



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ю. Коссович, Ю. Н. Радаев, Профессор Дюис Данилович Ивлев (к 80-летию со дня рождения),

Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 2010, том 10, выпуск 4, 69–91

<https://www.mathnet.ru/isu193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

28 апреля 2025 г., 06:33:24



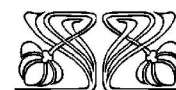
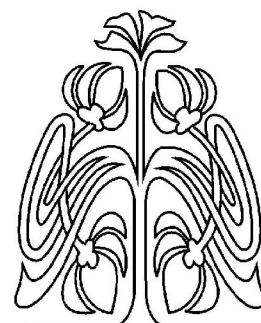
PERSONALIA

ПРОФЕССОР ДЮИС ДАНИЛОВИЧ ИВЛЕВ (к 80-летию со дня рождения)

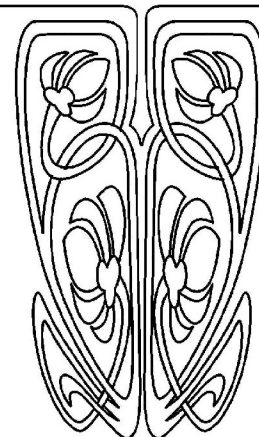
6 сентября 2010 года исполнилось 80 лет Дюису Даниловичу Ивлеву — доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. Д.Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе и семь монографий. Д.Д. Ивлев — основатель и руководитель научной школы механики идеально пластических тел и конструкций, базирующейся в университетских и академических центрах Воронежа, Самары, Владивостока, Чебоксар. Его вклад в математическую теорию пластичности и механику деформируемого твердого тела с полным правом можно назвать выдающимся. Огромная часть научной и педагогической деятельности Д.Д. Ивлева связана с подготовкой кадров в области механики деформируемого твердого тела. В настоящее время в рамках возглавляемой им научной школы работает свыше 20 докторов и более 100 кандидатов наук. Главное в творческой деятельности Д.Д. Ивлева — бескомпромиссное служение научной истине и неустанный поиск на самых передовых рубежах современной науки. 55 лет своей жизни Д.Д. Ивлев отдал служению науке. Д.Д. Ивлев может быть причислен к категории мыслителей, являющихся национальным достоянием России.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары Чувашской Республики. После окончания средней школы в 1948 г. он поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. После окончания аспирантуры при Институте механики МГУ в 1956 г. он успешно защищает диссертацию на тему «Приближенное решение упругопластических задач методом малого параметра» (оппонентами по этой работе выступили В.В. Соколовский и Г.С. Шапиро; председательствовал на защите А.Ю. Ишлинский). Дюис Данилович получает ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г. после защиты диссертационной работы «Пространственная задача теории идеальной пластичности», которая также представлялась в совет при МГУ, Д.Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л.А. Галин, Л.М. Качанов и Г.С. Шапиро.

В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев приезжает в г. Воронеж по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева. Ему 29 лет. Он известный ученый в области нового направления математической теории пластичности — теории течения. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавляет созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и методическую работу. Лекции и научные семинары проф. Д.Д. Ивлева поражали способностью глубоко проникать в суть об-



ПРИЛОЖЕНИЯ





суждаемых вопросов. Созданная им воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые исследования были связаны с фундаментальными и прикладными проблемами механики сплошных сред. Работы Д.Д.Ивлева и его учеников всегда вызывали интерес у ученых нашей страны и зарубежья, их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным. Под руководством проф. Д.Д.Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

В Воронежском государственном университете, на математико-механическом факультете Д.Д.Ивлев работал вместе с профессорами М.А.Красносельским, С.Г.Крейном, В.И.Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ проф. Д.Д.Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В.С.Постников. В эти же годы Д.Д.Ивлев по просьбе ректора Л.Н.Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д.Д.Ивлева с одним из своих аспирантов — Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды — научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д.Д.Ивлева той поры также был В.В.Дудукаленко. Г.И.Быковцев стал первым деканом нового факультета — прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования. Через несколько лет Геннадий Иванович возглавил кафедру механики деформируемого твердого тела в Куйбышевском (Самарском) государственном университете.

В 1966 г. Д.Д.Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н.Э.Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) — заведующим кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со своими учениками профессорами Г.И.Быковцевым и И.А.Бережным он активно участвует в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

В 1982 г. Д.Д.Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где работает заведующим кафедрой математического анализа, затем — заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д.Д.Ивлев переходит на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я.Яковлева, где в настоящее время заведует кафедрой математического анализа.

Работы Д.Д.Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности¹. Ряд результатов Д.Д.Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (Saint-Venant, 1870) [1, 2] на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска (H. Tresca). Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения k . Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе [3]. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по неко-

¹Среди них семь монографий: «Теория идеальной пластичности» (1966); «Теория упрочняющегося пластического тела» (в соавторстве с Г.И.Быковцевым, 1971); «Метод возмущений в теории упругопластического тела» (в соавторстве с Л.В.Ершовым, 1978); «Теория пластичности» (в соавторстве с Г.И.Быковцевым, 1998); «Математическая теория пластичности» (в соавторстве с А.Ю.Ишлинским, 2001); фундаментальная 2-томная монография «Механика пластических сред» (2001, 2002); «Предельное состояние деформируемых тел и горных пород» (в соавторстве с Л.А.Максимовой, Р.И.Непершиным, Ю.Н.Радаевым, С.И.Сенашевым, Е.И.Шемякиным, 2008).





торой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скальванию по этой плоскости.

Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье – Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния, и поэтому его теория нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (Levy, 1871) [4]. Статьи Сен-Венана и Леви появились одна за другой в *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона – Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций². Теория Леви, поскольку она основана на «неассоциированном» законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга³.

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации — статически определяемая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (Hencky, 1923) и Гейрингер (Geiringer, 1930). Математический аппарат, соответствующий соотношениям Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического материала.

Уравнения пространственной задачи математической теории пластичности длительное время оставались неизученными. В настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния⁴.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви – Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [6, с. 144–146]). Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптически (т. е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви – Мизеса, действительные характеристики отсутствуют⁵. Все это не оставляет шансов обобщить методы

²В настоящее время закон течения, устанавливающий пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций, называют законом Леви – Мизеса.

³Об этом ярко свидетельствуют работы: Михлин, С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности / С.Г. Михлин. – Л.: Изд-во АН СССР, 1934. – 71 с.; Христианович, С.А. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды: Неустойчившееся движение в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод / Под ред. Н.Е. Кочина / С.А. Христианович, С.Г. Михлин, Б.Б. Девисон. – М.: Л.: Изд-во АН СССР, 1938. – 407 с. (См. ч. II: Михлин, С.Г. Математическая теория пластичности. С. 157–218. На с. 163 приводятся пространственные уравнения Леви.)

⁴Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения. «Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены». Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи [5].

⁵Как представляется, задача поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему



интегрирования (см. [7–12]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения. Заметим, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличие от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений.

