(t)$, возникающий в лакунах спектра оператора H. Пусть (Λ_+, Λ_-) является лакуной (возможно полубесконечной) в спектре оператора H. Поскольку потенциал V убывает на бесконечности, оператор умножения на V компактен, а потому спектр оператора $H_\pm(t)$, $t > 0$, в лакуне (Λ_+, Λ_-) дискретен. Собственные значения операторов $H_\pm(t)$ монотонно движутся с ростом t. Основным объектом исследования являются считающие функции $N_\pm(\lambda, \tau)$, $\lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-)$, $\tau > 0$, равные числу собственных значений операторов $H_\pm(t)$, прошедших через фиксированную точку λ при увеличении t от 0 до τ. Считающие функции на краю лакуны, определенные как предел

$$N_\pm(\Lambda_\pm, \tau) := \lim_{\lambda \to \Lambda_\pm \pm 0} N_\pm(\lambda, \tau),$$

могут интерпретироваться, как число собственных значений, "родившихся" в точке $\Lambda_\pm$. Разумеется, если $(\Lambda_+, +\infty)$ — полубесконечная лакуна в спектре оператора H, то число $N_+(\lambda, \tau)$, $\lambda \in [\Lambda_+, +\infty)$, есть суммарная кратность собственных значений оператора $H_+(\tau)$ на интервале $(\lambda, +\infty)$. Аналогично интерпретируется величина $N_-(\lambda, \tau)$, $\lambda \in (-\infty, \Lambda_-]$, если $(-\infty, \Lambda_-)$ — полубесконечная лакуна в спектре $\sigma(H)$. Суммарная кратность оператора $H_i(\tau)$ во *внутренней* лакуне (Λ_+, Λ_-) не превосходит величины $N_i(\Lambda_i, \tau)$, $i = \pm$.

Основные результаты работы состоят в следующем.

1) *В теореме* 1.5 *показано, что при условии*

$$0 \leqslant V(x) \sim \vartheta(\tfrac{x}{|x|})|x|^{-d/p}, \quad |x| \to \infty, \quad p > 0, \tag{0.1}$$

считающие функции имеют степенную асимптотику по большой константе связи при всех фиксированных $\lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-)$

$$N_\pm(\lambda, \tau) = \tau^p(\Gamma_p^\pm(\lambda) + o(1)), \quad \tau \to +\infty, \tag{0.2}$$

где $\Gamma_p^\pm(\lambda) = \Gamma_p^\pm(\lambda, H, V)$. *При определенных условиях асимптотика* (0.2) *имеет место и на краях лакуны.*

2) *В теоремах* 1.3, 1.4 *приведены условия конечности спектра операторов* $H_\pm(t)$, $t > 0$, *в спектральных лакунах оператора* H *и даны оценки суммарной кратности этого спектра.*

0.2. Дискретный спектр периодического оператора Шрёдингера, возмущенного убывающим потенциалом, изучался во многих работах (см., например, обзоры [5, 44], а также [4]). Остановимся, прежде всего, на *непрерывном* случае, т. е. на случае возмущения оператора Шрёдингера

$$H = -\Delta + Q(x)$$

в $L_2(\mathbb{R}^d)$ убывающим потенциалом $V(x)$. В непрерывном случае характер результатов и используемая техника существенно зависят от знака возмущения.

Для *отрицательных* возмущений оператора Лапласа в работах Розенблюма [41,42], Либа [35] и Цвикеля [21] был получен следующий результат. *Пусть* $H = -\Delta$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d)$, *и пусть возмущение* V *удовлетворяет условию*

$$0 \leqslant V \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d), \quad d \geqslant 3. \tag{0.3}$$

Тогда для любого $\lambda \leqslant 0$ *справедливы оценка и асимптотика*

$$N_-(\lambda,\tau) \leqslant C(d)\tau^{d/2}\|V\|^{\frac{d}{2}}_{L_{\frac{d}{2}}}, \quad \tau > 0, \tag{0.4}$$

$$N_-(\lambda,\tau) = \omega_d\tau^{d/2}(\|V\|^{d/2}_{L_{d/2}} + o(1)), \quad \tau \to +\infty, \tag{0.5}$$

где ω_d *— объем единичного шара в* $\mathbb{R}^d$.

В работах Хемпеля [23] и Бирмана [11] асимптотика (0.5) была доказана для периодического оператора Шрёдингера $H = -\Delta + Q(x)$ для произвольного $\lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-)$ при условии (0.3). При этом выяснилось, что асимптотический коэффициент не зависит от точки наблюдения $\lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-)$ и потенциала $Q(x)$. Случай асимптотики на краю спектральной лакуны произвольного периодического оператора Шрёдингера обсуждался в работе [13].

Большое число работ (подробнее см., например, [5, 44, 48]) посвящены обсуждению *нерегулярных возмущений* для которых условие (0.3) не выполнено (в том числе при $d = 1, 2$).

Неотрицательные возмущения изучались в работах Аламы, Дейфта, Хемпля [1], Бирмана [11, 12, 15] и Слоуща [50]. При этом для периодического оператора Шрёдингера $H = -\Delta + Q(x)$ был получен следующий результат.

Если возмущение V *удовлетворяет условию* (0.1), *то считающая функция* $N_+(\lambda,\tau)$ *имеет степенную асимптотику* (0.2+) *по большой константе связи при всех* $\lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-)$. *При определенных условиях асимптотика* (0.2+) *справедлива и при* $\lambda = \Lambda_+$.

Оценка величины $N_+(\lambda,\tau)$ обсуждалась в работе [12].

Возмущению периодического *дискретного* оператора Шрёдингера убывающим потенциалом посвящено большое количество работ (см. обзор результатов в [44] и [4]). Так в работах Левина, Розенблюма и Соломяка [34, 44, 45] изучалось возмущение дискретного оператора Лапласа убывающим потенциалом; были получены оценки величины $N_-(0,\tau)$, в том числе оценка (0.4) при условии $0 \leqslant V \in L_{d/2}(G)$, $d \geqslant 3$; оценки величины $N_-(0,\tau)$ при $d = 2$ изучались в работах [37] и [46].

В работах [43] и [4] были установлены оценки величины $N_-(0,\tau)$ в случае возмущения дискретного оператора Шрёдингера убывающим потенциалом. Асимптотика величины $N_-(0,\tau)$ по большой константе связи τ обсуждалась в [4] для случая возмущающего потенциала убывающего на бесконечности сверхстепенным образом. Хаяси, Хигучи, Номура и Огурису [22] вычислили число дискретных собственных значений для оператора Лапласа, возмущенного потенциалом с конечным носителем. Выбранный нами асимптотический режим (0.1), (0.2), по-видимому, ранее не рассматривался.

0.3. По характеру полученных результатов и использованной технике наша работа близка к работам Бирмана и Слоуща [15, 50], где изучался дискретный спектр оператора Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^d)$, возмущенного *неотрицательным* потенциалом убывающим на бесконечности степенным образом. Как и в работах [15, 50], мы сводим (см. предложение 1.2) изучение асимптотики величин $N_\pm(\lambda,\tau)$ по большой константе связи τ к исследованию оценок и асимптотик сингулярных чисел подходящих "дискретных" ПДО (см. §2) отрицательного порядка. Основное отличие настоящей работы от [15] и [50] состоит в следующем: при разложении в прямой интеграл периодического дискретного оператора Шрёдингера слои получаются конечномерными; при разложении в прямой интеграл периодического дифференциального оператора слои бесконечномерны. Последнее обстоятельство делает задачу, рассмотренную в [15, 50], значительно более сложной, чем задача, исследуемая в настоящей работе.

При получении оценок s-чисел "дискретных" ПДО отрицательного порядка мы пользуемся известными результатами Бирмана, Соломяка [16]. При исследовании асимптотики s-чисел "дискретных" ПДО отрицательного порядка мы следуем работам Бирмана, Соломяка [7, 8] и сводим дело к случаю "непрерывного" ПДО. Также отметим, что в нашей работе существенно используются результаты из [31] о периодическом операторе Шрёдингера на периодическом графе.

0.4. Условимся о некоторых обозначениях. Пусть $(\mathcal{X}, d\varrho)$ — измеримое пространство; для измеримой на $\mathcal{X}$ функции f через $[f(x)]$ (а иногда через f) обозначается оператор умножения на f в пространстве $L_2(\mathcal{X}, d\varrho)$; кроме того, мы используем обозначения:

$$f_\pm(x) = \big(|f(x)| \pm f(x)\big)/2, \quad x \in \mathcal{X};$$

$$f_\pm^{-p}(x) = \begin{cases} (f_\pm(x))^{-p}, & f_\pm(x) > 0, \\ 0, & f_\pm(x) = 0, \end{cases} \quad x \in \mathcal{X}, \quad p > 0.$$

Через $\mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ обозначим характеристическую функцию измеримого множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$.

Через $\|\cdot\|_X$ обозначается норма в (квази)нормированном пространстве X. Для сепарабельного измеримого пространства с σ-конечной мерой $(\mathcal{Z}, d\mu)$ через $L_p(\mathcal{Z}, d\mu)$ обозначается стандартный L_p-класс; для произвольного множества K через $B(K)$ обозначим множество ограниченных на K функций;

$$\|f\|_B := \sup_{k \in K} |f(k)|, \quad f \in B(K).$$

Для плотно определенного замкнутого оператора A в гильбертовом пространстве через $\sigma(A)$ обозначается спектр, через A^* — сопряженный оператор. Если A самосопряжен, то $E_A(\,\cdot\,)$ — спектральная мера оператора A. Для борелевского множества $\delta \subset \mathbb{R}$ полагаем $\pi_A(\delta) := \operatorname{rank} E_A(\delta)$. Далее, $n_\pm(s, A) := \pi_{\pm A}(s, +\infty)$, $s > 0$, — функции распределения положительного и отрицательного спектра оператора A.

Кратко опишем план работы, состоящей из введения и трех параграфов.

В §1 приведены постановка задачи и описание основных результатов.

В §2 даны необходимые сведения об оценках и асимптотиках s-чисел “дискретных” ПДО.

В §3 приведены доказательства основных теорем 1.3–1.5.

Авторы выражают свою признательность А. В. Баданину, А. И. Назарову, Н. Ю. Сабуровой и Н. Д. Филонову за полезные обсуждения.

§1. Основной результат

1.1. Невозмущенный оператор. Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан связный граф

$$G = (X, \mathcal{E}),$$

возможно имеющий петли или кратные ребра. Здесь X — множество вершин графа G, $\mathcal{E}$ — множество неориентированных ребер графа G. Ребро $\mathbf{e}$, соединяющее вершины $x, y \in X$, назовем ребром *инцидентным* вершинам x и y. Вершины $x, y \in X$, соединенные ребром $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$, назовем *смежными* вершинами (через ребро $\mathbf{e}$) и будем писать $x \sim y$. Всюду ниже граф G предполагается локально конечным, то есть в любой ограниченной области в $\mathbb{R}^d$ содержится конечное число вершин и ребер графа G. Кроме того, граф G предполагается $\mathbb{Z}^d$-периодическим:

$$G + n = G, \quad n \in \mathbb{Z}^d. \tag{1.1}$$

На графе G определим дискретный оператор Лапласа Δ, действующий в $\ell_2(X)$,

$$\Delta u(x) = \sum_{y \sim x} (u(x) - u(y)), \quad x \in X, \quad u \in \ell_2(X).$$

Подчеркнем, что в последней формуле суммирование происходит по всем ребрам инцидентным вершине x.

