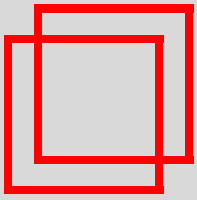

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Масленникова, Смешанные задачи для одной системы уравнений с частными производными первого порядка, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1958, том 22, выпуск 2, 271–298

https://www.mathnet.ru/im3967

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
11 июля 2025 г., 15:00:57

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
22 (1958), 271–298

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Решаются две смешанные задачи для уравнения четвертого порядка и для системы уравнений первого порядка, описывающих малые колебания вращающейся жидкости с учетом сжимаемости. Доказывается единственность этих решений, непрерывная зависимость их от начальных данных и правых частей уравнений системы, а также исследуются дифференциальные свойства полученных решений.

Рассматриваются две смешанные задачи для системы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \vec{k}] + \operatorname{grad} p = \vec{F}, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = \psi, \end{aligned} \tag{1}$$

записанной в векторной форме, когда кроме начальных данных

$$\begin{aligned} &\vec{v}\,|_{t=0} = \vec{v^0}(x), \\ &p\,|_{t=0} = p^0(x), \end{aligned} \tag{2}$$

задаются условия на границе. Эти условия могут быть двух видов:

$$p\,|_S = 0 \tag{3}$$

или

$$v_n|_S = 0, \tag{4}$$

где S — поверхность в трехмерном пространстве переменных $x = x_1$, x_2, x_3, ограничивающая область Ω, в которой задана система (1), n — внутренняя нормаль к этой поверхности, вектор $\vec{v}$ имеет компоненты v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, $\vec{k}$ — единичный орт, направленный по оси x_3. В соответствии с этим мы будем говорить о первой или второй смешанных задачах. Задача Коши для системы (1) при условиях (2) решена в явном виде в работе [4].

Такие же смешанные задачи и задача Коши были решены С. Л. Соболевым для случая, когда в последнее уравнение системы (1) не входит $\frac{\partial p}{\partial t}$, т. е. для несжимаемой жидкости [см. [1]].

Одновременно мы решаем две смешанные задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = f, \tag{5}$$

которое получается из системы (1) путем исключения неизвестных (здесь Δu — оператор Лапласа). Решение уравнения (5) находится при начальном условии

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{6}$$

и при одном из следующих граничных условий:

$$u\,|_S = 0$$

или

$$\left[\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial n} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cos nx_3 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t}\cos nx_1\right]_S = 0.$$

Краткое резюме настоящей статьи содержится в работе ([5]).

§ 1. Решение первой смешанной задачи для уравнения четвертого порядка

Построение решения первой смешанной задачи для системы (1) при условиях (2) и (3) начнем с определения неизвестной функции p. Для этого построим решение уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 p}{\partial t^4} = f \tag{5}$$

в ограниченной области изменения x, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{6'}$$

и граничному условию

$$p\,|_S = 0 \tag{7}$$

при $t \geqslant 0$.

Предполагая, что функции φ_k дважды непрерывно дифференцируемы по x и что выполнены условия согласования:

$$\varphi_k\,|_S = 0 \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

можно начальные условия (6′) свести к однородным, сделав замену неизвестной функции по формуле *:

$$p_1 = p - \varphi_0 - t\varphi_1 - \frac{t^2}{2}\varphi_2 - \frac{t^3}{6}\varphi_3. \tag{8}$$

Таким образом, для упрощения выкладок, мы будем доказывать существование решения уравнения (5) при условиях:

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{6}$$

$$p\,|_S = 0. \tag{7}$$

* Заметим, что сведение начальных условий к однородным не играет принципиальной роли в доказательстве и вводится только ради простоты изложения; следовательно, использование условий согласования несущественно.

Пусть свободный член уравнения (5) после того, как начальные условия сведены к нулевым, таков, что

$$\int_0^\infty \int_\Omega f^2 e^{-2\alpha_1 t}\, d\Omega\, dt < \infty \tag{9}$$

для какого-нибудь $\alpha_1 \geqslant 0$.

Применим к уравнению (5) преобразование Лапласа по переменному t. Обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty p(x,\ t)\, e^{-\lambda t} dt = P(x,\ \lambda),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x,\ t)\, e^{-\lambda t} dt = \varphi(x,\ \lambda),$$

где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_0 > 0$.

Уравнение (5) при условиях (6) преобразуется в уравнение

$$\lambda^2 \Delta P + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - \lambda^2 (1 + \lambda^2) P = \varphi(x,\ \lambda). \tag{10}$$

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию

$$P|_S = 0. \tag{11}$$

Определение. Назовем обобщенным решением уравнения (10) при нулевом граничном условии (11) функцию P, принадлежащую классу $D^0(\Omega)$ [см. (2)] и удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega \left(\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) d\Omega = -\int_\Omega \{\lambda^2 (1 + \lambda^2) P\Phi + \varphi\Phi\}\, d\Omega \tag{12}$$

для любой комплексно-значной функции $\Phi \in D^0(\Omega)$. Здесь $D^0(\Omega)$ есть замыкание в норме $W_2^{(1)}(\Omega)$ совокупности всех один раз непрерывно дифференцируемых в Ω функций, равных нулю вблизи границы области.

Доказательство существования и единственности этого решения можно провести методом конечных разностей так же, как в работе (2) (стр. 197—200), с использованием теорем вложения С. Л. Соболева, если доказать справедливость следующих неравенств:

$$I_{\Omega_h}(P) \equiv h^3 \sum_{\Omega_h} |P_h|^2 \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|^2} h^3 \cdot \sum_{\Omega_h} |\varphi|^2, \tag{13}$$

$$I_{\Omega_h}^{(1)}(P) \equiv h^3 \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{3} |P_{x_i}|^2 \leqslant c_2 h^3 \sum_{\Omega_h} |\varphi|^2, \tag{14}$$

где $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_0 > 0$, h — шаг сетки, на которую разбивается пространство x_1, x_2, x_3,

$$P_{x_i} = \frac{P(x_i + \Delta x_i,\ \lambda) - P(x_i,\ \lambda)}{\Delta x_i},$$

Ω_h — квадрильяж области Ω и суммирование проводится по всем точкам решетки, принадлежащим Ω_h.

Уравнение (10) при этом заменяется разностным:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} P_{x_i \bar{x}_i} + P_{x_3 \bar{x}_3} - \lambda^2 (1 + \lambda^2) P_h = \varphi(x, \lambda). \tag{10*}$$

Функцию P_h в точках границы области Ω_h и вне этой области положим равной нулю. Во внутренних точках области Ω_h функция P_h должна удовлетворять уравнению (10*). Тогда мы получим систему неоднородных алгебраических уравнений, число которых совпадает с числом неизвестных. Для ее однозначной разрешимости покажем, что соответствующая ей однородная система может иметь только нулевое решение. Для этого достаточно доказать неравенства (13) и (14) [см. (2)], но мы докажем более сильные неравенства:

$$I_{\Omega_{i_\alpha}}(P) \leqslant \frac{c_3}{|\lambda|^6} I_{\Omega_h}(\varphi), \tag{15}$$

$$I^{(1)}_{\Omega_h}(P) \leqslant \frac{c_4}{|\lambda|^4} I_{\Omega_h}(\varphi), \tag{16}$$

которыми и будем пользоваться в дальнейшем. Для их доказательства умножим (10*) на функцию $\overline{P}$, комплексно-сопряженную с P, разделим обе части (10*) на $\lambda^2 + 1$ и просуммируем по всем точкам решетки и по частям.

Ввиду нулевого граничного условия, контурные члены пропадут и мы получим следующее равенство:

$$h^3 \sum_{\Omega_h} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} P_{x_i} \overline{P}_{x_i} + P_{x_3} \overline{P}_{x_3} \right\} = - h^3 \sum_{\Omega_h} (\lambda^2 |P_h|^2 + \varphi' \overline{P}_h),$$

где

$$\varphi'(x, \lambda) = \frac{\varphi(x, \lambda)}{\lambda^2 + 1}.$$

Отделим вещественные и мнимые части, считая

$$P_h = P_1 + iP_2, \quad \varphi' = \varphi'_1 + i\varphi'_2, \quad \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2,$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2} + i \frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2} = a_1 + ia_2.$$

Мы получим:

$$h^3 \sum_{\Omega_h} \left(a_1 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 + |P_{x_3}|^2 \right) = h^3 \sum_{\Omega_h} \left\{ (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) |P_h|^2 - \sum_{i=1}^{2} P_i \varphi'_i \right\}, \tag{17}$$

$$h^3 \sum_{\Omega_h} a_2 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 = h^3 \sum_{\Omega_h} \{ -2\lambda_1\lambda_2 |P_h|^2 + \varphi'_1 P_2 - \varphi'_2 P_1 \}. \tag{18}$$

Как и в работе (2), разберем два случая: 1) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$, 2) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$ и заметим, что в обоих случаях $a_1 > 0$ (полагаем $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > 1$).

1) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$. Оценим a_1 снизу:

$$a_1 \geqslant \frac{\lambda_1^4 + \frac{1}{2}\lambda_1^2}{3\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 + 1} \geqslant \frac{1}{6}.$$

Подставляя эту оценку в (17), получим неравенство:

$$I_{\Omega_h}^{(1)}(P) \leqslant h^3 \sum_{\Omega_h} 6 \left\{ -\frac{1}{2}\lambda_1^2 |P_h|^2 - P_1\varphi_1' - P_2\varphi_2' \right\}.$$

Перенося первый член правой части налево и используя неравенство Коши, получаем неравенства (13) и (14).

2) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$. Оценим a_1 снизу:

$$a_1 \geqslant \frac{\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2(2\lambda_1^2 - 1)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)^2 + 8\lambda_2^4} \geqslant \frac{\lambda_2^4}{(3\lambda_2^2 + 1)^2 + 8\lambda_2^4} \geqslant \frac{1}{33}.$$

Подставляя эту оценку в (17), получим неравенство:

$$I_{\Omega_h}^{(1)}(P) \leqslant 33 |\lambda_2|^2 I_{\Omega_h}(P) + 33 \sqrt{I_{\Omega_h}(P) I_{\Omega_h}(\varphi')}. \tag{19}$$

С другой стороны, из (18) имеем:

$$2 |\lambda_1\lambda_2| I_{\Omega_h}(P) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2 |\lambda_1\lambda_2|}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2} I_{\Omega_h}^{(1)}(P) + \sqrt{I_{\Omega_h}(P) I_{\Omega_h}(\varphi')}.$$

Оценим сверху коэффициент при $I_{\Omega_h}^{(1)}(P)$:

$$\frac{2 |\lambda_1\lambda_2|}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2} \leqslant \frac{1}{2 |\lambda_1\lambda_2|} \leqslant \frac{1}{|\lambda_2|},$$

так как, по предположению, $\lambda_1 \geqslant 1$. Мы получаем:

$$2 |\lambda_1\lambda_2| I_{\Omega_h}(P) \leqslant \frac{1}{|\lambda_2|} I_{\Omega_h}^{(1)}(P) + \sqrt{I_{\Omega_h}(P) I_{\Omega_h}(\varphi')}.$$

Используя неравенство (19), находим отсюда:

$$(2\lambda_1 - 33) |\lambda_2| I_{\Omega_h}(P) \leqslant c_5 \sqrt{I_{\Omega_h}(P) I_{\Omega_h}(\varphi')}.$$

Выбирая λ_1 столь большим, чтобы $2\lambda_1 - 33 > 1$, получаем:

$$I_{\Omega_h}(P) \leqslant \frac{c_5^2}{|\lambda_2|^2} I_{\Omega_h}(\varphi') \leqslant \frac{c_6}{|\lambda|^2} I_{\Omega_h}(\varphi').$$

Подставляя эту оценку в (19), найдем:

$$I^{(1)}_{\Omega_h}(P) \leqslant c_7 I_{\Omega_h}(\varphi').$$

Таким образом, неравенства (13) и (14) доказаны для $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$ при условии, что $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_0' > 1$. Но

$$I_{\Omega_h}(\varphi') = h^3 \sum_{\Omega_h} \frac{|\varphi|^2}{|\lambda^2+1|^2} \leqslant \frac{c'}{|\lambda|^4} I_{\Omega_h}(\varphi). \tag{20}$$

Подставляя (20) в неравенства (13) и (14), получим нужные нам неравенства (15) и (16).

Так как неравенства (15) и (16) справедливы для любых малых h, то предельная функция P будет удовлетворять следующим интегральным неравенствам:

$$I_\Omega(P) \equiv \int_\Omega |P|^2 d\Omega \leqslant \frac{c_3}{|\lambda|^6} I_\Omega(\varphi), \tag{21}$$

$$I^{(1)}_\Omega(P) \equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial P}{\partial x_i}\right|^2 d\Omega \leqslant \frac{c_4}{|\lambda|^4} I_\Omega(\varphi). \tag{22}$$

Заметим, что обобщенное решение краевой задачи для уравнения (10) в смысле (12) будет существовать для любой функции φ, квадратично суммируемой по Ω.

Для доказательства существования обратного преобразования Лапласа от функции P и ее производных воспользуемся известной теоремой Планшереля для преобразований Фурье и равенством Парсеваля:

$$\int_0^\infty e^{-2kx} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(k+it)|^2 dt, \tag{23}$$

где $\varphi(s)$ — преобразованная по Лапласу функция $f(x)$ ($f(x) = 0$ для $x<0$), а именно, докажем существование интеграла:

$$p(x,\ t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x,\ \lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda \tag{24}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и $\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda \geqslant \lambda_0 > 1$, а также справедливость неравенства:

$$\int_\Omega \int_0^\infty \left[p^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial x_i \partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\right)^2\right] e^{-2\lambda_1 t} dt\, d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant c \int_\Omega \int_0^\infty f^2 e^{-2\lambda_1 t} dt\, d\Omega. \tag{25}$$

Действительно, у нас доказано неравенство

$$\int_\Omega |P|^2 d\Omega \leqslant c \int_\Omega |\varphi(x,\ \lambda)|^2 d\Omega, \tag{26}$$

справедливое для всех λ, для которых $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_0 > 1$.

Далее,

$$\varphi(x,\ \lambda_1+i\lambda_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x,\ t)\,e^{-(\lambda_1+i\lambda_2)t}dt,$$

причем для f выполнено условие (9), т. е. $fe^{-\lambda_1 t}\in L_{2,\infty}$ по t.

На основании (23), $\varphi(x,\ \lambda_1+i\lambda_2)\in L_{2,\infty}$ по λ_2, а следовательно, по (26), и $P(x,\ \lambda_1+i\lambda_2)\in L_{2,\infty}$ по λ_2.

Действительно, мы имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega |P(x,\ \lambda_1+i\lambda_2)|^2\,d\Omega\,d\lambda_2\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega |\varphi(x,\ \lambda_1+i\lambda_2)|^2\,d\lambda_2\leqslant c\int_0^\infty\int_\Omega |f(x,\ t)|^2\,e^{-2\lambda_1 t}\,dt\,d\Omega,$$

т. е. $P(x,\ \lambda)\in L_2$ по Ω и, кроме того, $P(x,\ \lambda_1+i\lambda_2)\in L_{2,\infty}$ по λ_2.

Пользуясь теоремой Планшереля, находим, что равенство (24) выполняется в указанном смысле и что

$$\int_0^\infty\int_\Omega [p(x,\ t)]^2\,e^{-2\lambda_1 t}\,d\Omega\,dt\leqslant\int_0^\infty\int_\Omega [f(x,\ t)]^2\,e^{-2\lambda_1 t}\,dt\,d\Omega.$$

Аналогично оцениваются производные от p по координатам, так как для $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ справедливы оценки (18).

Оценим $\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$. При нулевых начальных данных

$$\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_1-i\infty}^{\lambda_1+i\infty}\lambda^3 P e^{-\lambda t}d\lambda.$$

На основании (15) имеем:

$$\int_\Omega |\lambda^3 P|^2\,d\Omega=|\lambda|^6\int_\Omega |P|^2\,d\Omega\leqslant c_3\int_\Omega |\varphi|^2\,d\Omega.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty\int_\Omega\left(\frac{\partial^3 p}{\partial t^3}\right)^2 e^{-2\lambda_1 t}\,d\Omega\,dt\leqslant c_3\int_0^\infty\int_\Omega [f(x,\ t)]^2\,e^{-2\lambda_1 t}\,dt\,d\Omega.$$

Оценки для других производных в (25) проводятся аналогично. Таким образом, неравенство (25) доказано.