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Кулона – Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по-видимому, впервые указал Д.К. Чернов⁶. Фигуры скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся в известной монографии [13, с. 103]. Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. В начальный период развития теории пластичности при изучении пластического течения широко использовались представления о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия⁷. Мы уже говорили о соответствии между изменениями в структуре сильно деформированных металлов и при формации горных пород, отмечаемыми и описываемыми в петрографии. Поэтому теория линий скольжения в руках геологов может служить средством расшифровки процессов образования горных цепей и континентальных плато, восстановления истории движения земной коры (в том числе и ее континентальной части)⁸. Таким образом, теория скольжения находит свое подтверждение на двух существенно отличающихся масштабных уровнях.

К настоящему времени уже стало ясно, что предельные состояния твердых тел должны также описываться статически определимыми уравнениями гиперболического типа⁹. Теория предельного состояния первоначально развивалась в рамках механики сыпучих сред. Основположник теории К. Кулон сформулировал (1773 г.) основные положения теории предельного состояния и ввел пред-

сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона – Треска, для огромного большинства пространственных состояний уравнения теории пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Не спасает положения учет упругих деформаций и различных гипотез упрочнения. Все равно для абсолютного большинства пространственных состояний соответствующие уравнения эллиптически. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время «неассоциированных» законов пластического течения.

⁶ Дмитрий Константинович Чернов (1839–1921 гг.) — великий русский инженер и ученый, основатель металлографии, разработавший учение о кристаллах и кристаллографии, создатель научных основ обработки металлов давлением. Как ученый Д.К. Чернов оставался вне поля зрения официальной русской науки, даже когда его заслуги в области металлургии и металловедения были признаны всем миром. Жизнь, научное творчество и практическая инженерная деятельность Д.К. Чернова подробно освещены в кн.: Д.К. Чернов и наука о металлах / Под ред. акад. Н.Т. Гудцова. – М.; Л.: Металлургиздат, 1950. – 564 с. В это издание включены основные научные труды этого выдающегося ученого. Его научная биография опубликована также в кн.: *Гумилевский, Л.И.* Чернов / Науч. ред. проф. И.Я. Конфедератов / Л.И. Гумилевский. – М.: Мол. гвардия, 1975. – 208 с.

⁷ В настоящее время более эффективными являются прямой конечно-разностный численный анализ.

⁸ Применение математической теории пластичности и концепции скольжения к задачам геологии и геофизики читатель может найти в кн.: *Надаи, А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества / А. Надаи. – М., Л.: ОНТИ, 1936. – 280 с.; *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел: в 2 т. / А. Надаи. – М.: Изд-во Мир, 1969. – Т. 2. – 864 с.

⁹ См.: *Ивлев, Д.Д.* Мир эллиптический и мир гиперболический / Д.Д. Ивлев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2005. – № 5(39). – С. 33-41.



ставление о поверхности сползания, которые были применены для решения ряда важных прикладных задач. Систематическое изложение теории предельного состояния сыпучих сред на основе представления о сетке скольжения было дано В.В. Соколовским в 1942 г. [14]. Теории предельного состояния и идеальной пластичности, таким образом, имеют общие основы, однако они далеко не тождественны. Теория идеальной пластичности основана на представлении об условии пластичности, которое, вообще говоря, может приводить либо к статически определенным, либо к статически неопределенным состояниям. Теория предельного состояния в качестве своего предмета исследования берет лишь статически определенные состояния, которые могут быть достигнуты, скажем, при пропорциональном возрастании внешних нагрузок. Для предельного состояния все «предыдущие» свойства материала не играют никакой роли, поскольку предельное состояние определяется из замкнутой системы формально статически определенных соотношений, не имеющих ничего общего с допредельным поведением тела.

Экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона – Треска¹⁰. Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится, тем более что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Кулона – Треска. Тем не менее можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытными данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов до конца не удастся. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т. е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Кулона – Треска. Таким образом, критерий текучести Кулона – Треска, по-видимому, действительно, лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т. е. большего соответствия условия Кулона – Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы¹¹.

Итак, формально статически определяемая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности. Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А. Нааг, Th. von Karman) выдвинули условие «полной пластичности» [16], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска¹², и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определенными.

В 1923 г. Генки (Н. Hencky) [17] предложил использовать условие полной пластичности Хаара – Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определенной системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона – Треска исследовались Р. Шилдом (R.T. Shield) [18] для ребер и граней призмы Кулона – Треска. В той же работе Р. Шилдом были построены осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Кулона – Треска. В частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [19] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, пред-

¹⁰См., например, [7, с. 29–34; 15, с. 55, 57]. Обычно при этом указывают на экспериментальные данные А. Надаи (A. Nadai) и Лодэ (W. Lode, 1928 г.). Именно в результате выполненных ими экспериментов в Геттингене при участии Прандтля и был сделан вывод о предпочтительности условия пластичности Мизеса. В опытах Надаи и Лодэ окончательно установлено условие пластичности Мизеса, причем показано его преимущество перед условием наибольших касательных напряжений. (Цит. по [15, с. 57]) Имеется перевод оригинальной работы Лодэ: Лодэ В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов / В. Лодэ // Теория пластичности: сб. ст. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 168–205.

¹¹Дискуссия по этому поводу имеется на с. 86, 87 обзорной статьи А.А. Вакуленко и Л.М. Качанова [5].

¹²Сформулируем ту же самую мысль, но в более отчетливой форме: состояние полной пластичности описывается в рамках условия пластичности Кулона – Треска и соответствует ребру призмы Кулона – Треска. Ясно, что состояние полной пластичности может быть описано также в рамках условия пластичности Мизеса. Однако в этом случае ассоциированный с условием пластичности Мизеса закон течения приводит к неправильно определенной системе кинематических уравнений.



полагая выполнение условия полной пластичности Хаара – Кармана, доказав статическую определенность и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла, полагавшего, что «такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара – Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины» [20, с. 321]. Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви – Мизеса определить связанное с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании гипотезы Хаара – Кармана и замене закона течения Леви – Мизеса на *обобщенный* ассоциированный с условием пластичности Кулона – Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда аналогично условию полной пластичности Хаара – Кармана имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [21], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций¹³, следующие из *обобщенного* ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи *двух* условий пластичности, уравнения несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров [22]. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: «Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение $2k$. Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение». Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от «неассоциированного» определяющего закона Леви [4] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [1, 2] на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [23, 24], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара – Кармана для всей теории пластичности. Был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона – Треска) и *обобщенный* ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в *регулярных* точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter) в 1953 г.¹⁴ Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей

¹³ А.Ю. Ишлинский называл эти зависимости условиями соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

¹⁴ См.: Koiter, W.T. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic material with a singular yield surface / W.T. Koiter // Quart. Appl. Math. – 1953. – V. 11, № 3. – P. 350–354.



текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации появляются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т. е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона – Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определенными и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона – Треска, также гиперболически и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения¹⁵.

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определенных уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности «продиктованы, скорее, заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса» [5, с. 100]. Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут иметь несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара – Кармана как «искусственное и нереальное условие текучести» (см. [7, с. 320–321]). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удастся построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценностью, а полные — абсолютной. На практике, однако, чаще всего удается построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так или иначе, но большинство прикладных задач решены по жесткопластической схеме не полно.