Оператор Δ — ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор в $\ell_2(X)$ (см., например, [31]). Определим периодический оператор Шрёдингера $H = \Delta + Q$, где Q есть вещественный периодический потенциал на X, удовлетворяющий условию

$$Q = \bar{Q} \in \ell_\infty(X); \quad Q(x+n) = Q(x), \quad (x,n) \in X \times \mathbb{Z}^d. \tag{1.2}$$

1.2. Спектральное разложение невозмущенного оператора H. Через $\{x_j\}_{j=1}^{\nu}$ обозначим пересечение множества вершин графа G и ячейки $\Omega := [0,1)^d$ решетки $\mathbb{Z}^d$. В силу $\mathbb{Z}^d$-периодичности графа G, для каждой вершины $x \in X$ найдутся единственные $j \in \{1, \ldots, \nu\}$ и $n \in \mathbb{Z}^d$ такие, что $x = x_j + n$. Введем унитарный оператор $\mathbb{U} : \ell_2(X) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^\nu)$

$$(\mathbb{U}u)_j(n) := u(x_j + n), \quad j = 1, \ldots, \nu, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \ \ u \in \ell_2(X). \tag{1.3}$$

Зададим в $\ell_2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^\nu)$ оператор $\mathbb{H} := \mathbb{U}H\mathbb{U}^*$ унитарно эквивалентный невозмущенному оператору H. Определим дискретное преобразование Фурье

$$\Phi : \ell_2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^\nu) \to L_2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C}^\nu), \quad \mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d;$$

именно, для всякой $u \in \ell_2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^\nu)$ положим

$$(\Phi u)(x) := (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{-inx} u(n), \quad x \in \mathbb{T}^d. \tag{1.4}$$

Унитарный оператор Φ диагонализует (см., например, [31]) оператор $\mathbb{H}$

$$\mathbb{H} = \Phi^*[h(k)]\Phi. \tag{1.5}$$

Здесь $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, некоторая самосопряженная $(\nu \times \nu)$-матрица-функция аналитическая по k (подробное описание $h(k)$ дано в [31]). Обозначим через $E_1(k) \leqslant E_2(k) \leqslant \ldots \leqslant E_\nu(k)$ собственные значения матрицы $h(k)$, занумерованные в порядке возрастания, с учетом кратности. Функции $E_s(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $s = 1, \ldots, \nu$ будем называть зонными функциями. Каждая зонная функция $E_s(k)$ — непрерывная, кусочно вещественно-аналитическая по $k \in \mathbb{T}^d$. Спектр $\sigma(H) = \sigma(\mathbb{H})$ является объединением зон $\sigma_s = E_s(\mathbb{T}^d)$, каждая из которых есть образ отображения $k \mapsto E_s(k)$,

$$\sigma(H) = \sigma(\mathbb{H}) = \bigcup_{s=1}^{\nu} E_s(\mathbb{T}^d).$$

Зоны могут перекрываться и могут вырождаться в точку (последняя оказывается собственным значением оператора H бесконечной кратности).

Отметим, что первая зона не вырождается [31]. Спектр $\sigma(H)$ содержит две полубесконечные лакуны

$$\begin{aligned} &\sigma(H)\cap(-\infty,\Lambda_{\min})=\varnothing, &&\sigma(H)\cap(\Lambda_{\max},+\infty)=\varnothing,\\ &\Lambda_{\min}:=\min\{E_1(k),k\in\mathbb{T}^d\}, &&\Lambda_{\max}:=\max\{E_\nu(k),k\in\mathbb{T}^d\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Кроме того, спектр оператора H может содержать внутреннюю лакуну (Λ_+,Λ_-), удовлетворяющую при некотором $N\in\{2,\dots,\nu\}$ условию

$$\Lambda_+=\max\{E_{N-1}(k),k\in\mathbb{T}^d\}<\Lambda_-=\min\{E_N(k),k\in\mathbb{T}^d\}. \tag{1.7}$$

1.3. Классы функций. Прежде, чем говорить о возмущающем операторе, введем необходимые классы функций. Пусть $(\mathcal{Z},d\mu)$ — сепарабельное измеримое пространство с σ-конечной мерой. Наряду со стандартными классами $L_p(\mathcal{Z},d\mu)$ определим *слабые* L_p-классы $L_{p,\infty}(\mathcal{Z},d\mu)$, $p\in(0,+\infty)$, (см., например, [6, 14]). Именно, для μ-измеримой функции $f\colon\mathcal{Z}\to\mathbb{C}$ положим

$$\mu_f(s):=\mu\bigl(\{z\in\mathcal{Z}:|f(z)|>s\}\bigr),\quad s>0.$$

Класс $L_{p,\infty}$ выделяется требованием конечности функционала

$$\|f\|_{L_{p,\infty}}:=\sup_{s>0}s\mu_f^{1/p}(s). \tag{1.8}$$

Пространство $L_{p,\infty}$ полно относительно квазинормы (1.8), и содержит сепарабельное подпространство

$$L^0_{p,\infty}:=\bigl\{f\in L_{p,\infty}:\mu_f(s)=o(s^{-p}),\quad s\to+0,\quad s\to+\infty\bigr\}.$$

Пространство $L_{p,\infty}(\mathcal{Z},d\mu)$ сепарабельно, если и только если $\mathcal{Z}$ является объединением конечного числа атомов; в этом случае $L_{p,\infty}=L^0_{p,\infty}$ — конечномерное. Если $\mathcal{Z}$ — измеримое подмножество в $\mathbb{R}^d$, и $d\mu$ — мера Лебега, то $L_{p,\infty}(\mathcal{Z},d\mu)=:L_{p,\infty}(\mathcal{Z})$.

Приведем несколько примеров функций, которые принадлежат слабым L_p-классам (см., например, [17], а также [8]).

Примеры. 1) Для функции $V(x)=\vartheta(\frac{x}{|x|})\cdot|x|^{-d/p}$, $x\in\mathbb{R}^d$, где $\vartheta\in L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $p\in(0,+\infty)$, справедливы включение $V\in L_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ и равенство $\|V\|_{L_{p,\infty}}=d^{-\frac{1}{p}}\|\vartheta\|_{L_p}$.

2) Если функция $V\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условию $V(x)=O(|x|^{-\frac{d}{p}})$, при $|x|\to\infty$, то справедливо включение $V\in L_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

3) Если функция $V\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условию $V(x)=o(|x|^{-\frac{d}{p}})$, при $|x|\to\infty$, то справедливо включение $V\in L^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Предположим теперь, что на $\mathcal{Z}$ задана μ-измеримая матричнозначная функция $\mathbb{W}$. В этом случае положим по определению

$$\mathbb{W} \in L_{p,\infty}(\mathcal{Z}, d\mu) \Longleftrightarrow \forall i,j \quad \mathbb{W}_{i,j} \in L_{p,\infty}(\mathcal{Z}, d\mu); \ \ \|\mathbb{W}\|_{L_{p,\infty}} = \max_{i,j} \|\mathbb{W}_{i,j}\|_{L_{p,\infty}}.$$

Если $\mathcal{Z}$ — счетное множество, мы будем пользоваться обозначениями

$$L_p(\mathcal{Z}, d\mu) =: \ell_p(\mathcal{Z}, d\mu), \quad L_{p,\infty}(\mathcal{Z}, d\mu) =: \ell_{p,\infty}(\mathcal{Z}, d\mu);$$

если дополнительно $d\mu$ — считающая мера, то

$$\ell_p(\mathcal{Z}, d\mu) =: \ell_p(\mathcal{Z}), \quad \ell_{p,\infty}(\mathcal{Z}, d\mu) =: \ell_{p,\infty}(\mathcal{Z}).$$

Повторяя рассуждения из [17], получим для $(m_1 \times m_2)$-матрицы-функции $\mathbb{W}(n)$, $n \in \mathbb{Z}^d$, следующее утверждение.

Предложение 1.1. 1) *Если* $\mathbb{W}(n) = O(|n|^{-d/p})$, *то* $\mathbb{W} \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$.

2) *Если* $\mathbb{W}(n) = o(|n|^{-d/p})$, *то* $\mathbb{W} \in \ell^0_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$.

3) *Если* $\mathbb{W}(0) = 0$ *и* $\mathbb{W}(n) = \omega(\frac{n}{|n|}) \cdot |n|^{-d/p}$, $n \neq 0$, *где* $\omega \in B(\mathbb{S}^{d-1})$, *то* $\mathbb{W} \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, $\|\mathbb{W}\|_{\ell_{p,\infty}} \leqslant C\|\omega\|_B$, *где* $C = C(m_1, m_2, p, d)$.

1.4. Возмущение. Мы рассмотрим возмущенный оператор Шрёдингера $H_\pm(t) = H \pm tV$, $t > 0$, где предполагается, что потенциал V знакоопределен, ограничен и убывает на бесконечности

$$0 \leqslant V \in \ell_\infty(X), \quad V(x) \to 0, \quad |x| \to +\infty. \tag{1.9}$$

Более точно, мы рассмотрим возмущения удовлетворяющие одному из трех условий:

$$0 \leqslant V \in \ell_p(X); \tag{1.10}$$

$$0 \leqslant V \in \ell_{p,\infty}(X); \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} 0 \leqslant V \in \ell_\infty(X), \quad V(x) = |x|^{-d/p}\Big(\vartheta\Big(\frac{x}{|x|}\Big) + o(1)\Big), \\ x \in X, \quad |x| \to \infty, \quad \vartheta \in C(\mathbb{S}^{d-1}). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Отметим, что при условии (1.9) (а значит, и при любом из условий (1.10)–(1.12)) оператор умножения на V компактен. Нас интересует дискретный спектр операторов $H_\pm(t) = H \pm tV$, $t > 0$. Предположим, что (Λ_+, Λ_-) — лакуна в спектре оператора H (возможно полубесконечная). Поскольку возмущение V — компактный оператор в $\ell_2(X)$, спектры возмущенных операторов $H_\pm(t)$, $t > 0$, в лакуне (Λ_+, Λ_-) дискретны. Основным объектом исследования являются считающие функции

$$N_\pm(\lambda, \tau) := \sum_{t \in (0,\tau)} \operatorname{dimKer}(H_\pm(t) - \lambda I), \quad \tau > 0, \quad \lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-). \tag{1.13}$$

Правая часть в (1.13) считается бесконечной, если найдется бесконечное число точек $t \in (0, \tau)$ в которых $\dim\mathrm{Ker}(H_\pm(t) - \lambda I) > 0$. Из вариационных соображений вытекает следующее утверждение (принцип Бирмана–Швингера, см., например, [11]).

