

УДК 512.81, 517.58+517.965

©

БУХШТАБЕР В. М., ХОЛОДОВ А. Н.

ГРУППЫ ФОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ СУПЕРПРЯМОЙ, ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛИНОМОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Введение

Пусть $\{p_n(x), n=0, 1, \dots\}$ — последовательность полиномов от одной независимой переменной над полем R характеристики нуль. Она называется *биномиальной* [12, 15—18], если ее производящая функция $P(x, t) = \sum_{n \geq 0} p_n(x) t^n$ имеет вид

$$P(x, t) = \exp(xf(t)), \tag{1}$$

где $f(t)$ — формальный ряд такой, что $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$.

Последовательности полиномов $s_n(x), u_n(x), n \geq 0$, называются последовательностями *Шеффера* и *Боаса — Бака* соответственно, если их производящие функции имеют вид

$$S(x, t) = g(t) \exp(xf(t)), \tag{2}$$

$$U(x, t) = g(t) \Psi(xf(t)), \tag{3}$$

причем $\Psi(x) = \sum_{n \geq 0} x^n/c_n$, где c_n — произвольные элементы поля R , отличные от нуля. Многочисленные примеры последовательностей полиномов (1) — (3) имеются в [2, 8, 23, 9, 15]. Отметим лишь, что среди таких полиномов находятся все классические ортогональные полиномы, полиномы Бернулли, Эйлера и др. Изучением общих свойств последовательностей полиномов, вытекающих из специального вида их производящих функций, занимается *теневой анализ* [12, 14—18, 28].

Производящие функции (1) — (3) удовлетворяют функциональным уравнениям

$$P(x+y, t) = P(x, t)P(y, t), \tag{4}$$

$$S(x+y, t) = S(x, t)P(y, t), \tag{5}$$

$$\delta_x^y U(x, t) = U(x, t)V(y, t), \tag{6}$$

где $V(y, t) = \Psi(yf(t))$, а $\delta_x^y: R[[x]] \rightarrow R[[x, y]]$ — линейный оператор из кольца формальных рядов от одной переменной в кольцо формальных рядов от двух переменных, задаваемый формулой

$$\delta_x^y x^n = \sum_{k=0}^n \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} x^k y^{n-k}. \tag{7}$$

Так как уравнения (4), (5) являются частными случаями уравнения (6) ($c_n = n!$), то мы далее будем обсуждать только уравнение (6). Обозначим множество его решений (или производящих функций вида (3)) для фиксированного ряда $\Psi(x)$ через M_Ψ . На множестве последовательностей полиномов определена естественная операция (*теневая композиция*

ция [12, 14—18]), которая паре последовательностей $\{p_n(x)\}$, $\{q_n(x)\}$ сопоставляет последовательность $\{r_n(x)\}$, где

$$p_n(x) = \sum_i p_{n,i} x^i, \quad r_n(x) = \sum_i p_{n,i} q_i(x).$$

При этом множество последовательностей $\{p_n(x)\}$, у которых $\deg p_n(x) = n$, для любого n образуют группу относительно этой операции. Интерпретация этой операции в привычных терминах следующая. Сопоставим последовательности $\{p_n(x)\}$ линейный оператор T_p на пространстве полиномов от x такой, что $T_p x^n = p_n(x)$ (теневой оператор). Тогда теневой композиции последовательностей полиномов соответствует обычная композиция их теневых операторов. Оказывается, что множество M_Ψ является группой относительно *модифицированной теневой композиции*, когда

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_{n,k} q_k(x), \quad \Psi(x) = \sum_{n \geq 0} x^n / c_n.$$

Если отождествить производящую функцию вида (3) с парой рядов $(g(t), f(t))$, то эта теневая композиция запишется в виде

$$(g_1(t), f_1(t)) (g_2(t), f_2(t)) = (g_1(t) g_2(f_1(t)), f_2(f_1(t))), \quad (8)$$

причем мы предполагаем, что $g_i(0) \neq 0$, $f_i(0) = 0$, $f'_i(0) \neq 0$, $i = 1, 2$.