В дальнейшем Д.Д. Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести. В результате было показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Любопытно отметить, что и статические, и кинематические уравнения осесимметричной задачи

¹⁵Этот результат был получен в работе [25]. Классическое изложение теории пространственной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, имеется в монографии [12, с. 205–246].



теории идеальной пластичности для граней призмы Кулона – Треска, соответствующих кинематически определимым режимам течения, также являются гиперболическими. Характеристические направления ориентированы так же, как и главные направления тензора напряжений, т.е. характеристики касаются главных направлений тензора напряжений¹⁶.

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности идеального и упрочняющегося тела с учетом упругих деформаций и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений¹⁷. Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т.е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптичны.

В 1966 г. выходит в свет монография Д.Д. Ивлева «Теория идеальной пластичности». В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что указанная работа стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами [9, 10, 15]. В настоящее время «Теория идеальной пластичности» Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности, опираясь на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения и предложенные ранее А.Ю. Ишлинским и В. Прагером (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая, по сути, представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов, с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса (J. Hadamard, T. Tomas).

Исследования Д.Д. Ивлева в области математической теории пластичности подытожены в фундаментальной двухтомной монографии «Механика пластических сред» [27, 28].

Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругопластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин [29]. Дискуссиям в механике посвящена статья [30]. В ней Д.Д. Ивлев с присущей ему корректностью, тактом и бережным отношением к научным фактам затрагивает важную тему о дискуссии по механике квазихрупкого разрушения и дает свою оценку имевшим место событиям, тем более что Д.Д. Ивлев участвовал в этой дискуссии (см. [31]). Наши оценки результатов имевшей место более сорока лет назад дискуссии совпадают. В частности, Д.Д. Ивлев в указанной статье пишет: «Прав Ю.Н. Радаев, когда написал: „Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке“».

В Самарском государственном университете в течение трех десятилетий проводятся исследования

¹⁶См. работу [26]. Полное исследование характеристик уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска для различных режимов пластического течения читатель может найти в работе [9, с. 258–268].

¹⁷См.: Ивлев, Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела / Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев. – М.: Наука, 1971. – 232 с. Научную биографию Г.И. Быковцева, отражающую его выдающийся вклад в развитие теории пространственной задачи математической теории пластичности см.: Яровой, Г.П. К 70-летию Г.И. Быковцева / Г.П. Яровой, Ю.Н. Радаев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2007. – № 9/1(59). – С. 9–30.



в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности в конце 50-х годов. Как уже указывалось, это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Тем не менее за последние два десятилетия удалось существенно продвинуться в создании общей теории трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и предложить общую схему интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступают ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [32] и [33]. Исследования в области пространственной задачи теории идеальной пластичности были подытожены в работах [34, 35].

В первой из указанных монографий мы стремились дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостатической координатной сетке, делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Исходной точкой построения общей теории пространственных уравнений выступает одна замечательная инвариантная векторная форма пространственных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. Затем рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, основные кинематические соотношения для приращений перемещений, следующие из него, а также исследуется кинематика течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т. е. когда Гауссова кривизна положительна, на поверхности максимальной скорости сдвига. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся преобразованием векторного уравнения равновесия к изостатической координатной сетке. Устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

Значительное внимание уделяется исследованию трехмерных уравнений математической теории пластичности в триортогональных изостатических координатах [36]. Основным интересом здесь представляют уравнения совместности приращений деформаций и пространственные соотношения Коши. Уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат исследуются вместе с дополнительными соотношениями, связывающими физические компоненты тензора несовместности. Существенных уравнений совместности 6. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, имеется лишь 3 независимых уравнения совместности. Явно указываются и рассматриваются системы независимых уравнений совместности, сформулированные в изостатической координатной сетке. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении 3-х независимых уравнений совместности удовлетворялись 3 оставшихся уравнения совместности. Показано, что нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются в глубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии наименее искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), то нарушения сплошности проникают в глубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям. Именно в этом смысле можно вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в твердых телах.



Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, сформулированных для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, был выполнен в статье [37] простым понижением на одну единицу их размерности.

В рамках построения математической теории пластичности с уравнениями гиперболического аналитического типа был выполнен групповой анализ уравнений пространственной, плоской и осесимметричной задачи. Методы группового анализа все шире проникают в механику деформируемого твердого тела, позволяя в некоторых случаях получать точные решения важнейших прикладных задач¹⁸. Получены результаты применения классических методов Ли к уравнениям теории пластичности. Определены группы симметрий уравнений в частных производных теории пластичности, алгебры симметрий (алгебры Ли) и оптимальные системы одномерных подалгебр для пространственной, плоской и осесимметричной задач. Оптимальные системы позволяют найти ряд новых решений трехмерных уравнений теории пластичности инвариантно-групповой природы. Применение групповых методов (особенно это касается пространственной задачи) требует выполнения огромного объема рутинных преобразований и вычислений, которые были проведены с помощью систем символьных вычислений.

Чтобы оценить примерный объем вычислительной работы заметим, что лишь для одной естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности, оптимальная система одномерных подалгебр насчитывает один трехпараметрический элемент, 9 двухпараметрических, 45 однопараметрических элементов и 95 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и 20 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений плоской задачи (плоское деформированное состояние) имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, 9 однопараметрических и 19 индивидуальных элементов.

Преподавание математической теории пластичности в Самарском государственном университете имеет свою историю и традиции, связанные прежде всего с именем известного специалиста в теории упрочняющихся идеально пластических тел — Г.И. Быковцева. Для него всегда было характерно сочетание собственно механического содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения¹⁹. Такой синтез требовал также особого курса по теории дифференциальных уравнений в частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Д.Д. Ивлев — член Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член редколлегий журналов «Известия РАН — Механика твердого тела» и «Прикладная математика и механика», член экспертного совета по математике и механике ВАК Минобрнауки РФ, председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженный деятель науки и техники РФ. Среди учеников Д.Д. Ивлева — доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России — Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Мы поздравляем Дюиса Даниловича с 80-летием и желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

Л.Ю. Коссович, Ю.Н. Радаев

¹⁸ Не следует однако преувеличивать возможности группового анализа. В настоящее время его роль как средства нахождения новых точных решений задач механики деформируемого твердого тела является более чем скромной.

¹⁹ С избранными научными статьями Г.И. Быковцева можно познакомиться по кн.: *Быковцев, Г.И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: сб. ст. / Г.И. Быковцев. – Владивосток: Дальнаука, 2002. – 566 с.