Определение. Назовем обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (5) при нулевом граничном и начальных условиях (6) и (7) функцию $p(x,\ t)$, принадлежащую классу $D_1^0(Q)$, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\in L_2(Q)$ (Q — цилиндр в пространстве x, t высоты l с основанием Ω), принимающую начальные условия

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0}=0,\quad k=0,\ 1,$$

и удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_0^{l'}\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^3 p}{\partial x_i \partial t^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_3}\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}+\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\Phi+\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right]d\Omega\,dt=$$

$$=-\int_0^{l}\int_{\Omega} f\cdot\Phi\, d\Omega dt \tag{27}$$

для любой функции $\Phi(x,\ t)\in D_1^0(Q)$ и такой, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\in L_2(Q),\qquad \left.\frac{\partial^k\Phi}{\partial t^k}\right|_{t=l}=0,\quad k=0,\ 1.$$

Здесь [см. (2)] $D_1^0(Q)$ есть замыкание в норме $W_2^{(1)}(Q)$ совокупности всех непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю в δ-окрестности боковой поверхности цилиндра Q.

Формула (24) дает обобщенное решение уравнения (5) в смысле (27). Действительно, $P(x,\ \lambda)$ есть обобщенное решение уравнения (10) в смысле (12). Применяя преобразование Лапласа к интегральному тождеству (27), беря при этом в качестве функции $\Phi(x,\ t)$ функцию $\Phi(x,\ l-t)$, пользуясь теоремой о свертке и тем, что

$$\Phi\,|_{t=l}=0,\qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{t=l}=0,$$

мы получаем интегральное тождество (12):

$$\int_{\Omega}\left(\lambda^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_i}+\frac{\partial P}{\partial x_3}\frac{\partial\Phi^*}{\partial x_3}\right)d\Omega=-\int_{\Omega}\left[\lambda^2(\lambda^2+1)P\Phi^*+\varphi\Phi^*\right]d\Omega, \tag{12}$$

где Φ^* обращается в нуль на границе области.

Таким образом, если мы найдем функцию $P(x,\ \lambda)$, удовлетворяющую этому интегральному тождеству и неравенствам (17) и (18), то, умножая (12) на $\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}e^{\lambda t}$ и интегрируя по λ от $\lambda_1-i\infty$ до $\lambda_1+i\infty$ и по частям, легко проверить, что интеграл

$$p=\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_1-i\infty}^{\lambda_1+i\infty}P(x,\ \lambda)\,e^{\lambda t}\,d\lambda$$

будет удовлетворять интегральному тождеству (27). Кроме того, $p\,|_S=0$. Этим доказана

ТЕОРЕМА 1. *Если правая часть уравнения* (5) *такова, что*

$$\int_0^{\infty}\int_{\Omega} f^2 e^{-2\alpha_1 t}\,dt\,d\Omega<\infty$$

для какого-нибудь $\alpha_1\geqslant 0$, *то существует единственное обобщенное в смысле* (27) *решение* $p(x,\ t)$ *уравнения* (5) *смешанной задачи при нулевых начальных и краевых условиях* (6) *и* (7), *которое может быть представлено*

как трансформация Лапласа от обобщенного решения уравнения (10), *удовлетворяющего условию* $P \in D^0(\Omega)$ *при* λ *таком, что* $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > \alpha_2 \geqslant \alpha_1$. *При этом для* $p(x, t)$ *справедлива оценка* (25) *и интеграл*

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_2 + i\infty} P(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda$$

существует для почти всех x.

§ 2. Решение второй смешанной задачи для уравнения четвертого порядка

Построение решения второй смешанной задачи для системы (1) при условиях (2) и (4) начнем также с определения неизвестной функции p. Для определения p мы получим уравнение (5), решение которого должно удовлетворять начальным условиям (6) и условию на границе:

$$L_1 p\,|_S \equiv \left[\frac{\partial p}{\partial x_3}\cos nx_3 + \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial n} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial t}\cos nx_1\right]_S = G. \qquad (28$$

Условие (28) на функцию p на границе есть следствие условия

$$v_n\,|_S = 0.$$

В самом деле, умножим третье уравнение системы (1) на $\cos nx_3$, первое и второе уравнения продифференцируем по t и умножим соответственно на $-\cos nx_2$ и $\cos nx_1$ и сложим это с продифференцированными два раза по t первыми тремя уравнениями системы, умноженными соответственно на $\cos nx_i$, $i = 1, 2, 3$; тогда получим:

$$\left[\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} + \frac{\partial p}{\partial x_3}\cos nx_3 + \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial n} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_2}\cos nx_1\right]_S =$$
$$= \left[\frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2} + F_{x_3}\cos nx_3 - \frac{\partial F_{x_1}}{\partial t}\cos nx_2 + \frac{\partial F_{x_2}}{\partial t}\cos nx_1\right]_S.$$

Так как $v_n\,|_S = 0$, то отсюда будет следовать условие (28), если обозначить правую часть полученного равенства через G.

Для простоты изложения сведем условия (6′) и (28) к однородным при выполнении следующего условия согласования:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varphi_0 + t\varphi_1 + \frac{t^2}{2}\varphi_2 + \frac{t^3}{6}\varphi_3\right)\cos nx_3\,|_S = G. \qquad (29)$$

Таким образом, как и в первой задаче, мы будем доказывать существование обобщенного решения уравнения (5) при начальных условиях*

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{=0} = 0, \quad k = 0, 2, 1, 3, \qquad (6)$$

и условии на границе

$$L_1 p\,|_S = 0. \qquad (30)$$

Пусть свободный член уравнения (5) после приведения начальных

* См. сноску на стр. 272

и граничного условий к нулевым удовлетворяет условию (9). Применяя, как и раньше, преобразование Лапласа к уравнению (5), а также к граничному условию (30), мы придем к решению краевой задачи для уравнения

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} = \lambda^2 (\lambda^2 + 1) P + \varphi(x, \lambda) \tag{10}$$

с граничным условием

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x_3} \cos nx_3 + \lambda^2 \frac{\partial P}{\partial n} - \lambda \frac{\partial P}{\partial x_1} \cos nx_2 + \lambda \frac{\partial P}{\partial x_2} \cos nx_1\right]_S = 0, \tag{31}$$

где $\operatorname{Re} \lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_0 > 1$.

Определение. Обобщенным решением уравнения (10) при граничном условии (31) назовем функцию P, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega \left\{\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \lambda \frac{\partial P}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial P}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right\} d\Omega =$$

$$= -\int_\Omega [\lambda^2 (\lambda^2 + 1) P\Phi + \varphi\Phi]\, d\Omega \tag{32}$$

для произвольной комплексно-значной функции $\Phi \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Для нахождения решения, удовлетворяющего интегральному тождеству (32), применим опять метод конечных разностей. Построив в пространстве x_1, x_2, x_3 кубическую сетку, возьмем $\Omega_h \supset \Omega$, заменим интегралы в тождестве (32) суммами, причем суммирование распространим на все точки решетки, принадлежащие Ω_h, включая границу S_h, а производные заменим разностными отношениями (этот метод применяется О. А. Ладыженской в работе ([6]) при решении общей задачи дифракции).

Мы получим:

$$h^3 \sum_{\Omega_h + S_h} \left\{\lambda^2 \sum_{i=1}^{3} P_{x_i} \Phi_{x_i} + P_{x_3} \Phi_{x_3} - \lambda P_{x_1} \Phi_{x_2} + \lambda P_{x_2} \Phi_{x_1}\right\} +$$

$$+ h^3 \sum_{\Omega_h + S_h} \{\lambda^2 (\lambda^2 + 1) P_h \Phi_h + \varphi' \Phi_h\} = 0, \tag{33}$$

где

$$\varphi'(x, \lambda) = \frac{\varphi(x, \lambda)}{\lambda^2 + 1}.$$

В выражении (33) берутся только те разностные отношения, которые имеют смысл для данной области суммирования.