Предложение 1.2. *Пусть H — самосопряженный оператор в $\ell_2(X)$, V — неотрицательный компактный оператор в $\ell_2(X)$, $\sigma(H) \cap (\Lambda_+, \Lambda_-) = \varnothing$. Тогда справедливо равенство*

$$N_\pm(\lambda, \tau) = n_\pm(\tau^{-1}, V^{1/2}(\lambda I - H)^{-1} V^{1/2}), \quad \tau > 0, \quad \lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-). \quad (1.14)$$

Из предложения 1.2 вытекает, что величины

$$N_\pm(\lambda, \tau), \quad \tau > 0, \ \lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-),$$

конечны и монотонны по λ. Следовательно, $N_\pm(\lambda, \tau)$ можно определить и при $\lambda = \Lambda_\pm$ как предел (возможно бесконечный)

$$N_\pm(\Lambda_\pm, \tau) := \lim_{\lambda \to \Lambda_\pm \pm 0} N_\pm(\lambda, \tau), \quad \tau > 0.$$

1.5. Основной результат. *На протяжении этого пункта мы предполагаем выполненными условия периодичности* (1.1) *и* (1.2); *кроме того предполагается, что* (Λ_+, Λ_-) *— лакуна в спектре оператора H* (*возможно полубесконечная*); *неотрицательный потенциал V удовлетворяет одному из условий* (1.10)–(1.12).

Ниже мы покажем, что при условиях (1.10) либо (1.11) и некоторых предположениях о поведении зонных функций спектр возмущенного оператора в лакуне (Λ_+, Λ_-) конечен; будет дана оценка величин $N_\pm(\Lambda_\pm, \tau)$. Мы покажем, что при условии (1.12) справедливы асимптотики (0.2), и асимптотические коэффициенты $\Gamma_p^\pm(\lambda, H, V) = \Gamma_p^\pm(\lambda)$ определяются равенствами

$$\Gamma_p^\pm(\lambda) := \frac{1}{d(2\pi)^d} \sum_{s=1}^{\nu} \int_{\mathbb{T}^d} \big(\lambda - E_s(k)\big)_\pm^{-p} dk \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \vartheta^p(\theta) dS(\theta), \quad \lambda \in [\Lambda_+, \Lambda_-]. \quad (1.15)$$

При всех $\lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-)$ величины $\Gamma_p^\pm(\lambda)$ конечны. Отметим, что величины $\Gamma_p^\pm(\Lambda_\pm)$ конечны, если выполнены (соответственно) условия

$$(\Lambda_\pm - E_s(\,\cdot\,))_\pm^{-1} \in L_\varkappa(\mathbb{T}^d), \quad s = 1, \ldots, \nu, \quad \text{где} \begin{cases} \varkappa = p, & p > 1, \\ \varkappa = 1, & p \in (0,1), \\ \varkappa > 1, & p = 1. \end{cases} \quad (1.16)$$

При $p > 1$ кроме условий (1.16) нам понадобятся и более слабые условия

$$(\Lambda_\pm - E_s(\,\cdot\,))_\pm^{-1} \in L_{p,\infty}(\mathbb{T}^d), \quad s = 1, \ldots, \nu. \quad (1.17)$$

Следующие две теоремы дают оценки считающей функции $N_\pm(\Lambda_\pm,\tau)$, $\tau>0$.

Теорема 1.3. *Пусть при некотором* $p\in(1,+\infty)$ *выполнены условия* (1.10) *и* (1.17±). *Тогда спектр оператора* $H_\pm(t)$, $t>0$, *в лакуне* (Λ_+,Λ_-) *конечен и справедливы оценки*:

$$N_\pm(\Lambda_\pm,\tau)\leqslant C(p,d,\nu)\,\tau^p\sum_{s=1}^{\nu}\|(\Lambda_\pm-E_s(\,\cdot\,))_\pm^{-1}\|^p_{L_{p,\infty}}\|V\|^p_{\ell_p},\quad \tau>0; \tag{1.18}$$

$$N_\pm(\Lambda_\pm,\tau)=o(\tau^p),\quad \tau\to+\infty. \tag{1.19}$$

Здесь и далее формулы в тексте часто снабжены индексами “+” и “−”. В этом случае (если особо не оговорено другое) эти формулы следует читать независимо для каждого из двух индексов. Если мы хотим специально выделить случай одного знака, мы указываем его при ссылке на соответствующую формулу, например условие (1.16+) и т. п.

Теорема 1.4. *Пусть при некотором* $p\in(0,+\infty)$ *выполнены условия* (1.11) *и* (1.16±). *Тогда спектр оператора* $H_\pm(t)$, $t>0$, *в лакуне* (Λ_+,Λ_-) *конечен и справедлива оценка*

$$N_\pm(\Lambda_\pm,\tau)\leqslant C(p,\varkappa,d,\nu)\,\tau^p\sum_{s=1}^{\nu}\|(\Lambda_\pm-E_s(\,\cdot\,))_\pm^{-1}\|^p_{L_\varkappa}\|V\|^p_{\ell_{p,\infty}},\quad \tau>0. \tag{1.20}$$

Если дополнительно $V\in\ell^0_{p,\infty}(X)$, *то* $N_\pm(\Lambda_\pm,\tau)=o(\tau^p)$, $\tau\to+\infty$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть при некотором* $p\in(0,+\infty)$ *выполнено условие* (1.12). *Тогда при всех* $\lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-)$ *имеют место асимптотики*

$$N_\pm(\lambda,\tau)=\tau^p(\Gamma_p^\pm(\lambda)+o(1)),\quad \tau\to+\infty. \tag{1.21}$$

Если, кроме того, выполнено условие (1.16±), *то асимптотика* (1.21±) *верна и при* $\lambda=\Lambda_\pm$.

При ненулевом возмущении коэффициент $\Gamma_p^+(\lambda)$ положителен, если λ лежит во внутренней лакуне или в правой полубесконечной лакуне; аналогично коэффициент $\Gamma_p^-(\lambda)$ положителен, если λ лежит во внутренней лакуне или в левой полубесконечной лакуне. Разумеется, $N_+(\lambda,\tau)=\Gamma_p^+(\lambda)=0$ при $\lambda\leqslant\Lambda_{\min}$, и $N_-(\lambda,\tau)=\Gamma_p^-(\lambda)=0$ при $\lambda\geqslant\Lambda_{\max}$.

Поведение зоных функций $E_s(k)$ на краю лакуны изучалось в [30, 32]. Нам потребуется следующее определение регулярности края лакуны.

Определение. Левый край лакуны (Λ_+, Λ_-) назовем *регулярным*, если точка Λ_+ содержится в образе только одной зонной функции $E_{N-1}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, и равенство $E_{N-1}(k) = \Lambda_+$ достигается в конечном числе точек $k_j \in \mathbb{T}^d$, $j = 1, \ldots, M$, каждая из которых есть невырожденная точка максимума для $E_{N-1}(\,\cdot\,)$, т. е.

$$\Lambda_+ - E_{N-1}(k) = q_j(k - k_j) + O(|k - k_j|^3), \quad k \to k_j, \quad j = 1, \ldots, M,$$

где q_j — положительно определенная квадратичная форма. Аналогичным образом определяется регулярность правого края лакуны.

Если край лакуны $\Lambda_\pm$ регулярен, то

$$(\Lambda_\pm - E_s(\,\cdot\,))_\pm^{-1} \in L_\varkappa(\mathbb{T}^d), \qquad s = 1, \ldots, \nu, \quad \forall \varkappa < \frac{d}{2};$$

$$(\Lambda_\pm - E_s(\,\cdot\,))_\pm^{-1} \in L_{\varkappa,\infty}(\mathbb{T}^d), \qquad s = 1, \ldots, \nu, \quad \forall \varkappa \leqslant \frac{d}{2}.$$

Таким образом, из теорем 1.3 и 1.4 следует утверждение.

Следствие 1.6. 1) *Пусть $d \geqslant 3$ и при некотором $p \in (0, \frac{d}{2})$ выполнено условие* (1.11), *и край лакуны $\Lambda_\pm$ регулярен. Тогда спектр оператора $H_\pm(t)$, $t > 0$, в лакуне (Λ_+, Λ_-) конечен и справедлива оценка*

$$N_\pm(\Lambda_\pm, \tau) \leqslant C_\pm(p, d, H, G) \|V\|_{\ell_{p,\infty}}^p \tau^p, \quad \tau > 0.$$

Если дополнительно $V \in \ell_{p,\infty}^0(X)$, то $N_\pm(\Lambda_\pm, \tau) = o(\tau^p)$, $\tau \to +\infty$.
2) *Пусть выполнено условие $V \in \ell_{d/2}(X)$, $d \geqslant 3$, и край лакуны $\Lambda_\pm$ регулярен. Тогда спектр оператора $H_\pm(t)$, $t > 0$, в лакуне (Λ_+, Λ_-) конечен и справедливы оценки*

$$N_\pm(\Lambda_\pm, \tau) \leqslant C_\pm(p, d, H, G) \|V\|_{\ell_{d/2}}^{d/2} \tau^{d/2}, \quad \tau > 0;$$

$$N_\pm(\Lambda_\pm, \tau) = o(\tau^{d/2}), \quad \tau \to +\infty.$$

Аналогично, из теоремы 1.5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.7. *Пусть при некоторых $d \geqslant 3$, $p \in (0, \frac{d}{2})$, выполнено условие* (1.12), *и левый (или правый) край лакуны регулярен. Тогда асимптотика* (1.21+) (*или* (1.21−)) *справедлива при $\lambda = \Lambda_+$ (при $\lambda = \Lambda_-$).*

Из результатов работ Коротяева, Сабуровой (см. [32, теорема 1.2]; [30, теорема 2.1]) следует, что при условиях (1.1), (1.2) нижний край спектра $\Lambda_{\min}$ оператора H регулярен. Таким образом, из следствий 1.6 и 1.7 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.8. 1) *Пусть при некоторых* $d \geqslant 3$, $p \in (0, \frac{d}{2})$ *выполнено условие* (1.11). *Тогда спектр оператора* $H_-(t)$, $t > 0$, *левее точки* $\Lambda_{\min}$ *конечен и справедлива оценка*

$$N_-(\Lambda_{\min}, \tau) \leqslant C(p, d, H, G) \|V\|^p_{\ell_{p,\infty}} \tau^p, \quad \tau > 0. \tag{1.22}$$

Если дополнительно $V \in \ell^0_{p,\infty}(X)$, *то* $N_-(\Lambda_{\min}, \tau) = o(\tau^p)$, *при* $\tau \to +\infty$.
2) *Если* $V \in \ell_{d/2}(X)$, $d \geqslant 3$, *то спектр оператора* $H_-(t)$, $t > 0$, *левее точки* $\Lambda_{\min}$ *конечен и справедливы оценки*

$$N_-(\Lambda_{\min}, \tau) \leqslant C(p, d, H, G) \|V\|^{d/2}_{\ell_{d/2}} \tau^{d/2}, \quad \tau > 0; \tag{1.23}$$

$$N_-(\Lambda_{\min}, \tau) = o(\tau^{d/2}), \quad \tau \to +\infty. \tag{1.24}$$

3) *Пусть при некоторых* $d \geqslant 3$, $p \in (0, \frac{d}{2})$ *выполнено условие* (1.12). *Тогда спектр оператора* $H_-(t)$, $t > 0$, *левее точки* $\Lambda_{\min}$ *конечен и асимптотика* (1.21$-$) *справедлива при всех* $\lambda \leqslant \Lambda_{\min}$.