Библиографический список

1. *Saint-Venant, de B.* Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – Т. 70. – Р. 473–480.
2. *Saint-Venant, de B.* Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. – 1871. – Т. 16. – Р. 308–316, 373–382²⁰.
3. *Coulomb, C.A.* Essay sur l'application des règles de maximes et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture / C.A. Coulomb // Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'académie Royale des Sciences, Année 1773. – Paris: de l'imprimerie Royale, 1776.
4. *Леви, М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: сб. ст. / М. Леви // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 20–23²¹.
5. *Вакуленко, А.А.* Теория пластичности / А.А. Вакуленко, Л.М. Качанов // Механика в СССР за 50 лет: в 4 т. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1972. – С. 79–118.
6. *Томас, Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
7. *Хилл, Р.* Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 407 с.
8. *Фрейденталь, А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.
9. *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.²²
10. *Соколовский, В.В.* Теория пластичности / В.В. Со-

²⁰См. пер. на рус. яз.: *Сен-Венан, Б.* Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости: сб. ст. / Б. Сен-Венан // Теория пластичности. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 11–19.

²¹Оригинальная работа: *Levy, M.* Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / M. Levy // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – V. 71. – Р. 1323–1325.

²²Первое издание этой книги: *Качанов, Л.М.* Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 324 с.

²³Это последнее 3-е издание; 2-е издание: *Соколовский, В.В.* Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 396 с.; 1-е издание книги было выпущено в свет издательством АН СССР в 1946 г.

²⁴См. также 3-е изд. этой книги: *Соколовский, В.В.* Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.: Физматгиз, 1960. – 244 с.

²⁵Оригинальная работа: *Haar, A.* Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien / A. Haar, Th. Karman // Nachr., kgl. Ges. Wiss. Gött. Math.-phys. Kl., 1909. – Н. 2. – S. 204–218.

²⁶Оригинальная работа: *Shield, R.T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry / R.T. Shield // Proc. Roy. Soc. Lond. – 1955. – V. 233A, № 1193. – P. 267–287.

²⁷См. также: *Ишлинский, А.Ю.* Прикладные задачи механики: в 2 т. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1986. – С. 17–42.

²⁸См. с. 62–83. В заключительном подстрочном замечании А.Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.



- Естественно-науч. сер. – 2007. – № 6(56). – С. 102–114.
23. *Ивлев, Д.Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред / Д.Д. Ивлев // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96²⁹.
24. *Ивлев, Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д.Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 546–549³⁰.
25. *Ивлев, Д.Д.* О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д.Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 3. – С. 137.³¹
26. *Ивлев, Д.Д.* К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска / Д.Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114, 263–267.
27. *Ивлев, Д.Д.* Механика пластических сред: в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – 448 с.
28. *Ивлев, Д.Д.* Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упруго-пластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды / Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2002. – 448 с.
29. *Ивлев, Д.Д.* О теории трещин квазихрупкого разрушения / Д.Д. Ивлев // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.
30. *Ивлев, Д.Д.* Три дискуссии в механике / Д.Д. Ивлев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2007. – № 4 (54). – С. 115–123.
31. *Радаев, Ю.Н.* К 75-летию Д.Д. Ивлева / Ю.Н. Радаев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2005. – № 5 (39). – С. 5–32.
32. *Радаев, Ю.Н.* О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия / Ю.Н. Радаев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 1. – С. 86–94.
33. *Радаев, Ю.Н.* К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 5. – С. 102–120.
34. *Радаев, Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев. – Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2006. – 340 с.
35. *Ивлев, Д.Д.* Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород / Д.Д. Ивлев, Л.А. Максимова, Р.И. Непершин, Ю.Н. Радаев, С.И. Сенашов, Е.И. Шемякин. – М.: Физматлит, 2008. – 832 с.
36. *Радаев, Ю.Н.* О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке / Ю.Н. Радаев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – № 5. – 2008. – С. 79–89.
37. *Радаев, Ю.Н.* К теории плоской деформации идеально пластического тела / Ю.Н. Радаев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2008. – № 3(62). – С. 272–289.

СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ Д.Д. ИВЛЕВА

1955

К теории простого деформирования пластических тел // Прикл. мат. и механика. – 1955. – Т. 19, вып. 6. – С. 734–735.

1956

К использованию линейной тензорной связи в пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 2. – С. 289–292.

Выпучивание эксцентричной трубы // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1956. – № 10. – С. 112–166.

1957

О потере несущей способности вращающихся дисков, близких круговому // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.

Упруго-пластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестн. МГУ. – 1957. – № 2. – С. 51–52 (совм. с Л.В. Ершовым).

Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 5. – С. 113–118.

Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 2. – С. 294–296.

Приближенное решение задач теории малых упруго-пластических деформаций // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, № 2. – С. 527–528.

Упруго-пластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под дей-

²⁹См. также [27, с. 5–14].

³⁰См. также [27, с. 15–20].

³¹См. также [27, с. 20–21].



ствием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 7. – С. 129–131 (совм. с Л.В. Ершовым).

О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 8. – С. 149–152 (совм. с Л.В. Ершовым).

Упруго-пластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 9. – С. 130–134 (совм. с Л.В. Ершовым).

Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 10. – С. 89–93.

Об определении перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. мат. и механика. – 1957. – Т. 21, вып. 5. – С. 716–718.

Приближенное решение плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности // Вестн. МГУ. – 1957. – № 5. – С. 17–26 (совм. с Л.В. Ершовым).

1958

О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125 (совм. с Л.В. Ершовым).

О некоторых работах К.Н. Шевченко по теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1958. – № 2. – С. 159–162.

Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.

Приближенное решение упругопластических осесимметрических задач теории идеальной пластичности // Вестн. МГУ. – 1958. – № 2. – С. 47–56 (совм. с Л.В. Ершовым).

О разрывных решениях пространственных задач теории идеальной пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 4. – С. 480–486.

О некоторых частных решениях уравнений осесимметричной теории идеальной пластичности и обобщение решения Л. Прандтля о сжатии пластической полосы шероховатыми плитами // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 673–678.

К построению теории идеальной пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 6. – С. 850–855.

Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1958. – № 11. – С. 107–109.

Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 6. – С. 488–490.

1959

Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1959. – № 1. – С. 132–133.

О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 6. – С. 546–549.

О вдавливании жестких штампов в пластическое полупространство // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 2. – С. 247–281.

К теории разрушения твердых тел // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 3. – С. 618–624.

О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1959. – № 3. – С. 137.

Об изотропном упрочнении пластических тел // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 4. – С. 777–779.

К определению перемещений в задаче Л.А. Галина // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 5. – С. 987–988.

К теории идеальной пластической анизотропии // Прикл. мат. и механика. – 1959. – Т. 23, вып. 6. – С. 1107–1114.

К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 112–114.



1960

- К теории идеально затвердевающих сред // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 4. – С. 742–745.
- Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 6. – С. 1232–1235.
- О границе пластического состояния материала // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 1. – С. 161.
- О свойствах соотношений закона анизотропного упрочнения пластического материала // Прикл. мат. и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 1. – С. 144–146.
- О постулате изотропии в теории пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 125–127.
- К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала // Прикл. мат. и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 4. – С. 707–710.
- Об экстремальных свойствах условий пластичности // Прикл. мат. и механика. – 1960. – Т. 24, вып. 5. – С. 951–955.
- К построению гидродинамики вязкой жидкости // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 135, № 2. – С. 280–282.
- О работе В.С. Ленского «Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении» // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1960. – № 6. – С. 179–180.
- К теории вдавливания штампа в пластическую среду // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 214–216 (совм. с В.А. Жалниным).
- О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 4. – С. 75–78.