Отправным моментом настоящей работы являются следующие наблюдения:

1) M_Ψ является орбитой действия группы диффеоморфизмов (формальных) суперпрямой;

2) ряд $\Psi(x)$ является собственной функцией однородной коалгебры. Более точно:

1) Рассмотрим суперпрямую $R^{1,1}$ с кольцом функций $\mathcal{O}(R^{1,1}) = R[[t]] \otimes_{R\Lambda} R[[\tau]]$ (см. § 1) и группу четных диффеоморфизмов суперпрямой $G(R^{1,1})$. Четный диффеоморфизм

$$t \rightarrow f(t), \quad \tau \rightarrow \tau g(t)$$

определяется парой рядов $(g(t), f(t))$. Если подействовать этим диффеоморфизмом на ряд $\tau \Psi(xt)$, то получится ряд

$$\tau g(t) \Psi(xf(t)) = \tau U(g(t), f(t)),$$

где $U(g(t), f(t)) \in M_\Psi$.

2) Легко убедиться, что оператор δ , задаваемый формулой (7), где $c_0 = 1$, определяет на кольце $R[[x]]$ структуру кокоммутативной коассоциативной коалгебры [26]. Генератор d_1 этой коалгебры определяется формулой [3, 10]:

$$d_1 f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta_x^y f(x) \right) \Big|_{y=0}.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$d_1 \Psi(x) = \Psi(x), \quad \Psi(x) = \sum_{n \geq 0} x^n / c_n.$$

Группа $G(R^{1,1})$ является подгруппой группы $G(R\Lambda^{1,1})$, где Λ — какая-то алгебра Грассмана. Настоящая работа посвящена исследованию систем полиномов, связанных с представлениями группы $G(R\Lambda^{1,1})$, где Λ — внешняя алгебра от одной нечетной образующей.

В § 1 изложены необходимые нам факты о группе четных диффеоморфизмов суперпрямой $G(R_A^{1,1})$. Описываются ее важнейшие подгруппы, строится точное суперматричное представление этой группы. Получено полное описание однопараметрических подгрупп группы $G(R_A^{1,1})$, в частности и ее подгрупп $G(R^{1,1})$, $G(R^1)$. В случае группы $G(R^{1,1})$ это дает решение проблемы Ж.-К. Роты (проблема 3 в [17]). В случае группы $G(R^1)$ этот результат имеет приложение в алгебраической топологии, так как согласно работе [6] обертывающая алгебра $UG(R^1)$ алгебры Ли группы $G(R^1)$ изоморфна алгебре Ландвебера — Новикова. При каноническом вложении группы $G(R^1)$ в $UG(R^1)$ однопараметрические подгруппы переходят в семейство коммутирующих когомологических операций.

Заметим, что уравнение однопараметрической подгруппы группы $G(R^1)$ хорошо известно в теории функциональных уравнений (уравнение переноса):

$$f(s_1 + s_2, t) = f(s_1, f(s_2, t)).$$

В § 2 исследуются невырожденные однородные коалгебры и их генераторы. Вводится класс *гипергеометрических коалгебр*. Отметим, что каждая гипергеометрическая функция ${}_pF_q$ является собственной функцией гипергеометрической коалгебры. При этом коалгебры с собственной функцией ${}_0F_q$ однозначно выделяются тем условием, что их генератор является дифференциальным оператором конечного порядка. В общем случае генератор гипергеометрической коалгебры является интегродифференциальным оператором. Важный класс гипергеометрических коалгебр дают *многозначные формальные группы* [3, 5, 19]. Собственная функция m -значной циклической формальной группы имеет вид

$$\Psi(x) = {}_0F_{m-1}\left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, \frac{(m-1)!}{m^{m-1}} x\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \exp(\varepsilon_i \sqrt[m]{m!} x),$$

где ε_i — полный набор корней степени m из единицы, $i = 1, \dots, m$. Исследованы также гипергеометрические коалгебры, отвечающие ограниченному на кольцо инвариантов *сдвигу Дельсарта*, индуцированному стандартным действием ортогональной группы на евклидовом пространстве. В качестве следствия получена формула

$$\int_{S^{m-1}} {}_0F_1\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}(x + 2\sqrt{xy}\langle e_1, a \rangle + y)\right) da = {}_0F_1\left(\frac{m}{2}, \frac{mx}{2}\right) {}_0F_1\left(\frac{m}{2}, \frac{my}{2}\right).$$

В случае $m=2$ эта формула следует из классической теоремы сложения для бесселевых функций.