Комментарии. • Теоремы 1.3–1.5 и следствия 1.6, 1.7 справедливы для произвольного оператора $H = \mathbb{U}^*\Phi^*[h(k)]\Phi\mathbb{U}$, где $h(k)$ — самосопряженная $(\nu \times \nu)$-матрица-функция, непрерывная по $k \in \mathbb{T}^d$.
• Оценки (1.22)–(1.24) в случае $G = \mathbb{Z}^d$, $H = \Delta$ были получены в работах Левина, Розенблюма и Соломяка [34,44,45], а также в работе Баха [4]. В работе Розенблюма, Соломяка [43] оценки (1.22)–(1.24) были получены для общего графа G и весового оператора Лапласа H на графе G. Граф G не предполагался периодическим; требовалось, чтобы ядро оператора e^{-tH}, $t > 0$, удовлетворяло определенным условиям при больших t.
• Порядок асимптотики (1.21) отличается от порядка асимптотики (0.5). Асимптотический коэффициент зависит от точки наблюдения λ. “Вейлевская” природа асимптотики (1.21) становится ясна, если поменять ролями координаты и квазиимпульсы.
• Разумеется, для полубесконечных лакун (1.6) суммарная кратность спектра оператора $H_-(\tau)$ в лакуне $(-\infty,\Lambda_{\min})$ совпадает с величиной $N_-(\Lambda_{\min},\tau)$; суммарная кратность спектра оператора $H_+(\tau)$ в лакуне $(\Lambda_{\max}, +\infty)$ совпадает с величиной $N_+(\Lambda_{\max}, \tau)$.
• При $d = 2$ в случае регулярного левого (или правого) края лакуны теоремы 1.3, 1.4, а также теорема 1.5 при $\lambda = \Lambda_\pm$ ничего не дают, так как условия (1.16), (1.17) заведомо не выполнены.
• Порядок асимптотики (1.21) во *внутренней* точке спектральной лакуны оператора H не зависит от знака возмущения.
• Операторы $H_+(t)$, $H_-(t)$, $t > 0$, входят симметрично в теоремы 1.3, 1.4 и 1.5. Однако устройство левого и правого краев спектральной лакуны

оператора H может быть разным, а потому поведение величины $N_+(\Lambda_+, \tau)$ может, вообще говоря, отличаться от поведения величины $N_-(\Lambda_-, \tau)$.
• В случае *двудольного* графа (графа, вершины которого распадаются на два непересекающихся класса, причем ребра соединяют лишь вершины разных классов) спектр оператора Лапласа Δ симметричен относительно его середины, и правый край спектра оператора $H = \Delta$ также регулярен (см. [32, 38]). В этом случае справедлив аналог теоремы 1.8 для правого края лакуны.

§2. Предварительные сведения

Пусть заданы матрицы-функции

$$f(k),\ \mathbb{V}(n),\ g(k), \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad k \in \mathbb{T}^d := [-\pi, \pi]^d,$$

согласованных порядков с тем, чтобы произведение

$$\mathbb{G}(k, n) := f(k)\mathbb{V}(n)g(k)$$

представляло собой $(m_1 \times m_2)$-матрицу. Пусть, как и выше, Φ — дискретное преобразование Фурье, определенное равенством (1.4). Рассмотрим *дискретный* ПДО $f\Phi\mathbb{V}\Phi^*g$, действующий из $L_2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C}^{m_2})$ в $L_2(\mathbb{T}^d, \mathbb{C}^{m_1})$. Ниже даны необходимые оценки и асимптотики сингулярных чисел оператора $f\Phi\mathbb{V}\Phi^*g$. Такие вопросы изучались во многих работах для оператора $\widetilde{f}\mathcal{F}\widetilde{\mathbb{V}}\mathcal{F}^*\widetilde{g}$, где $\widetilde{f}(k)$, $\widetilde{\mathbb{V}}(\xi)$, $\widetilde{g}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, — матрицы-функции, согласованных порядков, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Мы следуем идеям работ М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка [7, 8, 16], а так же работы [49]. При оценке сингулярных чисел оператора $f\Phi\mathbb{V}\Phi^*g$ мы пользуемся приемом из [45].

2.1. Необходимые сведения о компактных операторах. Для произвольного компактного оператора $\mathbb{A}$, действующего из гильбертова пространства $\mathfrak{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}_2$, обозначим через $s_m(\mathbb{A})$, $m \in \mathbb{N}$, сингулярные числа оператора $\mathbb{A}$ (т. е. последовательные собственные значения оператора $|\mathbb{A}| := (\mathbb{A}^*\mathbb{A})^{1/2}$). Определим $n(s, \mathbb{A}) := \#\{m \in \mathbb{N} \colon s_m(\mathbb{A}) > s\}$ — функцию распределения сингулярных чисел оператора $\mathbb{A}$. Для самосопряженного компактного оператора $\mathbb{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ верно равенство $n_\pm(s, \mathbb{A}) = n(s, \mathbb{A}_\pm)$, где $\mathbb{A}_\pm := (|\mathbb{A}| \pm \mathbb{A})/2$. Справедливо несколько очевидных соотношений:

$$\begin{gathered}
n(s, \mathbb{A}^*\mathbb{A}) = n(\sqrt{s}, \mathbb{A}) = n(\sqrt{s}, \mathbb{A}^*) = n(s, \mathbb{A}\mathbb{A}^*), \quad s > 0;\\
n(s, \mathbb{A}) = n_+(s, \mathbb{A}) + n_-(s, \mathbb{A}), \quad s > 0, \quad \mathbb{A} = \mathbb{A}^*;\\
n(s, \mathbb{A}) = n_+(s, \mathbb{A}), \quad s > 0, \quad \mathbb{A} \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Для функции распределения s-чисел суммы двух компактных операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ справедливо неравенство Фань-Цюя (см., например, [10, §11.1, п. 3])

$$n(s+t, \mathbb{A}+\mathbb{B}) \leqslant n(s, \mathbb{A}) + n(t, \mathbb{B}), \quad s, t > 0. \tag{2.1}$$

Отметим используемое в дальнейшем "вариационное" свойство функции распределения $n_\pm(s, \mathbb{A})$ самосопряженного компактного оператора $\mathbb{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (см., например, [10, §10.2, п. 2]):

$$n_\pm(s, \mathbb{A}) = \sup \bigl\{\dim \mathscr{F},\ \mathscr{F} \subset \mathfrak{H} : \pm(\mathbb{A}u, u) > s\|u\|^2,\ \forall u \in \mathscr{F} \setminus \{0\}\bigr\}. \tag{2.2}$$

Класс $\mathfrak{S}_{p,\infty}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ (см., например, [6]) выделяется условием конечности функционала

$$\|\mathbb{A}\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}} := \sup_{s>0} s n^{1/p}(s, \mathbb{A}).$$

Пространство $\mathfrak{S}_{p,\infty}$ полно относительно квазинормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}}$, вообще говоря, несепарабельно и содержит сепарабельное подпространство

$$\mathfrak{S}^0_{p,\infty} := \bigl\{\mathbb{A} \in \mathfrak{S}_{p,\infty} : n(s, \mathbb{A}) = o(s^{-p}), s \to +0\bigr\},$$

в котором плотно множество операторов конечного ранга. На пространстве $\mathfrak{S}_{p,\infty}$ определены непрерывные (см., например, [9]) функционалы

$$\mathfrak{D}_p(\mathbb{A}) := \limsup_{s\to 0} s^p n(s, \mathbb{A}); \quad \mathfrak{d}_p(\mathbb{A}) := \liminf_{s\to 0} s^p n(s, \mathbb{A}).$$

Отметим, что равенство $\mathfrak{D}_p(\mathbb{A}) = \mathfrak{d}_p(\mathbb{A})$ означает справедливость асимптотики

$$n(s, \mathbb{A}) \sim s^{-p}\mathfrak{D}_p(\mathbb{A}), \quad s \to +0.$$

На множестве самосопряженных операторов из $\mathfrak{S}_{p,\infty}$ непрерывны функционалы

$$\mathfrak{D}^\pm_p(\mathbb{A}) := \limsup_{s\to +0} s^p n_\pm(s, \mathbb{A}), \quad \mathfrak{d}^\pm_p(\mathbb{A}) := \liminf_{s\to +0} s^p n_\pm(s, \mathbb{A}).$$

В некоторых формулировках будет использоваться обозначение $D_p(\mathbb{A})$ для любого из функционалов $\mathfrak{D}_p(\mathbb{A})$, $\mathfrak{D}^\pm_p(\mathbb{A})$, $\mathfrak{d}_p(\mathbb{A})$, $\mathfrak{d}^\pm_p(\mathbb{A})$. При этом случай $D_p(\mathbb{A}) = \mathfrak{D}^\pm_p(\mathbb{A}), \mathfrak{d}^\pm_p(\mathbb{A})$ автоматически подразумевает равенство $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$. Нетрудно видеть, что для оператора $\mathbb{A} \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ включение $\mathbb{A} \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}$ эквивалентно равенству $\mathfrak{D}_p(\mathbb{A}) = 0$. Отметим используемое в дальнейшем свойство (см., например, [9])

$$D_p(\mathbb{A}+\mathbb{K}) = D_p(\mathbb{A}), \quad D = \mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\pm, \mathfrak{d}, \mathfrak{d}^\pm, \quad \mathbb{A} \in \mathfrak{S}_{p,\infty}, \quad \mathbb{K} \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}.$$

Нам понадобится следующее утверждение (см., например, [10, §11.6, п. 3]).

Предложение 2.1. *Если выполнены условия* $\mathbb{A} \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$, $\mathbb{B} \in \mathfrak{S}_{q,\infty}$, *то верно включение*

$$\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathfrak{S}_{r,\infty}, \quad \text{где} \quad r^{-1} = p^{-1} + q^{-1};$$

при этом справедливо неравенство

$$\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_{\mathfrak{S}_{r,\infty}} \leqslant C(p,q)\|\mathbb{A}\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}}\|\mathbb{B}\|_{\mathfrak{S}_{q,\infty}}.$$

Если дополнительно $\mathbb{A} \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}$ *или* $\mathbb{B} \in \mathfrak{S}^0_{q,\infty}$, *то* $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathfrak{S}^0_{r,\infty}$.