Для нахождения приближенного решения мы получим систему линейных алгебраических уравнений относительно функции P_h, определяемой в узлах сетки. Эта система получается следующим образом. Берем Φ_h в определенной точке решетки (эта точка может лежать и на границе S_h) и подсчитываем при ней коэффициент, который будет зависеть от P_h и φ'. Такие коэффициенты подсчитываем во всех точках решетки, вклю-

чая границу. Ввиду произвольности функции Φ_h (заметим, что на границе области на функцию Φ никаких условий не накладывается), для выполнения тождества (33) эти коэффициенты при Φ_h в каждой точке решетки должны равняться нулю. Таким образом получается система алгебраических уравнений для определения P_h, причем число уравнений совпадает с числом неизвестных — значений P_h в точках решетки $\Omega_h + S_h$. Для однозначной разрешимости такой системы достаточно доказать, что соответствующая ей однородная система имеет лишь нулевое решение. Для доказательства этого последнего предложения установим неравенства (15) и (16) для функции P_h, удовлетворяющей тождеству (33). Для этого в тождество (33) вместо Φ_h подставим функцию $\overline{P}_h$, комплексно-сопряженную с P_h. Отделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \left\{ a_1 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 + |P_{x_3}|^2 \right\} =$$

$$= h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \{2b_1 (P_{1x_2}P_{2x_1} - P_{1x_1}P_{2x_2}) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)|P_h|^2 - P_1\varphi_1' - P_2\varphi_2'\}, \quad (34)$$

$$h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} a_2 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 =$$

$$= h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \{2b_2 (P_{1x_2}P_{2x_1} - P_{1x_1}P_{2x_2}) - 2\lambda_1\lambda_2 |P|^2 + P_2\varphi_1' - P_1\varphi_2'\}, \quad (35)$$

где

$$b_1 = \frac{\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 1)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2}, \qquad b_2 = \frac{\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 1)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 1)^2 + 4\lambda_1^2\lambda_2^2},$$

а остальные обозначения — прежние.

Рассмотрим два случая: 1) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$ и 2) $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$.

1) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 > \lambda_2^2$. Тогда, учитывая, что $a_1 > 0$, подставляя его оценку снизу в (34) и оценивая по модулю правую часть (34), имеем:

$$\frac{1}{6} I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) + \lambda_1^2 I_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant$$

$$\leqslant 2|b_1| h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} (|P_{1x_2}P_{2x_1}| + |P_{1x_1}P_{2x_2}|) +$$

$$+ \frac{1}{2}\lambda_1^2 I_{\Omega_h+S_h}(P) + I_{\Omega_h+S_h}(\sqrt{|\varphi' P|}).$$

Но

$$h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} 2(|P_{1x_2}P_{2x_1}| + |P_{1x_1}P_{2x_2}|) \leqslant h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2.$$

Поэтому

$$\frac{1}{6} I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) + \frac{1}{2}\lambda_1^2 I_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant |b_1| I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) + \sqrt{I_{\Omega_h+S_h}(P)\, I_{\Omega_h+S_h}(\varphi')}.$$

Оценим сверху $|b_1|$:

$$|b_1| = \left| \frac{\lambda_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2-1)}{(\lambda_1^2-\lambda_2^2+1)^2+4\lambda_1^2\lambda_2^2} \right| \leqslant \frac{|\lambda_2|}{\lambda_1^2} \leqslant \frac{3}{2\sqrt{2}\,\lambda_1}.$$

Выбирая λ_1 так, чтобы $\frac{1}{6} - \frac{3}{2\sqrt{2}\,\lambda_1} > 0$, получим:

$$I_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|^2} I_{\Omega_h+S_h}(\varphi')$$

и

$$I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant c_2 I_{\Omega_h+S_h}(\varphi').$$

2) Пусть $\frac{1}{2}\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2$; в этом случае

$$a_1 \geqslant \frac{1}{33}, \quad |b_1| \leqslant \frac{3}{|\lambda_2|} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{\lambda_1}.$$

Выбирая λ_1 так, чтобы $\frac{1}{33} - \frac{3\sqrt{2}}{\lambda_1} > 0$, и подставляя в (34), получим:

$$I^{(1)}_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant c_3 |\lambda_2|^2 I_{\Omega_h+S_h}(P) + c_3 \sqrt{I_{\Omega_h+S_h}(P)\, I_{\Omega_h+S_h}(\varphi')}. \tag{36}$$

С другой стороны, из (35) имеем:

$$h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} 2\lambda_1\lambda_2 |P_h|^2 =$$

$$= -h^3 \sum_{\Omega_h+S_h} \left\{ a_2 \sum_{i=1}^{2} |P_{x_i}|^2 + 2b_2 (P_{1x_2}P_{2x_1} - P_{1x_1}P_{2x_2}) + P_2\varphi_1' - P_1\varphi_2' \right\}.$$

Найдем оценку сверху для $|b_2|$ (оценка сверху для $|a_2|$ была найдена нами ранее: $|a_2| \leqslant \frac{1}{|\lambda_2|}$):

$$|b_2| \leqslant \frac{\lambda_1(2\lambda_1^2+\lambda_2^2)}{\lambda_2^4} \leqslant \frac{5\lambda_1}{\lambda_2^2} \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{|\lambda_2|}.$$

Подставив эту оценку в последнее равенство и используя неравенство (36), получаем:

$$2|\lambda_1\lambda_2| I_{\Omega_h+S_h}(P) \leqslant c_4 |\lambda_2| I_{\Omega_h+S_h}(P) + c_5 \sqrt{I_{\Omega_h+S_h}(P)\, I_{\Omega_h+S_h}(\varphi')}.$$

Выбирая λ_1 столь большим, что $2\lambda_1 - c_4 > 1$, найдем, как и в § 2, что справедливы неравенства (13) и (14). Затем, подставляя вместо $|\varphi'|^2$ его значение $\frac{|\varphi|^2}{|\lambda^2+1|^2}$, получим неравенства (15) и (16) для области $\Omega_h + S_h$. Для предельной функции будут справедливы соответствующие интегральные неравенства:

$$I_\Omega(P) \leqslant \frac{c'}{|\lambda|^6} I_\Omega(\varphi), \tag{37}$$

$$I^{(1)}_\Omega(P) \leqslant \frac{c''}{|\lambda|^4} I_\Omega(\varphi). \tag{38}$$

Доказательство существования и единственности обобщенного решения в смысле (32) проводится при помощи неравенств (15) и (16) методом конечных разностей точно так же, как и доказательство существования и единственности соответствующего решения при условии $P|_S = 0$ с той лишь разницей, что теперь не нужно требовать принадлежности функции P к классу $D^0(\Omega)$, так как граничное условие теперь вошло в определение обобщенного решения (функция P принадлежит $W_2^{(1)}(\Omega)$).

Доказательство существования обратного преобразования Лапласа проводится с использованием теоремы Планшереля без всяких изменений на основании неравенств (37) и (38).

Определение. Назовем обобщенным решением смешанной задачи для уравнения (5) при нулевых начальных условиях (6) и при условии на границе (30) функцию $p(x, t)$, принадлежащую классу $W_2^{(1)}(Q)$, $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \in L_2(Q)$, которая принимает начальные условия

$$\left.\frac{\partial^k p}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 0,1,$$

и удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_0^l \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 p}{\partial x_i \partial t^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\} d\Omega\, dt = - \int_0^l \int_\Omega f \Phi\, d\Omega\, dt \tag{39}$$

для произвольной функции $\Phi \in W_2^{(1)}(Q)$ и такой, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \in L_2(Q), \quad \Phi(x, t)|_{t=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=l} = 0.$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 2, позволяют заключить, что интеграл

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda$$

есть обобщенное решение смешанной задачи при нулевых начальных и краевом условии (30) уравнения (5) в смысле (39), где $P(x, \lambda)$ есть обобщенное решение в смысле (32) уравнения (10) при граничном условии (31).

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Если правая часть уравнения* (5) *такова, что*

$$\int_0^\infty \int_\Omega f^2 e^{-2\alpha_1 t}\, d\Omega\, dt < \infty \tag{9}$$

для какого-нибудь $\alpha_1 \geqslant 0$, *то существует единственное обобщенное в смысле* (39) *решение уравнения* (5) *при условиях* (6) *и* (30), *которое*

может быть представлено как преобразование Лапласа от обобщенного решения уравнения (10) *при условии* (31), *именно*

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1 - i\infty}^{\lambda_1 + i\infty} P(x, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{40}$$

где $\operatorname{Re}\lambda = \lambda_1 > \alpha_2 \geqslant \alpha_1$, *причем интеграл* (40) *существует для почти всех* x *и для* $p(x, t)$ *справедлива оценка* (25).

§ 3. Решение первой и второй смешанных задач для системы

Возвратимся к системе (1). Построим решение этой системы при условиях (2) и (3).

Предполагая правые части системы (1) и начальные данные достаточно гладкими, исключим из системы (1) неизвестные v_{x_i}, $i = 1, 2, 3$, в результате чего мы получим уравнение четвертого порядка (5) относительно p, где

$$f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^3 F_{x_i}}{\partial x_i \partial t^2} - \frac{\partial^2 F_{x_1}}{\partial x_2 \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial F_{x_3}}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}.$$

С помощью системы (1) вычислим производные $\frac{\partial^k p}{\partial t^k}$ при $t = 0$, $k = 1, 2, 3$.