В § 3 показано, что теория последовательностей полиномов Боаса — Бака эквивалентна теории последовательностей четных полиномов $\{p_{n,\varepsilon}(x, \xi)\}$, $n=0, 1, 2, \dots$, $\varepsilon=0, 1$, на обычной суперпрямой, удовлетворяющих функциональному уравнению

$$\delta_{x,\xi}^{y,\eta} p_{n,\varepsilon}(x, \xi) = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=0}^{\varepsilon} p_{k,\alpha}(x, \xi) p_{n-k,\varepsilon-\alpha}(y, \eta),$$

где $\delta_{x,\xi}^{y,\eta} x^n \xi^\varepsilon = \delta_x^y x^n \delta_\xi^\eta \xi^\varepsilon$ и δ_x^y — коумножение, заданное формулой (7), а $\delta_\xi^\eta \xi = \xi + \eta$. В этом параграфе решаются функциональные уравнения, аналогичные классическим уравнениям Коши, Пексидера, Абеля, Леви-Чи-

виты, в которых оператор сдвига заменен оператором обобщенного сдвига, определяемым формулой (7).

В заключение авторы приносят благодарность А. С. Шварцу и И. В. Воловичу за полезное обсуждение результатов работы.

§ 1. Группа формальных диффеоморфизмов суперпрямой

Мотивировку нижеследующих определений можно найти в [29, 21], хотя для наших целей знакомство с суперматематикой фактически неважно.

Пусть R — поле характеристики нуль, Λ — алгебра Грассмана над R от четной образующей 1 и нечетной образующей λ , $\lambda^2=0$.

Определение 1. *Формальной прямой* R^1 с координатой t будем называть R -алгебру формальных рядов $R[[t]]$. *Формальной суперпрямой* $R_\Lambda^{1,1}$ (аналогично $R^{1,1}$) будем называть Λ -алгебру $\mathcal{O}(R_\Lambda^{1,1})$ (R -алгебру $\mathcal{O}(R^{1,1})$), элементами которой являются выражения $(\lambda\tau + \tau\lambda = 0, \lambda t = t\lambda, \tau t = t\tau)$

$$u_0(t) + \lambda\tau u_1(t) + \lambda v_0(t) + \tau v_1(t) \quad (*)$$

(соответственно выражения $u_0(t) + \tau g_1(t)$), где $\tau^2=0$, $u_0(t)$, $u_1(t)$, $v_0(t)$, $v_1(t) \in R[[t]]$. Выражение (*) называется *четным*, если $v_0(t) = v_1(t) = 0$, и *нечетным*, если $u_0(t) = u_1(t) = 0$.

Алгебра $\mathcal{O}(R_\Lambda^{1,1})$ является топологической и базу окрестностей нуля составляют мономы $t^n \tau^\varepsilon$, $n=0, 1, \dots$, $\varepsilon=0, 1$.

Определение 2. *Формальным отображением* φ суперпрямой $R_\Lambda^{1,1}$ в себя называется четный (сохраняющий четность) непрерывный Λ -линейный эндоморфизм алгебры $\mathcal{O}(R_\Lambda^{1,1})$. Если φ является изоморфизмом, то мы будем говорить, что φ — *формальный диффеоморфизм* суперпрямой.

Из определения 2 следует, что формальное отображение φ однозначно задается значениями

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f_0(t) + \lambda\tau f_1(t) = f(t, \tau), \\ \varphi(\tau) &= \lambda g_0(t) + \tau g_1(t) = g(t, \tau), \end{aligned} \quad (**)$$

где $f_0(t)$, $f_1(t)$, $g_0(t)$, $g_1(t) \in R[[t]]$, причем в силу непрерывности $f_0(0) = 0$. Аналогично формальное отображение прямой R^1 задается рядом $f(t)$, $f(0) = 0$.

В дальнейшем, для сокращения записи, вместо формальная суперпрямая (прямая), формальное отображение и т. д. будем писать суперпрямая (прямая), отображение и т. д.