2.2. Оценки типа Цвикеля для окаймленного дискретного преобразования Фурье. Пусть $(\mathcal{X}, d\varrho)$ и $(\mathcal{Y}, d\tau)$ — два сепарабельных измеримых пространства с σ-конечными мерами. Предположим, $T : L_2(\mathcal{Y}, d\tau) \to L_2(\mathcal{X}, d\varrho)$ — линейный ограниченный интегральный оператор с ядром

$$t(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in L_\infty(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, d\varrho \times d\tau).$$

Нас интересуют условия ограниченности, компактности, а также оценки сингулярных чисел оператора fTg при подходящих измеримых весах $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$. Ответ на эти вопросы дает обобщенная *оценка Цвикеля* (см. [16]):

Теорема 2.2. *Пусть* $(f, g) \in L_{p,\infty}(\mathcal{X}, d\varrho) \times L_p(\mathcal{Y}, d\tau)$ *при* $p > 2$. *Тогда справедливы включение* $fTg \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ *и оценка*

$$\|fTg\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}} \leqslant C(p)\|T\|^{1-\frac{2}{p}}\|t\|^{\frac{2}{p}}_{L_\infty}\|f\|_{L_{p,\infty}}\|g\|_{L_p}.$$

Если дополнительно $\varrho_f(s) = o(s^{-p})$, $s \to +0$, *то* $fTg \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}$. *Разумеется, условия на веса* f *и* g *можно поменять местами.*

Далее отметим, что для $m_1 \times m_2$-матричного потенциала $\mathbb{W} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}^d)$, убывающего на бесконечности, оператор $[\mathbb{W}(n)]$ компактен. Более того, справедливо следующее утверждение.

Замечание 2.3. Если $\mathbb{W} \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, то

$$[\mathbb{W}(n)] \in \mathfrak{S}_{p,\infty}, \quad \|[\mathbb{W}(n)]\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}} \leqslant C(m_1, m_2)\|\mathbb{W}\|_{\ell_{p,\infty}}.$$

Если $\mathbb{W} \in \ell^0_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, то

$$[\mathbb{W}(n)] \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}.$$

Рассмотрим прямоугольные матрицы-функции согласованных порядков $f(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\mathbb{W}(n)$, $n \in \mathbb{Z}^d$. Следующее утверждение дает условия компактности, а также оценки сингулярных чисел оператора $f\Phi\mathbb{W}$ (оценку типа Цвикеля).

Предложение 2.4. *Пусть верны включения* $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{W} \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, *где* $p \in (0, +\infty)$ *и*

а) *$q = p$ при $p \in (2, +\infty)$;*
б) *$q = 2$ при $p \in (0, 2)$;*
в) *$q > 2$ при $p = 2$.*

Тогда справедливы включение $f\Phi\mathbb{W} \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ и оценка

$$\|f\Phi\mathbb{W}\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}} \leqslant C\|f\|_{L_q}\|\mathbb{W}\|_{\ell_{p,\infty}}. \tag{2.3}$$

Константа $C = C(p, q, d)$ в оценке (2.3) зависит также от порядков матриц f и $\mathbb{W}$. Если дополнительно $\mathbb{W} \in \ell^0_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, то $f\Phi\mathbb{W} \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай скалярных функций $f(k)$, $\mathbb{W}(n)$.
1) При $p \in (2, +\infty)$ требуемые утверждения вытекают из теоремы 2.2.
2) В случае $p \in (0, 2)$ для проверки включения $f\Phi\mathbb{W} \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ и оценки (2.3) используются аргументы работы [45]. Именно, в силу включения $\ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d) \subset \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, $p \in (0, 2)$, оператор $f\Phi\mathbb{W}$ — класса Гильберта–Шмидта. Достаточно проверять включение $f\Phi\mathbb{W} \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ и оценку (2.3) в предположении $\|f\|_{L_2} = 1$. Разобьем функцию $\mathbb{W}$ на две части $\mathbb{W} = \mathbb{W}^s + \mathbb{W}_s$, $s > 0$; здесь $\mathbb{W}_s(n) = \mathbb{W}(n)$, если $|\mathbb{W}(n)| \leqslant s$, и $\mathbb{W}_s(n) = 0$, если $|\mathbb{W}(n)| > s$. Обозначив через $d\mu$ считающую меру на $\mathbb{Z}^d$, отметим элементарные свойства

$$\begin{cases} \mu_{\mathbb{W}_s}(\sigma) = 0, & \sigma \geqslant s, \\ \mu_{\mathbb{W}_s}(\sigma) \leqslant \mu_{\mathbb{W}}(\sigma), & \sigma < s; \end{cases} \quad \operatorname{rank}\mathbb{W}^s = \mu_{\mathbb{W}}(s), \quad s > 0. \tag{2.4}$$

В силу (2.1) справедливо неравенство

$$n(s, f\Phi\mathbb{W}) \leqslant n(\tfrac{s}{2}, f\Phi\mathbb{W}^s) + n(\tfrac{s}{2}, f\Phi\mathbb{W}_s), \quad s > 0. \tag{2.5}$$

Поскольку $\mathbb{W}^s$ — оператор конечного ранга (см. (2.4)), первое слагаемое в правой части (2.5) допускает оценку

$$n(\tfrac{s}{2}, f\Phi\mathbb{W}^s) \leqslant \mu_{\mathbb{W}}(s) \leqslant \|\mathbb{W}\|^p_{\ell_{p,\infty}} s^{-p}, \quad s > 0. \tag{2.6}$$

Поскольку $\mathbb{W}_s \in \ell_2$, второе слагаемое в правой части (2.5) удовлетворяет неравенству

$$n(\tfrac{s}{2}, f\Phi\mathbb{W}_s) \leqslant 4s^{-2}\|f\Phi\mathbb{W}_s\|^2_{\mathfrak{S}_2} = 4s^{-2}(2\pi)^{-d}\|\mathbb{W}_s\|^2_{\ell_2} \tag{2.7}$$

Остается заметить, что из (2.4) вытекают соотношения

$$\|\mathbb{W}_s\|^2_{\ell_2} = 2\int_0^{+\infty} \sigma\mu_{\mathbb{W}_s}(\sigma)d\sigma \leqslant 2\int_0^s \sigma\mu_{\mathbb{W}}(\sigma)d\sigma \leqslant \frac{2}{2-p}\|\mathbb{W}\|^p_{\ell_{p,\infty}} s^{2-p}. \tag{2.8}$$

Теперь включение $f\Phi\mathbb{W} \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ и оценка (2.3) вытекают из (2.5)–(2.8).
3) Наконец, в случае $p = 2$ воспользуемся равенством

$$\|f\Phi\mathbb{W}\|^2_{\mathfrak{S}_{2,\infty}} = \big\|f\Phi|\mathbb{W}|^{2\theta_1}|\mathbb{W}|^{2\theta_2}\Phi^*\bar{f}\big\|_{\mathfrak{S}_{1,\infty}}, \quad \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_2 = 1/q.$$

Остается применить к операторам $f\Phi|\mathbb{W}|^{2\theta_1}$, $|\mathbb{W}|^{2\theta_2}\Phi^*\bar{f}$ оценку (2.3) для случаев $p = 1/\theta_1 \in (0,2)$ и $p = 1/\theta_2 = q > 2$, соответственно, и воспользоваться предложением 2.1. $\square$

Предложение 2.5. *Пусть при некотором* $p \in (2,+\infty)$ *выполнены условия* $f \in L_{p,\infty}(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{W} \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$. *Тогда справедливы включение* $f\Phi\mathbb{W} \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}$ *и оценка*

$$\|f\Phi\mathbb{W}\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}} \leqslant C(p,d)\|f\|_{L_{p,\infty}}\|\mathbb{W}\|_{\ell_p}. \tag{2.9}$$

Константа $C(p,d)$ *в оценке* (2.9) *зависит от порядков матриц* f *и* $\mathbb{W}$.

Доказательство. При проверке предложения 2.5 достаточно, как и выше, рассмотреть случай скалярных функций $f(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\mathbb{W}(n)$, $n \in \mathbb{Z}^d$. требуемые утверждения вытекают из теоремы 2.2 и оценки $\operatorname{mes}\{k \in \mathbb{T}^d : |f(k)| > s\} = o(s^{-p}), \quad s \to +0.$ $\square$

Из предложений 2.4 и 1.1 вытекает утверждение.

Следствие 2.6. *Пусть выполнены условия* $\mathbb{W}(n) = O(|n|^{-d/p})$, $p > 0$, $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, *где* q *такое же, как в предложении* 2.4. *Тогда справедливо включение* $f\Phi\mathbb{W}\Phi^* \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$.

Приведем теперь свойство приближенного коммутирования операторов f и $\Phi\mathbb{W}\Phi^*$ при подходящих f и $\mathbb{W}$ (близкий, но технически более сложный результат для непрерывного случая был доказан в [49]).

Предложение 2.7. *Пусть* $\mathbb{W}(n)$, $n \in \mathbb{Z}^d$, *и* $f(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, *квадратные матрицы одинаковых порядков*; *пусть при некотором* $p \in (0,+\infty)$ *справедлива асимптотика*

$$\mathbb{W}(n) = |n|^{-d/p}\Big(\omega\Big(\frac{n}{|n|}\Big)\mathbb{1} + o(1)\Big), \quad |n| \to +\infty.$$

Здесь $\mathbb{1}$ — *единичная матрица,* $\omega \in C(\mathbb{S}^{d-1})$ — *скалярная функция. Пусть* $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, *где* q *такое же, как в предложении* 2.4. *Тогда верно включение*

$$f\Phi\mathbb{W}\Phi^* - \Phi\mathbb{W}\Phi^* f \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Согласно предложению 1.1 и предложению 2.4 включение (2.10) достаточно проверять в предположении $\mathbb{W}(0) = 0$, $\mathbb{W}(n) = \omega(\frac{n}{|n|})\mathbb{1}|n|^{-d/p}$, $n \neq 0$. При этом матрица $\mathbb{W}(n)$, $n \in \mathbb{Z}^d$, пропорциональна единичной, а потому достаточно рассмотреть случай скалярных функций $\mathbb{W}(n)$ и $f(k)$. Теперь, в силу предложения 1.1 и предложения 2.4 включение (2.10) можно проверять, предполагая $\omega \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$, $f(k) = (2\pi)^{-d/2}\sum_{|n|\leqslant N} f_n e^{-ink}$, $k \in \mathbb{T}^d$, $N \in \mathbb{N}$.