Найдем функцию p из уравнения (5) со свободным членом f, удовлетворяющим условию (9) (см. § 1). Подставив найденную функцию p в систему (1) и относя $\frac{\partial p}{\partial x_i}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $i = 1, 2, 3$, в правые части, определим вектор $\vec{v}(x, t)$.

Так как у нас осталось четыре уравнения для определения трех функций, то для определенности системы введем дополнительную функцию p' такую, что $p'|_S = 0$.

Полученная новая система будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \vec{k}] + \operatorname{grad} p' = \vec{F} - \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} \vec{v} = \left(\psi - \frac{\partial p}{\partial t}\right). \end{gathered} \tag{41}$$

Решение этой системы при условиях

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}^0(x), \quad p'|_S = 0$$

существует, единственно и выражается явно в виде степенного ряда [см. (1)].

Если мы покажем, что в этом решении $p' \equiv 0$, то тем самым будет доказано существование решения исходной системы при условиях (2) и (3); действительно, в этом случае найденные функции v_{x_i}, p будут удовлетворять системе (1) при условиях (2) и (3).

Для доказательства того, что $p' \equiv 0$, исключим из системы (41) функции v_{x_i}, $i = 1, 2, 3$; тогда мы получим уравнение относительно p':

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p' + \frac{\partial^2 p'}{\partial x_3^2} = 0 \tag{42}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad} p'|_{t=0} = 0, \\ &\operatorname{grad} \frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \\ &p'|_S = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

В самом деле, найдем вектор $\vec{v}^*$ такой, что

$$\operatorname{div} \vec{v}^* = \psi - \frac{\partial p}{\partial t}$$

и в системе (41) сделаем замену неизвестной функции $\vec{v}$ по формуле $\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}^1$. Неизвестная функция $\vec{v}^1$ будет удовлетворять при этом системе:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{v}^1}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + [(\vec{v}^1 + \vec{v}^*) \times \vec{k}] - \operatorname{grad} p' + (\vec{F} - \operatorname{grad} p), \\ &\operatorname{div} \vec{v}^1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{41*}$$

Обозначим через P_1^* операцию проектирования в пространство потенциальных срезанных векторов G_0 [см. (1)]. Вектор $\operatorname{grad} p'$ есть некоторый элемент из G_0. Из формул (41*) следует, что он определяется следующим образом:

$$\operatorname{grad} p' = P_1^* \left\{ -\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + [(\vec{v}^1 + \vec{v}^*) \times \vec{k}] + \vec{F} - \operatorname{grad} p \right\}.$$

При $t = 0$ имеем:

$$\operatorname{grad} p'|_{t=0} = P_1^* \left\{ -\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + [(\vec{v}^1 + \vec{v}^*) \times \vec{k}] + \vec{F} - \operatorname{grad} p \right\}.$$

Но из системы (1) следует, что

$$-\operatorname{grad} p^0 = \frac{\partial \vec{v}^0}{\partial t} - [\vec{v}^0 \times \vec{k}] - \vec{F}^0.$$

Поэтому

$$\operatorname{grad} p'|_{t=0} = P_1^* \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\Big|_{t=0} \right\} = 0,$$

так как $\vec{v}^1$ — соленоидальный вектор, принадлежащий пространству I_1 и известно [см. (1)], что $I_1 \perp G_0$.

Далее,

$$\operatorname{grad} \frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_{t=0} = P_1^* \left\{ -\frac{\partial^2 \vec{v}^*}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial (\vec{v}^* + \vec{v}^1)}{\partial t} \times \vec{k} \right] + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} - \operatorname{grad} \frac{\partial p}{\partial t} \right\}_{t=0}.$$

Но

$$-\operatorname{grad}\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}\Big|_{t=0}-\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\times\vec{k}\right]_{t=0}-\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\Big|_{t=0},$$

поэтому

$$\operatorname{grad}\frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_{t=0}=P_1^*\left\{\frac{\partial^2\vec{v}^1}{\partial t^2}\right\}_{t=0}=0.$$

Кроме того, функция p' после исключения v_{x_i} из системы (41) будет удовлетворять уравнению (42) и условию $p'|_S=0$, так как p есть решение уравнения (5) при начальных условиях, определяемых из системы (1), и граничном условии $p|_S=0$. Но функция, удовлетворяющая (42) и (43), есть тождественный нуль. Действительно, так как эта функция должна удовлетворять уравнению (42), то мы имеем:

$$0=\int_0^l\int_\Omega q\left(\frac{\partial^2\Delta p'}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 p'}{\partial x_3^2}\right)d\Omega dt=$$

$$=-\int_0^l\int_S\left\{\sum_{i=1}^3\frac{\partial^3 p'}{\partial x_i\partial t^2}\cos nx_i+\frac{\partial p'}{\partial x_3}\cos nx_3\right\}qdS\,dt-$$

$$-\int_0^l\int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^3\frac{\partial^3 p'}{\partial x_i\partial t^2}\frac{\partial q}{\partial x_i}+\frac{\partial p'}{\partial x_3}\frac{\partial q}{\partial x_3}\right\}d\Omega\,dt. \tag{44}$$

Пусть

$$q=\int_l^t p'dt_1;$$

тогда поверхностный интеграл равен нулю, так как $q|_S=0$. Преобразуем отдельные члены в (44):

$$-\int_0^l\int_\Omega\frac{\partial p'}{\partial x_3}\frac{\partial q}{\partial x_3}\,d\Omega\,dt=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{\partial q}{\partial x_3}\right)^2_{t=0}d\Omega.$$

Далее,

$$-\int_0^l\int_\Omega\sum_{i=1}^3\frac{\partial^3 p'}{\partial t^2\partial x_i}\frac{\partial q}{\partial x_i}d\Omega\,dt=$$

$$=-\int_0^l\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\partial t}\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^3\frac{\partial^2 p'}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right]d\Omega dt.$$

Первый интеграл правой части обращается в нуль в силу того, что

$$\operatorname{grad}\frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad q|_{t=l}=0.$$

Второй интеграл можно записать так:

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_\Omega\sum_{i=1}^3\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)^2d\Omega dt=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^3\left(\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)^2_{t=l}d\Omega.$$

После этих преобразований видно, что $\left.\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right|_{t=l} = 0$. Так как l может быть любым ($0 \leqslant t < \infty$), то p' может зависеть только от t. Но $p'|_S = 0$ при любом t, значит $p \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Решение второй смешанной задачи для системы (1) при условиях (2) и (4) проводится аналогично.

Исключая из системы (1) неизвестные v_{x_i}, $i = 1, 2, 3$, мы получим относительно p уравнение (5) с соответствующими начальными условиями и условием на границе (28).

Построим функцию p так, как это сделано в § 2, и далее поступим так же, как и в случае первой смешанной задачи. Введя дополнительную функцию p' такую, что

$$L_1 p'|_S = 0,$$

мы решим систему (41) при условиях (2) и (4).

В этом случае функция p' будет удовлетворять уравнению (42) при условиях

$$\operatorname{grad} p'|_{t=0} = 0, \quad \operatorname{grad} \frac{\partial p'}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad L_1 p'|_S = 0. \tag{45}$$

Начальные условия в (45) получаются таким же путем, как и в предыдущей задаче; нужно только проектировать $\operatorname{grad} p'$ на пространство потенциальных векторов G_1 и пользоваться ортогональностью G_1 и I_0, где I_0 — замыкание в норме L_2 пространства соленоидальных срезанных векторов [см. (1)].

Но функция, удовлетворяющая (42) и (45), представляет собой произвольную функцию, зависящую только от t. В самом деле, так как функция p' должна удовлетворять уравнению (42), то мы имеем опять равенство (44).