Понятно, что множество отображений и диффеоморфизмов суперпрямой $R_\Lambda^{1,1}$ образуют полугруппу $C_\Lambda(R^{1,1}, R^{1,1})$ и группу $G_\Lambda(R^{1,1}, R^{1,1})$ относительно композиции отображений. Полугруппы $C(R^{1,1}, R^{1,1})$, $C(R^1, R^1)$ и группы $G(R^{1,1}, R^{1,1})$, $G(R^1, R^1)$ определяются аналогично. Ясно, что имеют место вложения

$$\begin{array}{ccc} C(R^1, R^1) \subset C(R^{1,1}, R^{1,1}) \subset C_\Lambda(R^{1,1}, R^{1,1}) \\ \cup \qquad \qquad \cup \qquad \qquad \cup \\ G(R^1) \subset G(R^{1,1}) \subset G_\Lambda(R^{1,1}). \end{array}$$

При этом подполугруппа $C(R^{1,1}, R^{1,1})$ ($C(R^1, R^1)$) выделяется условиями $f_1(t) = g_0(t) = 0$ (и, дополнительно, $g_1(t) = 0$). В дальнейшем формальное отображение (**) будем обозначать через $\varphi = (f(t, \tau), g(t, \tau))$.

ЛЕММА. Пусть $\varphi = (f(t, \tau), g(t, \tau))$, $\psi = (u(t, \tau), v(t, \tau))$ суть два отображения суперпрямой $R_{\Lambda}^{1,1}$ в себя. Тогда композиция $\psi(\varphi) = (u(f(t, \tau), g(t, \tau)), v(f(t, \tau), g(t, \tau)))$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(f(t, \tau), g(t, \tau)) &= u_0(f_0(t)) + \lambda\tau(f_1(t)u_0'(f_0(t)) + g_1(t)u_1(f_0(t))), \\ v(f(t, \tau), g(t, \tau)) &= \lambda(v_0(f_0(t)) + g_0(t)v_1(f_0(t))) + \tau g_1(t)v_1(f_0(t)), \end{aligned}$$

$$u_0'(f_0(t)) = \left. \frac{d}{dt} u_0(t) \right|_{t=f_0(t)}.$$

Доказательство проводится прямым подсчетом. \square

Следствие 1. 1) Закон композиции в $C(R^{1,1}, R^{1,1})$ имеет вид $\psi(\varphi) = (u_0(f_0(t)), \tau g_1(t)v_1(f_0(t)))$, где $\varphi = (f_0(t), \tau g_1(t))$, $\psi = (u_0(t), \tau v_1(t))$.
2) Закон композиции в $C(R^1, R^1)$ имеет вид $\psi(\varphi) = (u_0(f_0(t)), 0)$, где $\varphi = (f_0(t), 0)$, $\psi = (u_0(t), 0)$. \square

ЛЕММА 2. Отображение φ является диффеоморфизмом суперпрямой $R_{\Lambda}^{1,1}$ тогда и только тогда, когда $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) \neq 0$, $g_1(0) \neq 0$.

Доказательство легко получается из предыдущей леммы.

Определение 2. Диффеоморфизм суперпрямой $R_{\Lambda}^{1,1}$, для которого $f_0'(0) = g_1(0) = 1$, будем называть специальным.

Множество специальных диффеоморфизмов суперпрямой $R_{\Lambda}^{1,1}$ является подгруппой $SG_{\Lambda}(R^{1,1})$ группы $G_{\Lambda}(R^{1,1})$. Группы $SG(R^{1,1})$, $SG(R^1)$ определяются очевидным образом.

Замечание 1. Из следствия 1 вытекает, что группа $SG(R^{1,1})$ изоморфна теневой группе из [14—18].

Замечание 2. На кольце формальных рядов $R[[t]]$ определено строение полугруппы относительно обычного умножения формальных рядов. Имеется действие Φ полугруппы $C(R^1, R^1)$ в $R[[t]]$, а именно $\Phi(f(t), g(t)) = g(f(t))$, где $f(t) \in C(R^1, R^1)$, $g(t) \in R[[t]]$ и $g(f(t))$ — обычная подстановка рядов. Действие Φ определяет на множестве $C(R^1, R^1) \times R[[t]]$ строение полугруппы с умножением μ следующим образом:

$$\mu([f(t), g(t)], [u(t), v(t)]) = (u(f(t)), g(t)v(f(t))).$$

В силу следствия 1 полугруппа $(C(R^1, R^1) \times R[[t]], \mu)$ изоморфна полугруппе $C(R^{1,1}, R^{1,1})$. \square