Поскольку оператор Φ унитарен, включение (2.10) эквивалентно соотношению

$$\Phi^* f\Phi\mathbb{W} - \mathbb{W}\Phi^* f\Phi \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}. \tag{2.11}$$

Доопределим $f_n = 0$ при $|n| > N$. Оператор $\Phi^* f\Phi$ — интегральный (сумматорный) оператор с ядром $(2\pi)^{-d/2} f_{n-m}$, т. е.

$$\Phi^* f\Phi u(n) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}^d:|n-m|\leqslant N} f_{n-m} u(m), \quad u \in \ell_2(\mathbb{Z}^d).$$

Следовательно, оператор $\Phi^* f\Phi\mathbb{W} - \mathbb{W}\Phi^* f\Phi$ — интегральный оператор с ядром

$$(2\pi)^{-d/2} f_{n-m}\big(\mathbb{W}(m) - \mathbb{W}(n)\big), \quad m, n \in \mathbb{Z}^d;$$

отсюда нетрудно вывести равенство

$$\Phi^* f\Phi\mathbb{W} - \mathbb{W}\Phi^* f\Phi = (2\pi)^{-d/2} \sum_{|t|\leqslant N} f_t S_{-t}\big[\mathbb{W}(n) - \mathbb{W}(n+t)\big]. \tag{2.12}$$

Здесь $S_a u(x) = u(x+a)$, $a \in \mathbb{Z}^d$, — унитарный оператор сдвига в $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$. Остается заметить, что справедлива оценка $\mathbb{W}(n) - \mathbb{W}(n+t) = o(|n|^{-d/p})$, $|n| \to +\infty$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Последнее соотношение вместе с (2.12), предложением 1.1 и замечанием 2.3 приводит к (2.11). $\square$

2.3. Асимптотика сингулярных чисел дискретного ПДО отрицательного порядка. Ниже $f(k)$, $\mathbb{V}(n)$, $g(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $n \in \mathbb{Z}^d$, — прямоугольные матрицы-функции согласованных порядков.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия* $\mathbb{V} \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, $f \in L_{q_1}(\mathbb{T}^d)$, $g \in L_{q_2}(\mathbb{T}^d)$; *здесь* $p \in (0, +\infty)$ *и*

а) *если* $p \in (1, +\infty)$, *то* $q_1, q_2 \in (2, +\infty]$, $1/q_1 + 1/q_2 = 1/p$;

б) *если* $p \in (0, 1)$, *то* $q_1 = q_2 = 2$;

в) *если* $p = 1$, *то либо* $q_1 = 2$, $q_2 > 2$, *либо* $q_2 = 2$, $q_1 > 2$.

Тогда справедливы включение $f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g \in \mathfrak{S}_{p,\infty}$ *и оценка*

$$\|f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g\|_{\mathfrak{S}_{p,\infty}} \leqslant C\|f\|_{L_{q_1}} \|g\|_{L_{q_2}} \|\mathbb{V}\|_{\ell_{p,\infty}}. \tag{2.13}$$

Константа C *в* (2.13) *зависит от* p, q_1, q_2, d *и от порядка матриц* f, $\mathbb{V}$ *и* g. *Если дополнительно* $\mathbb{V} \in \ell^0_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, *то* $f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть скалярный случай. Воспользуемся разложением

$$f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g = f\Phi|\mathbb{V}|^{\theta_1} \frac{\mathbb{V}}{|\mathbb{V}|} |\mathbb{V}|^{\theta_2} \Phi^* g, \quad \theta_1 + \theta_2 = 1.$$

При $p \in (1, +\infty)$ положим $\theta_i = p/q_i$, $i = 1, 2$; при $p \in (0, 1)$ выберем $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$; в случае $p = 1$ (и, например, $q_1 = 2$, $q_2 > 2$) выберем

$\theta_2 = p/q_2$, $\theta_1 = 1 - \theta_2$. Далее, применим к операторам $f\Phi|\mathbb{V}|^{\theta_1}$ и $|\mathbb{V}|^{\theta_2}\Phi^* g$ предложение 2.4 и, учитывая предложение 2.1, получим требуемые утверждения. $\square$

Из предложения 2.7 и теоремы 2.8 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8 *и дополнительно*

$$\mathbb{V}(n) = |n|^{-d/p}\Big(v\big(\tfrac{n}{|n|}\big) + o(1)\Big), \quad v \in C(\mathbb{S}^{d-1}), \tag{2.14}$$

и носители функций f и g не пересекаются. Тогда справедливо включение

$$f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай скалярных функций $f(k)$, $\mathbb{V}(n)$, $g(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $n \in \mathbb{Z}^d$. Далее, предположим для определенности $q_1 < \infty$. Согласно теореме 2.8, достаточно проверять (2.15) при $f \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d)$, $g \in L_\infty(\mathbb{T}^d)$; в этих предположениях (2.15) вытекает из предложения 2.7. $\square$

Ниже для произвольной матрицы B положим:

$$\Lambda_p(B) := \sum_k s_k^p(B), \quad p \in (0, +\infty).$$

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8, $q_1, q_2 < \infty$, *и справедливо соотношение* (2.14). *Тогда имеет место асимптотика s-чисел*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_p(f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g) &= \mathfrak{d}_p(f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g)\\ &= \frac{1}{d(2\pi)^d}\int_{\mathbb{T}^d} dk \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Lambda_p\big(f(k)v(\theta)g(k)\big)\, dS(\theta).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Доказательство. При $d = 1$ теорема 2.10 была доказана в работах [24,36]. Здесь мы приведем доказательство для произвольной размерности. Как и выше, можно ограничиться случаем $\mathbb{V}(n) = v(\frac{n}{|n|})|n|^{-d/p}$, $n \neq 0$, $\mathbb{V}(0) = 0$. В силу теоремы 2.8 асимптотические коэффициенты

$$\mathfrak{D}_p(f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g), \quad \mathfrak{d}_p(f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g)$$

непрерывны относительно коэффициентов f, v, g в пространстве

$$L_{q_1}(\mathbb{T}^d) \times C(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_{q_2}(\mathbb{T}^d).$$

С другой стороны, правая часть в (2.16) также непрерывна относительно коэффициентов f, v, g в пространстве

$$L_{q_1}(\mathbb{T}^d) \times C(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_{q_2}(\mathbb{T}^d).$$

Следовательно, достаточно проверить (2.16), для $v \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ и простых функций $f = \sum f_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k}$, $g = \sum g_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k}$, отвечающих конечному разбиению куба $\mathbb{T}^d$ на пересекающиеся только по границе кубы $\{\mathscr{D}_k\}$. В этом случае справедливо равенство

$$f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g = \sum_{k,l} f_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} \Phi\mathbb{V}\Phi^* g_l \mathbf{1}_{\mathscr{D}_l}. \tag{2.17}$$

При $k \neq l$ слагаемые в (2.17) принадлежат классу $\mathfrak{S}^0_{p,\infty}$ (см. (2.15)). Таким образом, выполнено равенство

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_p(f\Phi\mathbb{V}\Phi^* g) = \mathcal{D}_p\Big(\sum_k f_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} \Phi\mathbb{V}\Phi^* g_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k}\Big) = \sum_k \mathcal{D}_p(f_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} \Phi\mathbb{V}\Phi^* g_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k}), \\ \mathcal{D}_p(T) = \lim_{s\to 0} s^p n(s,T).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Доопределим матрицу-функцию $\mathbb{V} \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ равенством

$$\mathbb{V}(\xi) = \zeta(|\xi|) v(\xi/|\xi|) |\xi|^{-d/p}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d;$$

здесь $\zeta(|\xi|)$ — подходящая гладкая срезка в нуле. Обозначим (как и выше) через $\mathcal{F}$ унитарное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{F}u(x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-ixy} u(y)\,dy, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

В работе [8] (пп. 14–18) было доказано соотношение

$$\mathbf{1}_{\mathbb{T}^d} \Phi\mathbb{V}\Phi^* \mathbf{1}_{\mathbb{T}^d} - \mathbf{1}_{\mathbb{T}^d} \mathcal{F}\mathbb{V}\mathcal{F}^* \mathbf{1}_{\mathbb{T}^d} \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}.$$

Следовательно, справедливо включение

$$f_k \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} \Phi\mathbb{V}\Phi^* \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} g_k - \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} \mathcal{F} f_k \mathbb{V} g_k \mathcal{F}^* \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}. \tag{2.19}$$

В работах [7, 8] была найдена асимптотика

$$\mathcal{D}_p(\mathbf{1}_{\mathscr{D}_k} \mathcal{F} f_k \mathbb{V} g_k \mathcal{F}^* \mathbf{1}_{\mathscr{D}_k}) = (2\pi)^{-d} d^{-1} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} dS(\theta) \int\limits_{\mathscr{D}_k} \Lambda_p(f_k v(\theta) g_k)\,dx. \tag{2.20}$$

Сравнивая (2.20), (2.19) и (2.18) приходим к (2.16). □

§3. Доказательство теорем 1.3, 1.4 и 1.5

Для определенности мы будем проверять оценки и асимптотики для величины $N_+(\lambda,\tau)$, $\lambda \in [\Lambda_+, \Lambda_-)$, $\tau > 0$, в случае *внутренней* лакуны (Λ_+, Λ_-) в спектре $\sigma(H)$, удовлетворяющей при некотором $N \in \{2, \dots, \nu\}$ условию (1.7).

3.1. Предварительные замечания. 1) При условиях (1.1), (1.2) и (1.9) (они справедливы для любой из теорем 1.3, 1.4, 1.5) считающая функция $N_+(\lambda,\tau)$ удовлетворяет равенству (1.14+). Обозначив для краткости $E_+ := E_H(-\infty,\Lambda_+]$, из (1.14+) и вариационного свойства (2.2) выведем оценку

$$\begin{aligned} N_+(\lambda,\tau) &\leqslant n(\tau^{-1}, V^{1/2}E_+(\lambda I-H)^{-1}E_+V^{1/2}) \\ &= n(\tau^{-1}, \mathbb{V}^{1/2}\mathbb{E}_+(\lambda I-\mathbb{H})^{-1}\mathbb{E}_+\mathbb{V}^{1/2}), \quad \lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbb{H}=\mathbb{U}H\mathbb{U}^*$, $\mathbb{V}=\mathbb{U}V\mathbb{U}^*$, $\mathbb{E}_+=\mathbb{U}E_+\mathbb{U}^*=E_{\mathbb{H}}(-\infty,\Lambda_+]$, унитарный оператор $\mathbb{U}\colon \ell_2(X)\to\ell_2(\mathbb{Z}^d;\mathbb{C}^\nu)$ определен равенством (1.3).