Пусть

$$q = \int_l^t p' dt_1;$$

тогда поверхностный интеграл в правой части полученного равенства, в силу граничного условия $L_1 p'|_S = 0$, будет равен нулю. Действительно,

$$-\int_0^l \int_S \left(\frac{\partial^3 p'}{\partial t^2 \partial n} + \frac{\partial p'}{\partial x_3} \cos n x_3\right) q\, dS\, dt =$$

$$= \int_0^l \int_S \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t} \cos n x_1 - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t} \cos n x_2\right) q\, dS\, dt =$$

$$= \int_0^l \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial x_1 \partial t} \frac{\partial q}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_2 \partial t} \frac{\partial q}{\partial x_1}\right) d\Omega\, dt =$$

$$= \int_0^l \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_1} \frac{\partial q}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_2} \frac{\partial q}{\partial x_1}\right)\right] d\Omega\, dt = 0,$$

так как

$$\operatorname{grad} p'|_{t=0} = 0, \quad q|_{t=l} = 0.$$

Преобразуя второй интеграл правой части равенства (44) так же, как в предыдущей задаче, найдем, что

$$\left.\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right|_{t=l} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как l может быть любым, то, вообще говоря, функция p' может зависеть от t, т. е. $p' \equiv c(t)$. Но решение системы (41) при условиях

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v^0}(x), \quad v_n|_S = 0$$

существует для любой функции $p' = c(t)$. Полагая, в частности, $c(t) = 0$, заключаем, что в действительности доказано существование решения исходной системы (1) при условиях (2) и (4).

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Если начальные данные и правые части уравнений системы* (1) *имеют непрерывные производные до пятого порядка, то существует единственное решение смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *для системы* (1), *у которого производные* $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ *и* $\operatorname{div} \vec{v}$ *принадлежат пространству* $L_2(\Omega \times [0, \infty])$; *при этом правая часть получающегося уравнения четвертого порядка* (5) *для определения функции* p *должна удовлетворять условию:*

$$\int_0^\infty \int_\Omega f^2 e^{-2\lambda_1 t}\, d\Omega\, dt < \infty \tag{9}$$

для некоторого $\lambda_1 \geqslant 0$.

Метод доказательства теоремы дает одновременно и способ непосредственного нахождения этого решения.

Сейчас мы освободимся от ограничений гладкости, наложенных в теореме 3 на правую часть и начальные данные, и определим обобщенное решение в интегральном смысле.

В дальнейшем мы всегда будем иметь дело с областью, ограниченной по t, поэтому условие (9) не станем специально оговаривать. Область, где рассматривается решение, будем обозначать через Q, где $Q = \Omega \times [0, l]$.

Запишем систему (1) в виде одного векторного уравнения

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A\vec{w} = \vec{f}, \tag{46}$$

где вектор $\vec{w} = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, p)$, $\vec{f} = (F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, \psi)$.

Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Согласно теореме 3, полученное решение смешанных задач будет удовлетворять интегральному тождеству:

$$\int_Q \left[\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \vec{\Phi}\right) + (A\vec{w}, \vec{\Phi})\right] dQ = \int_Q (\vec{f}, \vec{\Phi})\, dQ \tag{48}$$

для некоторой произвольной вектор-функции $\vec{\Phi} = (\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2}, \Phi_{x_3}, q)$ и достаточно гладких начальных данных и $\vec{f}$, где символ (,) обозначает обычное скалярное произведение.

Пусть теперь $\vec{\Phi}$ принадлежит пространству $W_2^{(1)}(Q)$, $\vec{\Phi}|_{t=l} = 0$ и ее компонента q удовлетворяет граничному условию $q|_S = 0$, если рассматривается смешанная задача для уравнения (46) при условии $p|_S = 0$, и $\Phi_n|_S = 0$, если на границе $v_n|_S = 0$, где

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{3} \Phi_{x_i} \cos nx_i.$$

При этих условиях на $\vec{\Phi}$ интегральное тождество (48) вместе с начальными и граничными условиями, которым удовлетворяет решение, равносильно следующему:

$$\int_Q \left[\left(\vec{w}, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}\right) - (\vec{w}, A^*\Phi)\right] dQ = -\int_Q (\vec{f}, \vec{\Phi})\, dQ - \int_\Omega (\vec{w}_0, \vec{\Phi}_0)\, d\Omega, \tag{49}$$

где

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Назовем обобщенным решением рассматриваемых смешанных задач при условиях (2), (3) и (2), (4) функцию $\vec{w}$, удовлетворяющую этому интегральному тождеству.

Положим в этом интегральном тождестве $\vec{\Phi} = (l - t)\vec{w}$; тогда обычным приемом получается оценка:

$$\int_Q \vec{w}^2\, dQ \leqslant c_1 \int_Q \vec{f}^2\, dQ + c_2 \int_\Omega \vec{w}_0\, d\Omega. \tag{50}$$

Пусть правые части уравнения (46) и начальные данные (2) суммируемы с квадратом по области Q. Приближая их в метрике L_2 гладкими функциями, мы получим решение смешанных задач, которое удовлетворяет тождеству (49). При этом $\vec{w}_m - \vec{w}_n$ будет обобщенным решением в

смысле (49) при начальном условии $\vec{w}_{0m} - \vec{w}_{0n}$ и правой части $f_m - f_n$. Для этого решения справедлива оценка (50). Из нее следует, что последовательность $\vec{w}_m$ сходится в $L_2(Q)$. Предельная функция также принадлежит $L_2(Q)$ и, очевидно, удовлетворяет тождеству (49).

Единственность такого обобщенного решения и непрерывная зависимость его от начальных данных и правых частей уравнений системы, благодаря (50), очевидна.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. *Пусть правые части системы* (46) *принадлежат* $L_2(Q)$, *а* $\vec{w}_0 \in L_2(\Omega)$. *Тогда существует единственное обобщенное в смысле* (49) *решение, принадлежащее* $L_2(Q)$, *смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *для системы* (46).

§ 4. Дифференциальные свойства обобщенных решений

1. Оценка производных по t. Пусть начальные данные имеют обобщенные производные по x_i до порядка k, правые части системы имеют обобщенные производные по t до порядка k и смешанные производные по x_i и t — до порядка $k-1$; тогда обобщенные производные по t до порядка k от обобщенного решения указанных смешанных задач будут удовлетворять следующему неравенству:

$$\int_Q \left(\frac{\partial^k \vec{w}}{\partial t^k}\right)^2 dQ \leqslant c_3 \int_\Omega \left(\frac{\partial^k \vec{w}}{\partial t^k}\right)^2_{t=0} d\Omega + c_4 \int_Q \left(\frac{\partial^k \vec{f}}{\partial t^k}\right)^2 dQ. \tag{51}$$

Из системы (1) сразу следует, что первые производные по координатам от функции p оцениваются через первые производные по t от $\vec{v}$, т. е. через первые производные от начальных данных и правых частей, причем эта оценка имеет место во всей области Q вплоть до границы:

$$\int_Q (\operatorname{grad} p)^2 dQ \leqslant c_5 \left\{ \int_Q \left[\vec{f}^2 + \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)^2\right] dQ + \int_\Omega [\vec{w}_0^2 + (\operatorname{grad} p_0)^2 + (\operatorname{div} \vec{v}_0)^2]\, d\Omega \right\}. \tag{52}$$

2. Производные по x_i внутри области. При оценке производных по x_i и смешанных производных по x_i и t до порядка k внутри области, принимая во внимание оценку (51), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $\Omega'' \subset \Omega' \subset \Omega$, *причем границы этих областей не имеют общих точек, но могут быть сколь угодно близки друг к другу. Если начальные данные и правые части уравнений системы* (46) *принадлежат пространству* $W_2^k(\Omega' \times [0, l])$, *то решение смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *принадлежит пространству* $W_2^{(k)}(\Omega'' \times [0, l])$. *При этом*

имеет место следующая оценка:

$$\| \vec{w} \|_{W_2^{(k)}(\Omega'' \times [0,l])} \leqslant c_6 [\| \vec{f} \|_{W_2^{(k)}(\Omega' \times [0,l])} + \| \vec{w}_0 \|_{W_2^{(k)}(\Omega')}]. \tag{53}$$

Доказательство этой теоремы можно провести с помощью метода средних функций [см. (7)], но проводить его мы не будем, так как оно получается упрощением доказательства соответствующей теоремы с оценками вплоть до границы, к которой мы сейчас перейдем.

Замечание. Если рассматривать систему (1) для несжимаемой жидкости, т. е. для случая, когда $\frac{\partial p}{\partial t}$ не входит в последнее уравнение системы (1), то, используя метод проекций [см. (1)], можно получить оценки для производных от $\vec{v}$ и p до порядка k через производные от начальных данных и правых частей до порядка $k-1$. Таким образом, решение системы (1) для случая несжимаемой жидкости более гладко, чем для сжимаемой, что совпадает с физическими данными, а математически следует из того, что первая система в известном смысле близка к параболической, а вторая — к гиперболической.