Определим отображение $F: C_{\Lambda}(R^{1,1}, R^{1,1}) \rightarrow \text{Mat}(1, 1, T\text{Mat}(R, \infty))$ полугруппы $C_{\Lambda}(R^{1,1}, R^{1,1})$ в полугруппу четных суперматриц размера $(1, 1) \times (1, 1)$ с элементами из полукольца бесконечных нижнетреугольных матриц $T\text{Mat}(R, \infty)$ следующим образом:

$$F(f(t, \tau), g(t, \tau)) = \begin{pmatrix} [f_0(t)^k]_n & \lambda [f_0(t)^k g_0(t)]_n \\ \lambda [kf_0(t)^{k-1} f_1(t)]_n & [g_1(t) f_0(t)^k]_n \end{pmatrix}, \quad k, n = 0, 1, \dots$$

Здесь скаляры $[f_0(t)^k]_n$ определяются разложением $f_0(t)^k = \sum_{n \geq 0} [f_0(t)^k]_n t^n$.

ТЕОРЕМА 1. Отображение F является мономорфизмом полугрупп.

Доказательство. Вычислим $F(f(t, \tau))F(u(t, \tau), v(t, \tau))$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} [f_0(t)^k]_n & \lambda [f_0(t)^k g_0(t)]_n \\ \lambda [kf_0(t)^{k-1} f_1(t)]_n & [g_1(t) f_0(t)^k]_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_0(t)^m]_k & \lambda [u_0(t)^m v_0(t)]_k \\ \lambda [mu_0(t)^{m-1} u_1(t)]_k & [v_1(t) u_0(t)^m]_k \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} [u_0(t)^m]_k [f_0(t)^k]_n & \lambda \{ [u_0(t)^m v_0(t)]_k [f_0(t)^k]_n + [v_1(t) u_0(t)^m]_k [g_0(t) f_0(t)^k]_n \} \\ \lambda \{ [u_0(t)^m]_k [kf_0(t)^{k-1} f_1(t)]_n + [mu_0(t)^{m-1} u_1(t)]_k [g_1(t) f_0(t)^k]_n \} & [v_1(t) u_0(t)^m]_k [g_1(t) f_0(t)^k]_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Мы придерживаемся обычного соглашения о том, что если индекс встречается сверху и внизу, то по нему происходит суммирование. Из леммы 1 следует, что $F(u(f(t, \tau), g(t, \tau)), v(f(t, \tau), g(t, \tau)))$ имеет такой же вид. Мономорфность отображения F очевидна. Теорема доказана. \square

Следствие 2. 1) Ограничение отображения F на полугруппу $C(R^{1,1}, R^{1,1})$ дает матричное представление этой полугруппы:

$$F(f_0(t), \tau g_1(t)) = \begin{pmatrix} [f_0(t)^k]_n & 0 \\ 0 & [g_1(t)f_0(t)^k]_n \end{pmatrix}, \quad k, n = 0, 1, \dots$$

Поэтому отображение $\bar{F}(f_0(t), \tau g_1(t)) = [g_1(t)f_0(t)^k]_n$, $k, n = 0, 1, \dots$, дает хорошо известное из теневого анализа представление $F: C(R^{1,1}, R^{1,1}) \rightarrow T \text{Mat}(R, \infty)$, которое очевидно является точным.

2) Ограничение F на полугруппу $C(R^1, R^1)$ дает каноническое точное матричное представление этой полугруппы:

$$f_0(t) \rightarrow [f_0(t)^k]_n. \quad \square$$

Заметим, что все группы $SG(R^1)$, $SG(R^{1,1})$, $SG_\Delta(R^{1,1})$ являются бесконечномерными группами Ли и через любую точку этих групп проходит какая-то однопараметрическая подгруппа. Это следует из того факта, что суперматричное представление отождествляет эти группы с некоторыми подгруппами группы суперматриц, от которых определена функция \log , ввиду того, что эти суперматрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} A & \lambda B \\ \lambda C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

где A, D — нильпотентные матрицы, а B, C — нижнетреугольные матрицы. В оставшейся части параграфа мы опишем все однопараметрические подгруппы группы $G_\Delta(R^{1,1})$ и ее основных подгрупп.