1961

- Об определении предельной нагрузки тел, вдавливаемых в пластическую среду // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 1. – С. 173–174 (совм. с Г.И. Быковцевым).
- К теории неустановившейся ползучести // Проблемы механики сплошной среды: сб. статей, посвящ. 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили. – М., 1961. – С. 157–160.
- Об определении поверхности выпучивающегося материала при вдавливании тонкого лезвия в пластическое полупространство // Прикл. мат. и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 2. – С. 332–335.
- К теории сферического деформированного состояния идеально пластических сред // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 1. – С. 72–75 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
- Об устойчивости полосы при сжатии // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 5. – С. 1047–1049 (совм. с Л.В. Ершовым).
- К построению теории упругости // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 6. – С. 1321–1324.
- Об основных соотношениях теории анизотропной сыпучей среды // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 2. – С. 116–121 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
- О математическом описании поведения упругого изотропного тела при помощи кусочнолинейного потенциала // Прикл. мат. и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 5. – С. 897–905.
- О кручении винтовых стержней из идеально жесткопластического материала // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1961. – № 5. – С. 124–126.
- О вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1961. – № 6. – С. 153–154 (совм. с В.А. Жалниным, В.С. Мищенко).
- Об учете сжимаемости в теории идеально пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 6. – С. 1126–1128 (совм. с Т.Н. Мартыновой).
- О двойных числах и их функциях // Математическое просвещение. – 1961. – № 6. – С. 197–203.

1962

- Об идеально пластическом течении материала с учетом остаточных микронапряжений // Прикл. мат. и механика. – 1962. – Т. 26, вып. 4. – С. 709–714.
- К теории предельного равновесия оболочек вращения при кусочнолинейных условиях пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 6. – С. 95–102.



1963

К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 3. – С. 589–592 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О кручении призматических стержней из упрочняющегося материала при линейаризованном условии пластичности // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 3. – С. 115–118 (совм. с В.В. Дудукаленко).

К теории сложных сред // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 148. – № 1. – С. 64–67.

Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 3. – С. 102–104 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О предельном состоянии осесимметричных тел при условиях сопротивления сдвигу и отрыву // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 79–85 (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О кручении анизотропно упрочняющихся стержней при линейаризованном законе пластического течения // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 5. – С. 173–175 (совм. с В.В. Дудукаленко).

О кручении призматических стержней из идеально пластического материала с учетом микронапряжений // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 5. – С. 154–157 (совм. с И.А. Бережным).

Об уравнениях вязкопластического тела при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 6. – С. 12–16 (совм. с В.А. Знаменским).

О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 1024–1026 (совм. с В.В. Дудукаленко).

1964

К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1964. – № 5. – С. 102–108 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).

О функциях нагружения анизотропно упрочняющегося пластического материала // Прикл. мат. и механика. – 1964. – Т. 28, вып. 4. – С. 794–797 (совм. с Г.И. Быковцевым, В.В. Дудукаленко).

О предельном состоянии слоистых пластин и оболочек вращения // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 77–86 (совм. с Ю.П. Листровой, Ю.В. Немировским).

Об устойчивости пластин в общем случае нелинейной деформационной теории при малых деформациях // Прикл. механика. – 1964. – № 2. – С. 117–123 (совм. с И.Д. Легеней).

Пластичности теория (мат.) // Физ. энцикл. словарь. – М., 1964. – С. 37–39.

Пластический шарнир // Физ. энцикл. словарь. – М., 1964. – С. 37.

Пластичности условия // Физ. энцикл. словарь. – М., 1964. – С. 39.

1965

О влиянии вязкости на механическое поведение упруго-пластических сред // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 163, № 3. – С. 595–598 (совм. с И.А. Бережным).

О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 164, № 4. (совм. с Т.Н. Мартыновой).

О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочнолинейных потенциалах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1965. – № 1. – С. 56–69 (совм. с Г.И. Быковцевым, Т.Н. Мартыновой).

К теории устойчивости пластины в общем случае деформационной теории: Тр. всесоюз. конф. по устойчивости. – М., 1965.

1966

Теория идеальной пластичности. – М., 1966. – 232 с.

1967

О некоторых случаях интегрируемости соотношений теории упрочняющихся пластических сред при сингулярных поверхностях текучести // Инженер. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 1. – С. 143–144 (совм. с Л.В. Ершовым).



О диссипативной функции в теории упрочняющихся пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 2. – С. 346–348.

Об условиях квазихрупкого разрушения // Прикл. мат. и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 5. – С. 537–542 (совм. с Л.В.Ершовым).

О деформационных теориях пластичности при сингулярных поверхностях нагружения // Прикл. мат. и механика. – 1967. – Т. 32, вып. 5. – С. 887–889.

О диссипативной функции в теории пластических сред // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1037–1039.

О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеально-пластических телах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 5. – С. 1039–1042 (совм. с Г.И.Быковцевым, Ю.М.Мяснянкиным).

Об одном построении теории трещин // Инженер. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 6. – С. 91–94.

О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.

1968

О соотношениях на поверхности разрыва напряжений в трехмерных идеально жесткопластических телах // Прикл. мат. и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 3. – С. 472–477 (совм. с Г.И.Быковцевым, Ю.М.Мяснянкиным).

О кинематических соотношениях на поверхности скольжения в идеальных жесткопластических телах // Прикл. мат. и механика. – 1968. – Т. 38, вып. 4. – С. 623–631 (совм. с Г.И.Быковцевым, Ю.М.Мяснянкиным).

К задаче о внедрении гладкого клинообразного в плане штампа с плоским основанием в жесткопластическое пространство // Инженер. журн. Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 115–118 (совм. с Р.И.Непершиным).

1969

О деформационных теориях пластичности // Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды: сб. статей, посвящ. 60-летию акад. Л.И.Седова. – М., 1969. – С. 233–239.

1970

О диссипативных функциях в теории вязкопластических сред // Проблемы механики сплошной среды (К 60-летию акад. В.В.Новожилова). – 1970. – С. 67–70. (совм. с И.А.Бережным, Е.В.Макаровым)

Об одной неполной задаче теории идеальной пластичности // Тр. НИИ математики ВГУ. – 1970. – С. 145–148.

О деформационных моделях теории пластичности и сплошных сред // Прикл. мат. и механика. – 1970. – Т. 40, вып. 3. – С. 553–557 (совм. с И.А.Бережным, Е.В.Макаровым).

1971

Об уравнениях теории идеальной пластичности в компонентах скоростей перемещений // Прикл. мат. и механика. – 1971. – Т. 41, вып. 1. – С. 183–185 (совм. с А.Д.Чернышевым).

Теория упрочняющегося пластического тела. – М., 1971. – 232 с. (совм. с Г.И.Быковцевым).

1972

О приобретенной анизотропии пластических тел // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа: сб. статей, посвящ. 80-летию акад. Н.И.Мусхелишвили. – М., 1972. – С. 601–605 (совм. с И.А.Бережным, В.В.Дудукаленко).