3. Оценки для производных по x_i вплоть до границы. Пусть граница S области Ω непрерывно дифференцируема до порядка $k+2$. Разобьем область Ω на конечное число перекрывающихся между собой подобластей таким образом, что для части границы $\Gamma_1 \subset S$ каждой подобласти существует $k+2$ раза непрерывно дифференцируемое преобразование координат

$$y_i' = y_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

которое отображает, например, подобласть Ω_1 на подобласть D так, что часть границы Ω_1, которая принадлежит S, будет лежать в плоскости $y_3 = \text{const}$.

Рассмотрим подобласть D и немного бóльшую $D' \supset D$ такую, что D не содержит части границы D', которая не принадлежит S. Часть границы подобласти D', которая не принадлежит S, обозначим через Γ_2, а оставшуюся — через Γ_1.

Введем бесконечно дифференцируемую функцию обрезания $\zeta(y)$, равную единице всюду в D, равную нулю вблизи Γ_2 и не большую единицы в других точках.

За функциями, входящими в систему уравнений (1), после преобразования координат оставим прежние обозначения.

После преобразования координат сделаем замену $\vec{v}\zeta = \vec{u}$, $p\zeta = q$ в подобласти D'.

Система уравнений (1) в новых координатах и с функцией ζ запишется в виде:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - [\vec{u} \times l_3] + \operatorname{grad} q = \zeta \vec{F} + p \operatorname{grad} \zeta,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} = \zeta \psi + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}, \tag{54}$$

где H_i — параметры Ламе, вектор $\vec{u}$ имеет проекциями на оси криволинейных координат функции u_1, u_2, u_3; $\operatorname{qrad} q$ и $\operatorname{div} \vec{u}$ в криволинейных координатах, как известно, имеют вид:

$$\operatorname{grad} q = \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i}{H_i} \frac{\partial q}{\partial y_i},$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ u_1 \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial (H_1 H_3)}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial y_3} \right\}.$$

Предположим сначала, что правые части и начальные данные имеют непрерывные производные* до порядка k. При этих предположениях дадим оценки в норме L_2 производных порядка k от решения через производные от правых частей и начальных данных до порядка k.

Так как часть границы D', которая принадлежит S, лежит в плоскости $y_3 = \text{const}$, то это позволяет оценить все производные в касательном направлении, т. е. производные по y_1 и y_2 вплоть до границы Γ_1. Производные же по y_3 оцениваются из уравнений системы (54).

Найдем оценку для производной $\frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1}$.

Продифференцируем первое векторное уравнение системы (54) по y_1, умножим его скалярно на $\frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1}(l-t) H_1 H_2 H_3$ и проинтегрируем по области $D' \times [0, l]$. Тогда член с производной по t преобразуется так:

$$\int_0^l \int_{D'} (l-t) H_1 H_2 H_3 \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t \partial y_1}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1} \right) dy dt = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{D'} H_1 H_2 H_3 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1} \right)^2 dy\, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{D'} H_1 H_2 H_3 \left(\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial y_1} \right)^2 dy. \tag{55}$$

Учитывая то, что в криволинейных координатах компоненты единичных ортов зависят от y_i, преобразуем члены с производными второго порядка в скалярном произведении

$$\int_0^l \int_{D'} \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \operatorname{grad} p \frac{\partial \vec{u}}{\partial y_1} \right) H_1 H_2 H_3 dy\, dt \tag{56}$$

и воспользуемся вторым уравнением системы (54), продифференцированным по y_1. Имеем:

$$\int_0^l \int_{D'} \left(H_2 H_3 \frac{\partial^2 q}{\partial y_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + H_1 H_3 \frac{\partial^2 q}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + H_1 H_2 \frac{\partial^2 q}{\partial y_1 \partial y_3} \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) dy\, dt =$$

$$= \int_0^l \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left(H_2 H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \cos n y_1 + H_1 H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \cos n y_2 + \right.$$

* В дальнейшем, как это обычно делается [см. (2), (3)], можно освободиться от требования непрерывности производных от начальных данных и правых частей, заменив непрерывные производные обобщенными.

$$+ H_1H_2 \frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial u_3}{\partial y_1} \cos ny_3\Big) d\Gamma dt - \int_0^l \int_{D'} H_1H_2H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \Big\{ \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial y_1} (H_2H_3) +$$

$$+ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial y_2} (H_1H_3) + \frac{\partial u_3}{\partial y_1} \frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial}{\partial y_3} (H_1H_2) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{H_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_1 \partial y_3} \Big\} dydt = \int_0^l \int_{D'} H_1H_2H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \cdot \Big\{ \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial y_1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1} \Big(\frac{1}{H_i} \Big) \frac{\partial u_i}{\partial y_i} + u_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \Big[\frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (H_2H_3)}{\partial y_1} \Big] +$$

$$+ u_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \Big[\frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (H_1H_3)}{\partial y_2} \Big] + u_3 \frac{\partial}{\partial y_1} \Big[\frac{1}{H_1H_2H_3} \frac{\partial (H_1H_2)}{\partial y_3} \Big] -$$

$$- \frac{\partial (\psi\zeta)}{\partial y_1} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1} \Big[v_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \zeta}{\partial y_i} \Big] \Big\} dydt.$$

Интеграл по поверхности $\Gamma_1 + \Gamma_2$ равен нулю. Действительно, на границе Γ_2 q, $\vec{u}$ и все их производные равны нулю благодаря ζ. Граничное условие $v_n|_S = 0$ после преобразования координат на части границы Γ_1 переходит в условие $u_3|_{\Gamma_1} = 0$, так как граница Γ_1 плоская. Поэтому, в зависимости от того, какая смешанная задача рассматривается, мы пользуемся тем, что

$$\frac{\partial q}{\partial y_1}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_3}{\partial y_1}\Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

где производная берется в касательном к Γ_1 направлении.

Член

$$H_1H_2H_3 \frac{\partial q}{\partial y_1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1} \Big(\frac{1}{H_i} \Big) \frac{\partial u_i}{\partial y_i}$$

в (56) с помощью интегрирования по частям преобразуется так, чтобы производные $\frac{\partial}{\partial y_2}$ и $\frac{\partial}{\partial y_3}$ брались от q, а от u_i бралась производная только по y_1.

Теперь оставим в левой части равенства, полученного дифференцированием первого уравнения системы (54) и интегрированием его по области $D' \times [0, l]$, члены, которые после сделанных преобразований содержат квадраты производных по y_1 от $\vec{u}$ и q, перенеся в правую часть все остальные члены, в том числе и квадраты производных от начальных данных. Члены, стоящие справа и имеющие вид $\frac{\partial q}{\partial y_k} \frac{\partial u_i}{\partial y_1}$ и $u_k \frac{\partial u_i}{\partial y_1}$, оценим с помощью неравенства

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \qquad (*)$$

где роль a будет играть $\frac{\partial u_i}{\partial y_1}$, а роль b — производная $\frac{\partial q}{\partial y_k}$ или u_k. Члены же типа $\frac{\partial q}{\partial y_k} u_i$ оценим при помощи неравенства

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

и воспользуемся уже выведенными оценками для интегралов от квадрата решений и квадрата производных $\frac{\partial q}{\partial y_k}$, а также гладкостью преобразования, в данном случае до третьего порядка, и гладкостью функции ζ. При этом справа у нас есть член

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_1}\left[v_i \frac{1}{H_i} \frac{\partial \zeta}{\partial y_i}\right],$$

в который входит производная по y_1 от v_i, в то время как слева имеется квадрат производной от $u_i = \zeta v_i$. Но члены такого типа можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial q}{\partial y_1} \frac{\partial v_i}{\partial y_1} = \frac{\partial p}{\partial y_1} \frac{\partial u_i}{\partial y_1} - \frac{\partial p}{\partial y_1} v_i \frac{\partial \zeta}{\partial y_1} + p \frac{\partial v_i}{\partial y_1} \frac{\partial \zeta}{\partial y_1}.$$

В члене же $p \frac{\partial v_i}{\partial y_1} \frac{\partial \zeta}{\partial y_1}$ с помощью интегрирования по частям можно производную по y_1 перебросить с v_i на p.

Далее, выберем ε в неравенстве $(*)$ столь малым, чтобы при перенесении членов с квадратами производных налево не изменился знак левой части.

В результате мы получаем искомую оценку интеграла от квадрата производной в касательном направлении от $\vec{v}$ через интеграл от квадрата первых производных от правых частей и начальных данных.