Пусть φ_s — однопараметрическая подгруппа группы $G_\Delta(R^{1,1})$, т. е. $\varphi_0 = \text{id}$, $\varphi_{s_1+s_2} = \varphi_{s_2}(\varphi_{s_1})$. Положим $\varphi_s(t) = f_0(s, t) + \lambda \tau f_1(s, t)$, $\varphi_s(\tau) = \lambda g_0(s, t) + \tau g_1(s, t)$. Тогда условие $\varphi_{s_1+s_2} = \varphi_{s_2}(\varphi_{s_1})$ эквивалентно функциональным уравнениям

$$\text{I) } f_0(s_1+s_2, t) = f_0(s_1, f_0(s_2, t)),$$

$$\text{II) } f_1(s_1+s_2, t) = f_1(s_2, t) f_0'(s_1, f_0(s_2, t)) + g_1(s_2, t) f_1(s_1, f_0(s_2, t)),$$

$$\text{III) } g_0(s_1+s_2, t) = g_0(s_2, t) g_1(s_1, f_0(s_2, t)) + g_0(s_1, f_0(s_2, t)),$$

$$\text{IV) } g_1(s_1+s_2, t) = g_1(s_2, t) g_1(s_1, f_0(s_2, t)).$$

Направляющий вектор однопараметрической подгруппы φ_s задается рядами

$$v f_0 = a_0(t) = \left. \frac{\partial f_0(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{i \geq 0} a_{0,i} t^{i+1}, \quad v f_1 = a_1(t) = \left. \frac{\partial f_1(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{i \geq 1} a_{1,i} t^i,$$

$$v g_0 = b_0(t) = \left. \frac{\partial g_0(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{k \geq 1} b_{0,k} t^k, \quad v g_1 = b_1(t) = \left. \frac{\partial g_1(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = \sum_{l \geq 1} b_{1,l} t^l.$$

Касательное пространство к группе $G_\Delta(R^{1,1})$ в единице этой группы можно отождествить с линейным пространством $V_\Delta^{1,1}$ всех рядов $a_0(t)$, $a_1(t)$, $b_0(t)$, $b_1(t)$. Изучим сначала все однопараметрические подгруппы группы $G(R^1)$. Обозначим через \mathcal{E}^1 совокупность всех однопараметрических подгрупп группы $G(R^1)$. Пусть V^1 — касательное пространство в единице группы $G(R^1)$. Отображение $\exp^{-1}: \mathcal{E}^1 \rightarrow V^1$ является взаимно однозначным. Для построения обратного отображения $\exp: V^1 \rightarrow \mathcal{E}^1$ ис-

пользуется стандартный прием теории групп Ли. Из уравнения I) следует тождество

$$f(s_1, f(s_2, t)) = f(s_2, f(s_1, t)),$$

дифференцируя которое по s_2 и полагая затем $s_2=0$, $s_1=s$, получаем дифференциальное уравнение [27, 30]:

$$\frac{\partial f(s, t)}{\partial t} h(t) = h(f(s, t)), \quad (10)$$

где $h(t) = v\dot{f}_0$. Отображение \exp сопоставляет ряду $h(t) \in V^1$ решение уравнения (10) такое, что $f(s, 0) = 0$. Для более явного описания однопараметрических подгрупп (т. е. классификации решений функционального уравнения I)) воспользуемся тем, что на \mathcal{E}^1 и V^1 определено каноническое представление группы $SG(R^1)$, индуцированное внутренним сопряжением. Имеем

$$\gamma: SG(R^1) \times \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^1: \gamma(g(t), f(s, t)) = \bar{g}(f(s, g(t))),$$

где $\bar{g}(t)$ — обратный ряд к $g(t)$ в функциональном смысле, т. е. $g(\bar{g}(t)) = t$. Тогда

$$v(\bar{g}(f(s, g(t)))) = \frac{\partial}{\partial s} \bar{g}(f(s, g(t))) \Big|_{s=0} = \frac{(vf)(g(t))}{g'(t)}$$

или

$$v\gamma: SG(R^1) \times V^1 \rightarrow V^1: v\gamma(g(t), h(t)) = \frac{h(g(t))}{g'(t)}.$$

ЛЕММА 3. Для любого ряда $h(t) \in V^1$ определены $g(t) \in SG(R^1)$ и ряд $\hat{h}(t) = \frac{\alpha t^{n+1}}{1 + \beta t^n} \in V^1$ такие, что $h(t) = v\gamma(g(t), \hat{h}(t))$.