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // Прикл. мат. и механика. – 1972. – Т. 42, вып. 5. – С. 957–959.

О построении модели сыпучих сред исходя из определения диссипативной функции // Основы пластичности: сб. трудов симпозиума. Варшава, 1973. – С. 601–605 (совм. с И.А.Бережным, В.Б.Чадовым).

1973

О построении модели сыпучих сред на основе диссипативных функций // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 123, № 6. (совм. с И.А.Бережным, В.Б.Чадовым).



Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 159–166 (совм. с Р.И. Непершиным).

Об одном обобщении решения Прандтля для сферического деформированного состояния // Тр. НИИ математики ВГУ. – Воронеж, 1973. – Вып. 10. – С. 1–3.

1974

О диссипативной функции в теории анизотропных пластических сред // Изв. вузов. Машиностр. МВТУ. – 1974. – С. 21–24 (совм. с В.Б. Чадовым).

О некоторых моделях, построенных на основе механизмов упругости, вязкости и пластичности с переменными определяющими параметрами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 1. (совм. с И.А. Бережным, Н.В. Герасимовым).

О функции нагружения для идеально пластических моделей // Избр. проблемы прикл. механики: сб. статей, посвящ. 60-летию акад. В.Н. Челомея. – М., 1974. – С. 113–117 (совм. с И.А. Бережным, В.И. Цейлером).

1975

Об определении перемещений в упруго-пластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред (К 100-летию со дня рождения акад. Б.Г. Галеркина). – М., 1975. – С. 236–240.

О построении поверхностей сложных жесткопластических моделей // Механика деформируемых тел и конструкций: сб. статей. – М., 1975. – С. 62–70 (совм. с И.А. Бережным, В.И. Цейлером).

О течении жидкости с управляемой вязкостью // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 3. – С. 582–584 (совм. с И.А. Бережным, Н.В. Герасимовым, В.И. Цейлером).

О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 223, № 4. – С. 810–811 (совм. с И.А. Бережным, Р.К. Логвиновой).

1976

Об определяющих неравенствах в теории пластичности // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 227, № 4. – С. 824–826. (совм. с И.А. Бережным)

1977

Диссипативная функция в теории пластичности // Механика деформируемого тела: межвуз. сб. – Куйбышев, 1977. – Вып. 3. – С. 5–22 (совм. с И.А. Бережным).

1978

Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М., 1978. – 208 с. (совм. с Л.В. Ершовым).

Об условиях пластичности сжимаемого упругопластического материала при плоской деформации // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 80–87. (совм. с Е.В. Макаровым, Ю.М. Марушкой)

1980

Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикл. мат. и механика. – 1980. – Т. 44, № 3. – С. 540–549 (совм. с И.А. Бережным).

1981

Определяющие неравенства в теории упругопластического тела // V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике: тез. докл. – Алма-Ата, 1981. (совм. с И.А. Бережным).

1982

Об уравнениях стареющих пластических тел // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1982. – Т. XXV, № 5. – С. 22–25 (совм. с Н.Х. Арутюняном).

Об обобщении решения Л. Прандтля о сжатии пластического слоя шероховатыми плитами // Современные проблемы механики и авиации: сб. статей в честь 60-летия акад. И.Ф. Образцова. – М., 1982. – С. 137–144 (совм. с Л.В. Ершовым, А.В. Романовым).

Об обобщении решения Прандтля в сферической системе координат // Прикл. мат. и механика. – 1982. – Т. 46, вып. 5. – С. 524–527 (совм. с А.В. Романовым).

1983

О влиянии внутреннего механизма вязкости на поведение идеально пластических сред // Прикл. мат. и механика. – 1983. – Т. 47, вып. 3. – С. 524–527 (совм. с М.А. Артемовым).



Об одной предельной модели сплошной среды // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 273, № 5. – С. 1074–1076 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1984

К теории предельного состояния хрупких тел с разрывными решениями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 1. – С. 111–116 (совм. с И.Т. Артемьевым).

Об одном точном неавтономном решении теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 275, № 5. – С. 1080–1083 (совм. с А.В. Романовым).

Об одном классе точных неавтономных задач теории идеальной пластичности // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела: сб. статей, посвящ. 60-летию акад. Ю.Н. Работнова. – М., 1984. – С. 90–97 (совм. с А.В. Романовым).

1985

Краевая задача для сред с предельным сопротивлением всестороннему растяжению // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1985. – С. 3–9 (совм. с И.Т. Артемьевым).

1986

О течении идеально вязкой среды // Краевые задачи и их приложение. – Чебоксары, 1986. – С. 33–42 (совм. с А.А. Горбуновым).

Об упругопластическом состоянии клина при предельном сопротивлении сдвигу и отрыву // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1986. – № 1. – С. 157–161 (совм. с И.Т. Артемьевым).

О нижней границе несущей способности тел, определяемой условиями, предельного состояния // VI Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике: аннотации докл. – Ташкент, 1986. – С. 51 (совм. с И.Т. Артемьевым, А.А. Горбуновым).

Об определяющих соотношениях в теории предельного сопротивления сдвигу и среднему напряжению // Актуальные задачи механики сплошных сред. – Чебоксары, 1986. – С. 45–52 (совм. с А.А. Горбуновым).

Об изгибе пластической полосы, ослабленной пологими выточками // Взаимодействие тел в жидкости со свободными границами. – Чебоксары, 1986. – С. 57–60 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1988

Определение напряженного состояния в деформируемом объеме порошкового материала методом характеристик // Порошковая металлургия. – 1988. – № 1. – С. 6–10 (совм. с Н.А. Чайниковым).

Упругопластические равновесия остроугольного клина при предельном сопротивлении сдвигу, среднему растягивающему напряжению и отрыву // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1988. – № 4. – С. 157–162 (совм. с И.Т. Артемьевым).

Линеаризованные уравнения теории анизотропного идеального жесткопластического тела // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложений. – Чебоксары, 1988. – С. 55–58 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1989

Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 2. – С. 183–185 (совм. с Е.А. Григорьевым, Л.Б. Шитовой).

Об образовании шейки при растяжении плоского образца с учетом влияния среднего напряжения // Краевые задачи и их приложения. – Чебоксары, 1989. – С. 117–119 (совм. с Л.Б. Шитовой).

1992

Пластичности теория (математическая) // Физ. энцикл.: в 5 т. – М., 1992. – Т. 3. – С. 628–631.

Пластический шарнир // Физ. энцикл.: в 5 т. – М., 1992. – Т. 3. – С. 628.

Пластичности условие // Физ. энцикл.: в 5 т. – М., 1992. – Т. 3. – С. 631.

К теории предельного состояния пластических пористых тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 163–165.

Об условиях текучести идеально пластического тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1992. – № 5. – С. 107–109 (совм. с А.В. Романовым).

О свойствах основных соотношений теории идеальной пластической анизотропии // Актуальные проблемы механики деформ. тверд. тела: сб. статей, посвящ. 70-летию Ж.С. Ержанова. – Алма-Ата, 1992. – С. 69–75 (совм. с И.Т. Артемьевым).