Согласно представлению (1.5) оператор $\mathbb{H}$ унитарно эквивалентен оператору в $L_2(\mathbb{T}^d;\mathbb{C}^\nu)$ умножения на некоторую матрицу-функцию $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^d$. Пусть, как и выше, $\{E_s(k)\}_{s=1}^\nu$ — собственные значения матрицы $h(k)$, занумерованные с учетом кратности в порядке неубывания. Пусть $\{\varphi_s(k)\}_{s=1}^\nu$ — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы $h(k)$, отвечающих собственным числам $\{E_s(k)\}_{s=1}^\nu$; $P_s(k) := (\,\cdot\,,\varphi_s(k))\varphi_s(k)$, $s=1,\dots,\nu$. Из представления (1.5) следует равенство

$$\mathbb{V}^{1/2}\mathbb{E}_+(\lambda-\mathbb{H})^{-1}\mathbb{E}_+\mathbb{V}^{1/2}=\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon_s^*(\lambda)\Upsilon_s(\lambda), \quad \lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-), \tag{3.2}$$

где операторы $\Upsilon_s(\lambda)\colon \ell_2(\mathbb{Z}^d;\mathbb{C}^\nu)\to L_2(\mathbb{T}^d;\mathbb{C}^\nu)$ определены равенствами

$$\Upsilon_s(\lambda) := \big[(\lambda-E_s(k))^{-1/2}P_s(k)\big]\Phi\mathbb{V}^{1/2}, \quad s=1,\dots,N-1, \quad \lambda\in[\Lambda_+,\Lambda_-).$$

Здесь Φ — это дискретное преобразование Фурье, определенное равенством (1.4).

2) Если операторы $\Upsilon_s(\Lambda_+)$, $s=1,\dots,N-1$ компактны, то в силу соотношений $0\leqslant(\lambda-E_s(k))^{-1}\leqslant(\Lambda_+-E_s(k))^{-1}$, $s=1,\dots,N-1$, $k\in\mathbb{T}^d$, справедливы операторные неравенства

$$\Upsilon_s^*(\lambda)\Upsilon_s(\lambda)\leqslant\Upsilon_s^*(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+), \quad s=1,\dots,N-1, \quad \lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-). \tag{3.3}$$

Из (3.1), (3.2) и (3.3) вытекает оценка

$$N_+(\lambda,\tau)\leqslant n(\tau^{-1},\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon_s^*(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+)), \quad \lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-),$$

которая, при переходе к пределу при $\lambda\to\Lambda_++0$, дает неравенство

$$N_+(\Lambda_+,\tau)\leqslant n\Big(\tau^{-1},\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon_s^*(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+)\Big). \tag{3.4}$$

3) Отметим, что оператор $\mathbb{V} = \mathbb{U}V\mathbb{U}^*$ есть оператор умножения на матрицу-функцию в $\mathbb{Z}^d$

$$\mathbb{V}(n) = \begin{pmatrix} V(x_1+n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V(x_2+n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V(x_\nu+n) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}^d.$$

Следовательно, из условия (1.10) вытекают соотношения

$$\mathbb{V} \in \ell_p(\mathbb{Z}^d), \quad \|\mathbb{V}\|^p_{\ell_p} = \|V\|^p_{\ell_p}; \tag{3.5}$$

из условия (1.11) — соотношения

$$\mathbb{V} \in \ell_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d), \quad \|\mathbb{V}\|^p_{\ell_{p,\infty}} \leqslant C(\nu)\|V\|^p_{\ell_{p,\infty}}; \tag{3.6}$$

наконец, из условия (1.12) — асимтотика

$$\mathbb{V}(n) = |n|^{-d/p}\left(\vartheta\Big(\frac{n}{|n|}\Big)\mathbb{1} + o(1)\right), \quad |n| \to +\infty. \tag{3.7}$$

3.2. Доказательство теоремы 1.3. В соответствии с замечаниями из предыдущего пункта, в условиях теоремы 1.3 справедливы утверждения (1.17+) и (3.5). Следовательно, согласно предложению 2.5, операторы $\Upsilon_s(\Lambda_+) \in \mathfrak{S}^0_{2p,\infty}$, $s = 1, \dots, N-1$, и верны неравенства

$$\|\Upsilon_s(\Lambda_+)\|^{2p}_{\mathfrak{S}_{2p,\infty}} \leqslant C(p,d,\nu)\|(\Lambda_+ - E_s(\,\cdot\,))^{-1}\|^p_{L_{p,\infty}}\|V\|^p_{\ell_p}, \quad s = 1, \dots, N-1. \tag{3.8}$$

Оценки (1.18+) и (1.19+) вытекают из (3.4), включений $\Upsilon_s(\Lambda_+) \in \mathfrak{S}^0_{2p,\infty}$ и (3.8). □

3.3. Доказательство теоремы 1.4. Согласно замечаниям пункта 1, в условиях теоремы 1.4 справедливы утверждения (1.16+) и (3.6). Следовательно, в силу предложения 2.4, верны соотношения

$$\begin{gathered} \Upsilon_s(\Lambda_+) \in \mathfrak{S}_{2p,\infty}, \\ \|\Upsilon_s(\Lambda_+)\|^{2p}_{\mathfrak{S}_{2p,\infty}} \leqslant C(p,d,\nu,\varkappa)\|(\Lambda_+ - E_s(\,\cdot\,))^{-1}\|^p_{L_\varkappa}\|V\|^p_{\ell_{p,\infty}}, \end{gathered} \tag{3.9}$$

при всех $s = 1, \dots, N-1$. Оценка (1.20+) вытекает из (3.4) и (3.9).

Если дополнительно $V \in \ell^0_{p,\infty}(X)$, то $\mathbb{V} \in \ell^0_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$, а потому (в силу предложения 2.4) справедливы включения $\Upsilon_s(\Lambda_+) \in \mathfrak{S}^0_{2p,\infty}$, $s = 1, \dots, N-1$, а значит, и включение $\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon^*_s(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+) \in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}$. Последнее вместе с (3.4) и означает $N_+(\Lambda_+, \tau) = o(\tau^p)$, $\tau \to +\infty$. □

3.4. Доказательство теоремы 1.5. Случай $\lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-)$. Как и выше, разберем более трудный случай *внутренней* лакуны (Λ_+, Λ_-) в спектре оператора H, удовлетворяющей при некотором $N \in \{2, \dots, \nu\}$ условию (1.7). При таких условиях равенство (1.15+) принимает вид:

$$\Gamma_p^+(\lambda) := (2\pi)^{-d} d^{-1} \sum_{s=1}^{N-1} \int_{\mathbb{T}^d} (\lambda - E_s(k))^{-p}\, dk \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \vartheta^p(\theta) dS(\theta), \quad \lambda \in [\Lambda_+, \Lambda_-].$$

Из равенства (1.14+) и вариационного свойства (2.2) вытекают оценка сверху (3.1) и оценка *снизу*

$$\begin{aligned} N_+(\lambda,\tau) &\geqslant n_+\big(\tau^{-1}, E_+ V^{1/2}(\lambda I - H)^{-1} V^{1/2} E_+\big) \\ &= n_+\big(\tau^{-1}, \mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2}(\lambda I - \mathbb{H})^{-1} \mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+\big), \quad \lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-), \quad \tau > 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

В условиях теоремы 1.5 оператор $\mathbb{V}^{1/2}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_{2p,\infty}$. Таким образом, из (3.1) и (3.10) следует, что для обоснования (1.21+) достаточно проверить равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_p^+(\mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2}\big(\lambda I - \mathbb{H}\big)^{-1} \mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+) &= \mathfrak{D}_p^+\big(\mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1} \mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2}\big) \\ &= \Gamma_p^+(\lambda), \quad \lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Согласно (1.5) имеет место представление $\mathbb{E}_+ = \Phi^*[P_+(k)]\Phi$, где $P_+(k) := \sum_{s=1}^{N-1} P_s(k)$; при этом в условиях теоремы 1.5 справедлива асимптотика (3.7). Из предложения 2.7 вытекает включение $\mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2} - \mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+ \in \mathfrak{S}^0_{2p,\infty}$, а потому верно

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2} (\lambda I - \mathbb{H})^{-1} \mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+ - \mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1} \mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2} &\in \mathfrak{S}^0_{p,\infty}, \\ \lambda &\in (\Lambda_+, \Lambda_-). \end{aligned} \tag{3.12}$$

С учетом (3.12) можно заменить (3.11) на эквивалентное выражение

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_p\big(\mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1} \mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2}\big) &= \mathfrak{D}_p\big(\mathbb{V}^{1/2} \mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1} \mathbb{E}_+ \mathbb{V}^{1/2}\big) \\ &= \Gamma_p^+(\lambda), \quad \lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Поскольку оператор $\mathbb{E}_+(\lambda I - \mathbb{H})^{-1} \mathbb{E}_+$ положительно определен, соотношения (3.13) равносильны равенствам

$$\begin{aligned} &\mathfrak{d}_p\big(\mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1/2} \mathbb{E}_+ \mathbb{V} \mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1/2} \mathbb{E}_+\big) \\ &\qquad = \mathfrak{D}_p\big(\mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1/2} \mathbb{E}_+ \mathbb{V} \mathbb{E}_+ (\lambda I - \mathbb{H})^{-1/2} \mathbb{E}_+\big) \\ &\qquad = \Gamma_p^+(\lambda), \quad \lambda \in (\Lambda_+, \Lambda_-). \end{aligned} \tag{3.14}$$

В силу (1.5), соотношения (3.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&\mathfrak{d}_p\big([P_+(k)(\lambda\mathbf{1}-h(k))^{-1/2}P_+(k)]\Phi\mathbb{V}\Phi^*[P_+(k)(\lambda\mathbf{1}-h(k))^{-1/2}P_+(k)]\big)\\&=\mathfrak{D}_p\big([P_+(k)(\lambda\mathbf{1}-h(k))^{-1/2}P_+(k)]\Phi\mathbb{V}\Phi^*[P_+(k)(\lambda\mathbf{1}-h(k))^{-1/2}P_+(k)]\big)\\&\qquad\qquad\qquad\qquad=\Gamma_p^+(\lambda),\end{aligned}\tag{3.15}$$

при $\lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-)$. Остается заметить, что (3.15) вытекает непосредственно из (2.16).

Случай полубесконечной лакуны разбирается аналогично (только несколько проще).