Доказательство. Имеем $h(t) = \sum_{i \geq 0} h_i t^{i+1}$. Пусть h_n — первый ненулевой коэффициент этого ряда. Тогда ряд $h(t)$ можно однозначно представить в виде $h(t) = h_n t^{n+1} / \psi(t)$, где $\psi(t) = 1 + \sum_{l \geq 0} \psi_l t^{l+1}$. Рассмотрим теперь ряд $g(t) = t + \sum_{i \geq 1} g_i t^{i+1}$ и заметим, что его можно однозначно записать в виде

$$g(t) = \begin{cases} tH(t)^{-1/n}, & n > 0; \\ t \exp(-H(t)), & n = 0, \end{cases}$$

где $H(t) = 1 + \sum_{i \geq 1} H_i t^i$, $n > 0$; $H(t) = \sum_{i \geq 1} H_i t^i$. Тогда

$$g'(t) = \begin{cases} H(t)^{-1/n} - \frac{1}{n} t H(t)^{-(n+1)/n} H'(t), & n > 0; \\ \exp(-H(t)) (1 - t H'(t)), & n = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд $\hat{h}(t)$ вида $\alpha t^{n+1} / (1 + \beta t^n)$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta \in R$. Тогда для $n > 0$

$$\hat{h}(g(t)) = \alpha t^{n+1} H(t)^{-(n+1)/n} / (1 + \beta t^n H(t)^{-1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{h}(g(t))}{g'(t)} &= \frac{\alpha t^{n+1} H(t)^{-(n+1)/n}}{(1 + \beta t^n H(t)^{-1}) \left(H(t)^{-1/n} - \frac{1}{n} t H(t)^{-(n+1)/n} H'(t) \right)} = \\ &= \frac{\alpha t^{n+1}}{H(t) - \frac{1}{n} t H'(t) + \beta \left(t^n - \frac{1}{n} H'(t) H^{-1}(t) t^{n+1} \right)}. \end{aligned}$$

Для $n=0$ $h(g(t)) = ct \exp(-H(t))$ и, следовательно,

$$\frac{\hat{h}(g(t))}{g'(t)} = \frac{ct}{1-tH'(t)},$$

где $c = \alpha/(1+\beta)$. Из равенства $h(t) = \hat{h}(g(t))/g'(t)$ для $n > 0$ получаем формулу

$$\frac{1}{h_n} \psi(t) = \frac{1}{\alpha} \left[H(t) - \frac{1}{n} tH'(t) + \beta \left(t^n - \frac{1}{n} t^{n+1} H'(t) H^{-1}(t) \right) \right],$$

а для $n=0$ формулу

$$\frac{1}{h_0} \psi(t) = \frac{1}{c} (1 - tH'(t)),$$

которые позволяют по ряду $h(t)$ определить ряд $g(t)$. Для $n > 0$ положим $\alpha = h_n$. Далее,

$$H(t) - \frac{1}{n} tH'(t) = 1 + \sum_{j \geq 1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) h_j t^j.$$

Следовательно, $H_l = \psi_l / (1 - l/n)$ для $l < n$; $\beta = \psi_n$ и

$$H_l = \frac{1}{1 - l/n} \left(\psi_l + \frac{\beta}{n} [H'(t)H(t)^{-1}]_{l-n-1} \right)$$

для $l \geq n+1$. Заметим, что коэффициент H_n может быть произвольным. Для $n=0$ положим $c = h_0$, следовательно, $H_l = -\frac{1}{l} \psi_l$. Лемма доказана. \square

Следствие 3. Любая однопараметрическая подгруппа $f(s, t)$ группы $G(R^1)$ сопряжена некоторой подгруппе $f(s, t; \alpha, \beta, n)$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta \in R$, $n \geq 0$, с направляющим вектором $h(t; \alpha, \beta, n) = \alpha t^{n+1} / (1 + \beta t^n)$. \square

Таким образом, для описания однопараметрических подгрупп группы $G(R^1)$ осталось описать однопараметрические подгруппы, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial f(s, t)}{\partial t} = \frac{f(s, t)}{t}, \quad f(s, 0) = 0,$$

т. е. $f(s, t) = \exp(s)t$, либо уравнениям (для $n > 0$)

$$\frac{\partial f(s, t)}{\partial t} \left(\frac{\alpha t^{n+1}}{1 + \beta t^n} \right) = \frac{\alpha f(s, t)^{n+1}}{1 + \beta f(s, t)^n}, \quad f(s, 0) = 0, \quad (11)$$

Имеем

$$(f(s, t)^{-n-1} + \beta f(s, t)^{-1}) d^l f(s, t) = (t^{-n-1} + \beta t^{-1}) dt,$$

поэтому

$$\beta \log \left(\frac{f(s, t)}{t} \right) - c(s) = \frac{1}{n} (t^{-n} - f(s, t)^{-n}).$$

Так как $f(s, t) = t + \sum_{i > 1} f_i(s) t^{i+1}$, то $\log(f(s, t)/t)$ является рядом по s, t .