**1993**

Теория идеальной пластической анизотропии // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, № 1. – С. 73–78 (совм. с И.Т. Артемьевым).

Линеаризованные уравнения теории идеальной пластичности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1993. – № 5. – С. 107–113 (совм. с И.Т. Артемьевым).

О применении обобщенных функций комплексного переменного к двумерной задаче теории упругости // Прочность и надежность конструкций: сб. статей, посвящ. 50-летию В.Д. Кулиева. – М., 1993. – С. 83–89 (совм. с М.В. Михайловой).

1994

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. АН Чувашской Республ. – 1994. – № 2. – С. 16–21 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории идеально затвердевающих сред // Изв. АН Чувашской Республ. – 1994. – № 2. – С. 22–25 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории предельного состояния сыпучих сред. Деп. в ВИНТИ 16.12.94. 2918-в94. 5 с. (совм. с Л.Б. Шитовой).

1995

О статических и кинематических соответствиях в теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 3. – С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).

О линеаризованных уравнениях кинематически определимых задач // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 6. – С. 104–110 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории затвердевающих сред // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 14–21 (совм. с М.А. Артемовым).

О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально-пластического материала // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 39–48 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).

Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 27–38 (совм. с Т.Л. Захаровой).

Об идеально пластическом состоянии полого кругового цилиндра при произвольном возмущении боковой поверхности // Изв. Инженерно технологической академии Чувашской Республ. – 1995. – № 1. – С. 29–36 (совм. с А.М. Васильевой).

1996

Об одной модели предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 1. – С. 61–64 (совм. с Л.Б. Шитовой).

О пластическом течении бруса прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 8–17 (совм. с М.А. Артемовым).

О соотношениях теории пластической анизотропии // Динамика сплошных сред со свободной границей. – Чебоксары, 1996. – С. 121–125.

Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Проблемы механики сплошной среды. – Владивосток, 1996. – С. 112–115.

О статической определимости предельного состояния твердого тела при отрыве // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 48–51.

О разрывных решениях теории пластичности // Проблемы механики. – 1996. – Т. 32, № 7. – С. 65–68 (совм. с М.А. Артемовым).

Об одном случае предельного состояния тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 3. – С. 43–45 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории дифференциальных соответствий в механике сплошной среды // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. – 1996. – № 2. – С. 5–7.

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочнолинейных условиях текучести // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350, № 3. – С. 332–334 (совм. с М.А. Артемовым).



О течении трубы, ослабленной пологими выточками // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1996. – № 6. – С. 28–31 (совм. с Т.Л. Захаровой).

О растяжении полосы и бруса переменного прямоугольного сечения из идеально пластического материала // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 6. – С. 79–87 (совм. с А.М. Васильевой, М.В. Михайловой).

Об общих уравнениях теории идеальной пластичности // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1996. – № 6. – С. 32–34.

Об образовании шейки в растягиваемой вязкопластической полосе // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1996. – № 6. – С. 35–38 (совм. с Т.И. Рыбаковой).

1997

Об идеально пластическом состоянии призматических тел переменного прямоугольного сечения // Докл. РАН. – 1997. – Т. 353, № 1. – С. 47–50 (совм. с М.А. Артемовым).

К теории идеально затвердевающих сред // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355, № 5. – С. 623–625 (совм. с М.А. Артемовым).

О напряженном состоянии идеально пластического полого цилиндра, близкого к круговому // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 4. – С. 113–119 (совм. с А.М. Васильевой).

Приближенное решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1997. – Т. 38, № 5. – С. 165–172 (совм. с Т.Л. Захаровой).

О соотношениях ассоциированного закона течения и нагружения в теории идеальной пластичности // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1997. – № 4. – С. 78–94.

1998

О пространственном течении идеально пластического материала, сжатого шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 1. – С. 5–12.

О течении трубы, ослабленной выточками // Докл. РАН. – 1998. – Т. 359, № 1. – С. 40–42 (совм. с Т.Л. Захаровой).

Об устойчивости вязкопластической полосы // Докл. РАН. – 1998. – Т. 358, № 4. – С. 490–491 (совм. с Т.И. Рыбаковой).

Об общих соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 1998. – Т. 361, № 6. – С. 765–767.

Об идеальном жесткопластическом течении плоской полосы // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363, № 4. – С. 483–485 (совм. с Л.А. Максимовой).

О возмущенном течении растягиваемой идеально пластической полосы // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363, № 5. – С. 632–633 (совм. с Л.А. Максимовой).

О соотношениях ассоциированного закона пластического течения в обобщенных переменных // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363, № 6. – С. 775–776.

О предельном состоянии идеально пластического прямоугольного бруса, ослабленного пологими выточками // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 4. – С. 173–179 (совм. с М.А. Артемовым).

Теория пластичности. – Владивосток, 1998. – 528 с. (совм. с Г.И. Быковцевым).

Изменение жесткости и процессы микроповреждений в хрупком материале // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 1998. – № 5. – С. 18–28 (совм. с В.В. Дудукаленко).

1999

Об определении соотношений ассоциированного закона идеально-пластического течения // Прикладные задачи механики сплошных сред. – Воронеж, 1999. – С. 116–123.

К теории кинематически определяемых состояний идеальнопластических тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 92–98 (совм. с М.А. Артемовым).

О соотношениях общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Изв. Инженерно-технологической академии Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1998. – № 3,4; – 1999. – № 1,2. – С. 13–16 (совм. с Л.А. Максимовой).

Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 6. – С. 39–54 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).



Полная пластичность в теории идеально пластического тела // Докл. РАН. – 1999. – Т. 368, № 3. – С. 333–334 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

2000

О сдавливании круглого в плане идеально пластического слоя шероховатыми плитами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 1. – С. 129–140 (совм. с И.П. Григорьевым).

О плоских течениях идеально жесткопластической среды // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370, № 1. – С. 43–45 (совм. с Л.А. Максимовой).

О вдавливании индентора в идеально жесткопластическую полосу // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 3. – С. 131–136 (совм. с Л.А. Максимовой).

О течениях изотропных сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 5. – С. 5–12 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

Условия изотропии и обобщенный ассоциированный закон пластического течения // Докл. РАН. – 2000. – Т. 371, № 1. – С. 49–51 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

О свойствах соотношений общей плоской задачи теории идеальной пластичности // Докл. АН РАН. – 2000. – Т. 373, № 1. – С. 39–41 (совм. с Л.А. Максимовой).

О свойствах течений изотропной среды // Докл. РАН. – 2000. – Т. 375, № 2. – С. 191–194 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

Об определении связи «деформация – напряжение» в теории сложного нагружения при выполнении постулата изотропии А.А. Ильюшина // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чувашской Республ. – 2000. – № 4. – С. 15–28.

2001

О вдавливании жесткого штампа в идеально пластическое полупространство с учетом сдвиговых усилий // Докл. РАН. – 2001. – Т. 379, № 2. – С. 196–199 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).