Случай $\lambda=\Lambda_+$**.** Проверим формулу (1.21+) на левом краю лакуны при условии (1.16+). Как и выше, разберем случай внутренней лакуны (Λ_+,Λ_-) в спектре оператора H, удовлетворяющей при некотором $N\in\{2,\dots,\nu\}$ условию (1.7). Из (1.16+) вытекает соотношение $\Gamma_p^+(\lambda)\to\Gamma_p^+(\Lambda_+)$, $\lambda\to\Lambda_++0$. С другой стороны, при условии (1.16+) для любого $s=1,\dots,N-1$ справедливы утверждения

$$\begin{aligned}&\|(\lambda-E_s(\cdot))^{-1/2}P_s(\cdot)\|_{L_{2\varkappa}}\leqslant\|(\Lambda_+-E_s(\cdot))^{-1/2}P_s(\cdot)\|_{L_{2\varkappa}},\ \lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-),\\&(\lambda-E_s(\cdot))^{-1/2}P_s(\cdot)\to(\Lambda_+-E_s(\cdot))^{-1/2}P_s(\cdot),\ \lambda\to\Lambda_++0,\ \text{ в }\ L_{2\varkappa}(\mathbb{T}^d).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Согласно предложению 2.4, из (3.16) следует, что оператор $\Upsilon_s(\lambda)$ сходится при $\lambda\to\Lambda_++0$ в классе $\mathfrak{S}_{2p,\infty}$ к оператору $\Upsilon_s(\Lambda_+)$, $s=1,\dots,N-1$. При этом квазинорма $\|\Upsilon_s(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_{2\varkappa,\infty}}$, $\lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-)$, равномерно ограничена. Следовательно (см. предложение 2.1 и (3.2)), оператор $\mathbb{V}^{1/2}\mathbb{E}_+(\lambda I-\mathbb{H})^{-1}\mathbb{E}_+\mathbb{V}^{1/2}$ сходится при $\lambda\to\Lambda_++0$ в классе $\mathfrak{S}_{p,\infty}$ к оператору $\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon_s^*(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+)$, а потому

$$\mathfrak{d}_p\bigg(\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon_s^*(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+)\bigg)=\mathfrak{D}_p\bigg(\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon_s^*(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+)\bigg)=\Gamma_p^+(\Lambda_+).\tag{3.17}$$

Как и выше, в условиях теоремы 1.5 справедливо неравенство (3.4). Следовательно (в силу монотонности $N_+(\,\cdot\,,\tau)$), справедливы неравенства

$$\begin{aligned}N_+(\lambda,\tau)\leqslant N_+(\Lambda_+,\tau)\leqslant n\Big(\tau^{-1},\sum_{s=1}^{N-1}\Upsilon_s^*(\Lambda_+)\Upsilon_s(\Lambda_+)\Big),\\\lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-),\quad\tau>0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Из (3.17) и (3.18) вытекают соотношения

$$\begin{aligned}\Gamma_p^+(\lambda)&\leqslant\liminf_{\tau\to+\infty}\tau^{-p}N_+(\Lambda_+,\tau)\\&\leqslant\limsup_{\tau\to+\infty}\tau^{-p}N_+(\Lambda_+,\tau)\leqslant\Gamma_p^+(\Lambda_+),\quad\lambda\in(\Lambda_+,\Lambda_-).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Переходя в (3.19) к пределу при $\lambda \to \Lambda_+ + 0$, получим:
$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{-p} N_+(\Lambda_+, \tau) = \Gamma_p^+(\Lambda_+). \qquad \square$$

Список литературы

[1] Alama S., Deift P. A., Hempel R., *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 291–321.

[2] Ando K., Isozaki H., Morioka H., *Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices*, Ann. Henri Poincaré **17** (2016), no. 8, 2103–2171.

[3] Boutet de Monvel A., Sahbani J., *On the spectral properties of discrete Schrödinger operators*: (*the multidimensional case*), Rev. Math. Phys. **11** (1999), no. 9, 1061–1078.

[4] Bach V., de Siqueira Pedra W., Lakaev S. N., *Bounds on the discrete spectrum of lattice Schrödinger operators*, J. Math. Phys. **59** (2018), no. 2, 022109. https://doi.org/10.1063/1.5006641.

[5] Бирман М. Ш., *Дискретный спектр периодического оператора Шрёдингера возмущенного убывающим потенциалом*, Алгебра и анализ **8** (1996), №1, 3–20.

[6] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*, Успехи мат. наук **32** (1977), №1, 17–84.

[7] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно однородными символами*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1977**, вып. 3, 13–21.

[8] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно однородными символами*, Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. **1979**, вып. 3, 5–10.

[9] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Компактные операторы со степенной асимптотикой сингулярных чисел*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **126** (1983), 21–30.

[10] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Учеб. пособ., 2-е изд., испр. и доп., Лань, СПб., 2010.

[11] Birman M. Sh., *Discrete spectrum in the gaps of a continuous one for perturbation with large coupling constant*, Estimates and Asimptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations (Leningrad, 1989-90), Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 57–73.

[12] Birman M. Sh., *Discrete spectrum of the periodic Schrödinger operator for non-negative perturbations.* Mathematical Results in Quantum Mechanics (Blossin, 1993), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 70, Birkhauser, Basel, 1994, pp. 3–7.

[13] Birman M. Sh., *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator*. I. *Regular perturbations*, Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8, Akad. Verlag, Berlin, 1995, 334–352.

[14] Birman M. Sh., Karadzhov G. E., Solomyak M. Z., *Boundedness conditions and spectrum estimates for the operators $b(X)a(D)$ and their analogs*, Estimates and Asimptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations (Leningrad, 1989-90), Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 85–106.

[15] Birman M. Sh., Sloushch V. A., *Discrete spectrum of the periodic Schrödinger operator with a variable metric perturbed by a nonnegative potential*, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 32–53.

[16] Birman M. S., Solomyak M. Z. *Negative discrete spectrum of the Schrödinger operator with large coupling constant*: *a qualitative discussion*, Order, Disorder and Chaos in

Quantum Systems (Dubna, 1989) Oper. Theory Adv. Appl., vol. 46, Birkhauser, Basel, 1990, pp. 3–16.

[17] Birman M. S., Solomyak M. Z. *Schrödinger operator. Estimates for bounds states as functional-theiretical problem*, Spectral Theory of Operators (Novgorod, 1989), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 1–54.

[18] Castro Neto A. H., Guinea F., Peres N. M. R., Novoselov K. S., Geim A., *The electronic properties of graphene*, Rev. Mod. Phys. **81** (2009), 109–162.

[19] Cattaneo C., *The spectrum of the continuous Laplacian on a graph*, Monatsh. Math. **124** (1997), no. 3, 215–235.

[20] Chung F., *Spectral graph theory*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[21] Cwikel M., *Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), no. 1, 93–100.

[22] Hayashi Y., Higuchi Y., Nomura Y., Ogurisu O., *On the number of discrete eigenvalues of a discrete Schrödinger operator with a finitely supported potential*, Lett. Math. Phys. **106** (2016), no. 11, 1465–1478.

[23] Hempel R., *On the asymptotic distribution of the eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H \pm \lambda W$ in a spectral gap of H*, J. Reine Angew. Math. **339** (1989), 38–59.

[24] Hong S. Y., Lifshits M., Nazarov A., *Small deviations in L2-norm for Gaussian dependent sequences*, Electron. Commun. Probab. **21** (2016), no. 41, 1–9.

[25] Isozaki H., Korotyaev E., *Inverse problems, trace formulae for discrete Schrodinger operators*, Ann. Henri Poincaré **13** (2012), no. 4, 751–788.

[26] Isozaki H., Morioka H., *A Rellich type theorem for discrete Schrödinger operators*, Inverse Probl. Imaging **8** (2014), no. 2, 475–489.

[27] Korotyaev E., *Trace formulae for Schrödinger operators on lattice*, `arXiv:1702.01388`.

[28] Korotyaev E., Laptev A., *Trace formulae for Schrödinger operators with complex-valued potentials on cubic lattices*, Bull. Math. Sci. **8** (2018), no. 3, 453–475.

[29] Korotyaev E., Moller J., *Weighted estimates for the discrete Laplacian on the cubic lattice*, `arXiv:1701.03605`.

[30] Коротяев Е. Л., Сабурова Н. Ю., *Спектральные оценки для оператора Шрёдингера на периодических дискретных графах*, Алгебра и анализ **30** (2018), №4, 61–107.

[31] Korotyaev E., Saburova N., *Schrödinger operators on periodic graphs*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), no. 1, 576–611.

[32] Korotyaev E., Saburova N., *Effective masses for Laplacians on periodic graphs*, J. Math. Anal. Appl. **436** (2016), no. 1, 104–130.

[33] Korotyaev E., Saburova N., *Scattering on periodic metric graphs*, `arXiv:1507.06441`.

[34] Levin D., Solomyak M., *Rozenblum–Lieb–Cwikel inequality for Markov generators*, J. Anal. Math. **71** (1997), no. 1, 173–193.

[35] Lieb E., *The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem*, Geometry of the Laplace Operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 36, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, pp. 241–252.

[36] Lifshits M., Nazarov A., *L_2-small deviations for weighted stationary processes*, Mathematika **64** (2018), no. 2, 387–405.

[37] Molchanov S., Vainberg B. *Bargmann type estimates of the counting function for general Schrödinger operators*, J. Math. Sci. **184** (2012), no. 4, 457–508.

[38] Mohar B. *The spectrum of an infinite graph*, Linear Algebra Appl. **48** (1982), 245–256.

[39] Parra D., Richard S., *Spectral and scattering theory for Schrödinger operators on perturbed topological crystals*, Rev. Math. Phys. **30** (2018), no. 4, 1850009.
[40] Post O., *Spectral analysis on graph-like spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 2039, Springer, Heidelberg, 2012.
[41] Розенблюм Г. В., *Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов*, Докл. АН СССР **202** (1972), №5, 1012–1015.
[42] Розенблюм Г. В., *Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов*, Изв. вузов. Мат. **1976**, №10, 75–86.
[43] Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., *О спектральных оценках для операторов типа Шрёдингера: случай малой локальной размерности*, Функц. анал. и его прил. **44** (2010), №4, 21–33.
[44] Rozenblum G., Solomyak M., *Counting Schrödinger boundstates: semiclassiecs and beyond*, Sobolev Spaces in Mathematics. II, Int. Math. Ser. (N.Y.), vol. 9, Springer, New York, 2009, pp. 329–354.
[45] Rozenblum G., Solomyak M., *On the spectral estimates for the Schrödinger operator on* $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 3$, J. Math. Sci. (N.Y.) **159** (2009), no. 2, 241–263.
[46] Rozenblum G., Solomyak M., *On spectral estimates for the Schrödinger operators in global dimension* 2, Алгебра и анализ **25** (2013), №3, 185–199.
[47] Shaban W., Vainberg B., *Radiation conditions for the difference Schrödinger operators*, J. Appl. Anal. **80** (2001), 525–556.
[48] Shargorodsky E., *On negative eigenvalues of two-dimensional Schrödinger operators*, Proc. Lond. Math. Soc. **108** (2014), no. 2, 441–483.
[49] Слоущ В. А., *Приближенное коммутирование убывающего потенциала и функции от эллиптического оператора*, Алгебра и анализ **26** (2014), №5, 214–226.
[50] Слоущ В. А., *Дискретный спектр периодического оператора Шрёдингера с переменной метрикой при возмущении неотрицательным быстро убывающим потенциалом*, Алгебра и анализ **27** (2015), №2, 196–210.
[51] Sunada T. *Topological crystallography*, Surveys Tutorials Appl. Math. Sci., vol. 6, Springer, Tokyo, 2013.

Поступило 10 января 2019

Кафедра математического анализа,
С.-Петербургский
государственный университет
Университетская набережная 7/9
198034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: e.korotyaev@spbu.ru, korotyaev@gmail.com

Кафедра высшей математики и математической физики,
С.-Петербургский государственный университет
Университетская набережная 7/9
198034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: v.slouzh@spbu.ru, vsloushch@list.ru