Дадим оценку производных от $\vec{v}$ по y_3. При этом граничные условия больше не будут использоваться, поэтому мы будем исходить из системы (54) без функции ζ, т. е. из системы:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \vec{l}_3] + \operatorname{grad} p = \vec{F}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{v_1 \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial y_1} + v_2 \frac{\partial (H_1 H_3)}{\partial y_2} + v_3 \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial y_3}\right\} = \psi. \tag{58}$$

Непосредственно в систему (57) — (58) входит только производная $\frac{\partial v_3}{\partial y_3}$, интеграл от квадрата которой и оценивается очевидным образом из второго уравнения этой системы. Для оценки интеграла от квадрата $\frac{\partial v_1}{\partial y_3}$ и $\frac{\partial v_2}{\partial y_3}$ продифференцируем уравнение (57) по y_3, умножим его скалярно на $H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_3}(l - t)$ и проинтегрируем по области $D \times [0, l]$, а затем

сделаем некоторые преобразования с помощью интегрирования по частям по t. Имеем:

$$\frac{1}{2}\int_0^l\int_D H_1H_2H_3\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial y_3}\right)^2 dy\,dt +$$

$$+\int_0^l\int_D H_1H_2H_3\,(l-t)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\operatorname{grad} p,\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial y_3}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial y_3}[\vec{v}\times\vec{l}_3],\ \frac{\partial\vec{v}}{\partial y_3}\right)\right\}dy\,dt =$$

$$=\int_0^l\int_D H_1H_2H_3\left(\vec{F},\frac{\partial\vec{v}}{\partial y_3}\right)dydt+\frac{l}{2}\int_D H_1H_2H_3\left(\frac{\partial\vec{v}_0}{\partial y_3}\right)^2dy. \qquad (59)$$

Рассмотрим главные члены, т. е. члены со вторыми производными, во втором слагаемом левой части этого равенства:

$$\int_0^l\int_D (l-t)\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial y_3}\frac{\partial^2 p}{\partial y_1\partial y_3}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial v_2}{\partial y_3}\frac{\partial^2 p}{\partial y_2\partial y_3}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial v_3}{\partial y_3}\frac{\partial^2 p}{\partial y_3^2}\right]dy\,dt. \qquad (60)$$

Эти члены можно преобразовать не с помощью интегрирования по частям по y, как мы это делали в предыдущих оценках, а выразить их через те производные, оценки для которых уже получены.

Для ясности изложения проведем эти преобразования для системы, записанной в декартовых прямолинейных координатах, так как отличие от оценок в криволинейных координатах будет только для младших членов, которые получаются от дифференцирования единичных ортов и параметров Ламе по координатам и оценки для которых известны.

Итак, в члене

$$I=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_3}\,dx\,dt$$

заменим вторые производные от p членами из третьего уравнения системы (1):

$$\frac{\partial v_{x_3}}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x_3}=F_{x_3},$$

продифференцированного по x_1, x_2, x_3 соответственно; мы получим:

$$I=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\left[\frac{\partial F_{x_3}}{\partial x_i}-\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\right]dx\,dt.$$

Члены $\dfrac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\dfrac{\partial F_{x_3}}{\partial x_i}$ можно оценить при помощи неравенства (*), члены же с производными $\dfrac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}$ проинтегрируем по частям по t:

$$-\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\,dx\,dt=l\int_{\Omega'}\Big[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}\Big)\Big]_{t=0}dx-$$

$$-\int_0^l\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}\,dx\,dt+\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_{x_i}}{\partial t\partial x_3}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dx\,dt. \tag{61}$$

Члены

$$\int_0^l\int_{\Omega'}\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dx\,dt$$

оцениваются с помощью неравенства (*) и, кроме того, используется уже полученная оценка для $\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3}$. Из всех членов в (61) остается, таким образом, оценить последний член, который для этого преобразуется при помощи первого и второго уравнений системы (1), продифференцированных по x_3. Мы находим:

$$\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_{x_i}}{\partial x_3\partial t}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dt\,dx=$$

$$=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\Big\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial F_{x_i}}{\partial x_3}-\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_3}\Big)-\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_1}\frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_3}+\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_2}\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_3}\Big\}\,dx\,dt,$$

где члены со вторыми производными от p заменяются опять членами из третьего уравнения системы (1), продифференцированного по x_1 и x_2 соответственно:

$$-\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_3}\,dx\,dt=\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}-\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\frac{\partial F_{x_3}}{\partial x_i}\Big)\,dx\,dt.$$

Далее,

$$\int_0^l\int_{\Omega'}(l-t)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 v_{x_3}}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int_0^l\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\Big)^2\,dx\,dt-\frac{l}{2}\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\Big)^2_{t=0}\,dx.$$

Оценка же члена

$$\int_0^l\int_{\Omega'}\Big(\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}\Big)^2\,dx\,dt$$

нам известна.

Идея всех приведенных выкладок, таким образом, состояла в замене $\frac{\partial v_{x_i}}{\partial x_3}$ через $\frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_i}$, т. е. в перемене индексов у числителя и знаменателя.

В криволинейных координатах, как уже отмечалось выше, преобразование членов выражения (60) можно провести точно таким же путем, так как оценки младших членов только удлиняют выкладки, идея же остается прежней. У коэффициентов H_i при этом производные увеличиваться не будут, так как мы проводили интегрирование по частям только по t, а H_i от t не зависят.

Оценивая другие члены в (59) с помощью неравенства (*) и соотношения $2ab \leqslant a^2 + b^2$, мы получим из (59) оценку для $\frac{\partial v}{\partial y_3}$.

Учитывая все сказанное, имеем оценку:

$$\|\vec{w}\|_{W_2^{(1)}(Q)} \leqslant c_7 (\|\vec{f}\|_{W_2^{(1)}(Q)} + \|\vec{w}_0\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}) \tag{62}$$

в произвольном конечном цилиндре $Q = \Omega \times [0, l]$, где $\vec{w} = (v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}, p)$ и граница S области Ω непрерывно дифференцируема три раза.

Оценки производных порядка k по «касательным» координатам проводятся точно так же, только при этом нужно сначала оценить производную

$$\frac{\partial^k q}{\partial y_1^{\alpha_1} \cdot \partial y_2^{\alpha_2} \partial y_3^{\alpha_3}}.$$

Оценка этой производной получится через оценку производной

$$\frac{\partial^k \vec{u}}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \partial t},$$

которая, в свою очередь, оценивается через младшие производные от $\vec{u}$ по координатам и через $\frac{\partial^k \vec{u}}{\partial t^k}$.

Оценки смешанных производных по y_i, где $i = 1, 2$, и по t проводятся аналогично.

Оценка всевозможных производных, где есть дифференцирование по y_3, проводится точно по тому же плану, что и для первой производной по y_3.

Все указанные оценки без изменений в выкладках можно получить в терминах конечных разностей, для чего, например, вместо производной $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1}$ оценить разделенную разность $\frac{\vec{u}(x_1 + h) - \vec{u}(x_1)}{h}$; получающиеся при этом константы не будут зависеть от величины шага h.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 6. *Если свободные члены системы* (1) *и начальные данные принадлежат пространству* $W_2^{(k)}(Q)$, *а граница* S *области* Ω *непрерывно дифференцируема до порядка* $k + 2$, *то обобщенное решение в смысле интегрального тождества* (49) *смешанных задач* (2), (3) *и* (2), (4) *принадлежит пространству* $W_2^{(k)}(Q)$. *При* $k = 1$ *это решение является решением почти всюду. Если* $k = 4$, *то решение будет классическим* [см. (3)]. *Для решения справедливо неравенство*

$$\|\vec{w}\|_{W_2^{(k)}(Q)} \leqslant c_8 (\|\vec{f}\|_{W_2^{(k)}(Q)} + \|\vec{w}_0\|_{W_2^{(k)}(\Omega)}). \tag{63}$$

Автор выражает глубокую благодарность С. Л. Соболеву за постановку задачи и внимание, оказанное им при написании настоящей работы.

Поступило
24. X. 1955

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Об одной новой задаче математической физики, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 3—50.

[2] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.

[3] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.

[4] Масленникова В. Н., Решение в явном виде задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 135—160.

[5] Масленникова В. Н., О смешанных задачах для одной системы уравнений математической физики, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 5 (1955), 885—888.

[6] Ладыженская О. А., О решении общей задачи дифракции, Доклады Ак. наук СССР, 96, № 3 (1954), 433—436.

[7] Friedrichs K. O., On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, Communic. on pure and appl. mathem., 6, № 3 (1953), 299—325.