Об определении поля скоростей идеально пластического течения в случае общей плоской задачи // Докл. РАН. – 2001. – Т. 379, № 6. – С. 758–763 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).

О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеально пластического тела при условии полной пластичности // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381, № 5. – С. 616–622 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

Математическая теория идеальной пластичности. Состояние и развитие: Доклад на VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике // Изв. Инженерно-технологической акад. Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1999. – № 3,4; – 2000. – № 1–4; – 2001. – № 1–4. – С. 32–44 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

О представлении состояния полной пластичности на диаграмме Мора // Изв. Инженерно-технологической акад. Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1999. – № 3,4; – 2000. – № 1–4; – 2001. – № 1–4. – С. 45–51 (совм. с Л.А. Максимовой).

О соотношениях плоской задачи теории упругопластического тела для неоднородного материала // Изв. Инженерно-технологической акад. Чувашской Республ. Сводный том. – Чебоксары, 1999. – № 3,4; – 2000. – № 1–4; – 2001. – № 1–4. – С. 52–59 (совм. с А.В. Горским, П.В. Горским).

Механика пластических сред: в 2 т. Т. 1. Теория идеальной пластичности. – М., 2001. – 448 с.

Математическая теория пластичности. – М., 2001. – 704 с. (совм. с А.Ю. Ишлинским).

О предельных течениях изотропных сред // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск, 2001. – С. 223–227 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

Условия изотропии и ассоциированный закон пластического деформирования // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород: сб. статей, посвящ. 70-летию проф. Л.В. Ершова. – М., 2001. – С. 93–116 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

2002

Механика пластических сред: в 2 т. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – М., 2002. – 448 с.

О характеристических соотношениях для напряжений пространственной задачи сыпучей среды



при полном предельном равновесии // Докл. РАН. – 2002. – Т. 383, № 5. – С. 638–642 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О характеристических соотношениях для скоростей перемещений в пространственной задаче полного предельного равновесия сыпучей среды // Докл. РАН. – 2002. – Т. 384, № 1. – С. 57–61 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

Внедрение пирамиды в идеально пластическое полупространство // Докл. РАН. – 2002. – Т. 385, № 6. – С. 766–769 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О вдавливании плоского штампа в идеальное жесткопластическое полупространство при действии контактных касательных напряжений // Прикл. мат. и механика. – 2002. – Т. 66, вып. 1. – С. 134–139 (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным).

О внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 57–62 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О свойствах моделей изотропных сред // Проблемы механики деформируемого твердого тела: сб. статей к 70-летию акад. Н.Ф. Морозова. – СПб., 2002. – С. 149–153 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Л.А. Максимовой).

2003

О сдавливании идеально пластической пирамиды плоским штампом // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 3. – С. 337–339 (совм. с А.Ю. Ишлинским, Р.И. Непершиным).

О статически определяемых соотношениях теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 4. – С. 483–486.

Статически определяемые соотношения теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 5. – С. 634–637 (совм. с М.В. Михайловой).

О линеаризованных уравнениях статически определяемых соотношений теории идеальной пластичности // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 6. – С. 769–771 (совм. с М.В. Михайловой).

К теории статически определяемых соотношений и предельного состояния пластических тел // Докл. РАН. – 2003. – Т. 392, № 1. – С. 59–62 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

Статически определяемые соотношения теории пластичности и предельное состояние и разрушение тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 3. – С. 84–89 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

Идеи и результаты А.Ю. Ишлинского в теории пластичности // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 4. – С. 167–174.

Идеи и результаты А.Ю. Ишлинского в теории пластичности // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. – М., 2003. – С. 30–38.

О соотношениях теории идеальной пластичности при условии пластичности максимального приведенного напряжения // Проблемы нелинейной механики: сб. статей к 80-летию Л.А. Толоконникова. – Тула, 2003. – С. 178–184 (совм. с А.Ю. Ишлинским).

Статически определяемые состояния теории идеальной пластичности // Современные проблемы математики, механики, информатики: тез. докл. Междунар. конф. – Тула. – 2003. – С. 147.

Статически определяемые соотношения теории идеальной пластичности // Изв. Нац. акад. наук и искусств Чуваш. Республ. – 2003. – № 3. – С. 36–46 (совм. с М.В. Михайловой).

Теория идеальной пластичности. Состояние и развитие // Прикладная механика. – 2003. – № 11. – С. 6–46.

2005

Мир эллиптический и Мир гиперболический // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2005. – № 5(39). – С. 33–41.

Теория предельного состояния и идеальной пластичности: избранные работы. – Воронеж, 2005. – 357 с.

О статически определяемых состояниях в теории идеальной пластичности // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2005. – № 2(44). – С. 13–18 (совм. с Л.А. Максимовой).

Статически определяемые соотношения теории сжимаемых идеально-пластических сред // Теоретическая и прикладная механика: межвед. сб. науч.-метод. статей. – Минск, 2005. – Вып. 19. – С. 21–24.



О соотношениях ассоциированного закона течения теории сжимаемых идеальнопластических сред // Докл. РАН. – 2005. – Т. 406, № 4. – С. 478–479.

О статически определяемых соотношениях сжимаемых идеально пластических сред // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 5. – С. 131–134.

2006

К теории статически определяемых состояний деформируемых тел // Механика твердого тела. – 2006. – № 4. – С. 131–136 (совм. с Л.А. Максимовой).

О развитии идеально пластического состояния // Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 130–133 (совм. с Н.М. Матченко).

Об идеях и результатах Е.И. Шемякина в механике предельного состояния твердых деформируемых тел и конструкций // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина. – М., 2006. – С. 46–51.

О предельном состоянии при отрыве // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина. – М., 2006. – С. 287–290 (совм. с Н.М. Матченко).

Предельное состояние твердых тел как состояние статической определенности // IX Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докл. – Н. Новгород, 2006. – Т. III. – С. 100.

Об эволюции идеальнопластического состояния // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2006. – № 1(48). – С. 58–61.

Механика сплошной среды как раздел дифференциальной геометрии // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. – 2006. – № 5(52). – С. 215–220.

2007

О переходе статически неопределимого состояния в статически определенное // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 5–9.

Три дискуссии // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2007. – № 1. – С. 157–163.

Чем отличается теория идеальной пластичности от теории предельного состояния // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2007. – № 3. – С. 3–10.

Три дискуссии в механике // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. – 2007. – № 4(54). – С. 115–123.

О предельных соотношениях при отрыве для анизотропного материала // Математические модели и методы механики сплошных сред: сб. науч. тр. к 60-летию А.А. Буренина. – Владивосток, 2007. – С. 106–107 (совм. с А.Н. Роштовой).

2008

Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. – М., 2008. – 832 с. (совм. с Л.А. Максимовой, Р.И. Непершиным, Ю.Н. Радаевым, С.И. Сенашевым, Е.И. Шемякиным).

2009

Коэффициент интенсивности статистической неопределимости и достижение состояния полной пластичности // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2009. – № 1 (6). – С. 76–80.

2010

Об одном вопросе в теории предельного состояния // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2010. – № 2 (66). – С. 19–24.