Следовательно, существует ряд $\theta(s, t)$ такой, что

$$t^{-n} - f^{-n}(s, t) = \theta(s, t). \quad (12)$$

Тогда

$$f(s, t) = (t^{-n} - \theta(s, t))^{-1/n} = t(1 - \theta(s, t)t^n)^{-1/n} \quad (13)$$

$$-\frac{\beta}{n} \log(1 - \theta(s, t)t^n) - c(s) = \frac{1}{n} \theta(s, t). \quad (14)$$

Из условия $f(0, t) = t$ следует условие $\theta(0, t) = 0$. Применим к уравнению (12) оператор $\frac{\partial}{\partial s}(\cdot)|_{t=0}$, учитывая (11) и то, что $f(s, 0) = 0$, $f(s, t)/t|_{t=0} = 1$, получаем условие

$$\frac{\partial}{\partial s} \theta(s, t)|_{t=0} = \alpha n. \quad (15)$$

Применим к уравнению (14) оператор $\frac{\partial}{\partial s}(\cdot)|_{t=0}$, учитывая (15), получим уравнение $c'(s) = -\alpha$. Положим в уравнении (14) $s=0$, так как $\theta(0, t) = 0$, то $c(0) = 0$ и потому $c(s) = -\alpha s$. Следовательно,

$$s = \frac{1}{\alpha n} (\theta(s, t) + \beta \log(1 - \theta(s, t)^n)),$$

т. е. $\frac{1}{\alpha n} \theta(s, t)$ как ряд по s с коэффициентами (рядами от t) является функционально обратным (по s) к ряду $s + \frac{\beta}{\alpha n} \log(1 - \alpha n s t^n)$. Таким образом, мы видим, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Любая однопараметрическая подгруппа группы $G(R^1)$ сопряжена e^{st} , либо некоторой подгруппе вида*

$$f(s, t; \alpha, \beta, n) = t(1 - \alpha n \Phi(s, t) t^n)^{-\frac{1}{n}},$$

где $\Phi(s, t)$ — ряд, функционально обратный (по s) к ряду

$$s + \frac{\beta}{\alpha n} \log(1 - \alpha n s t^n). \quad \square$$

Вернемся к описанию однопараметрических подгрупп группы $G_\Lambda(R^{1,1})$. Решение уравнения I) определяется однозначно рядом $a_0(t)$ (теорема 2). Фиксируем это решение. Дифференцируя IV) по s_1 при $s_1 = 0$, $s_2 = s$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial s} g_1(s, t) = g_1(s, t) b_1(f_0(s, t)).$$

Так как $g_1(0, t) = 1$, то

$$g_1(s, t) = \exp\left(\int_0^s b_1(f_0(s, t)) ds\right).$$

С л е д с т в и е 4. *Положим*

$$g_1(s, t, m) = \exp\left(\int_0^s f_0(s, t)^m ds\right).$$

Тогда для ряда $b_1(t) = \sum_{l \geq 1} b_{1,l} t^l$ имеем

$$g_1(s, t) = \prod_{l \geq 1} g_1(s, t, l)^{b_{1,l}}. \quad \square$$

Согласно теореме 2, группу $f_0(s, t)$ можно привести сопряжением к группе $f_0(s, t; \alpha, \beta, n)$ с направляющим вектором $a_0(t, \alpha, \beta, n) = \alpha t^{n+1} / (1 + \beta t^n)$. Таким образом, для полного описания решений уравнения IV) осталось вычислить ряды $g_1(s, t; m, \alpha, \beta, n)$ для этих групп. Имеем ($n > 0$)

$$f^n ds = \frac{f^n}{(\partial f / \partial s)} \partial_s f = \frac{f^n}{a(f)} \partial_s f = \frac{f^n (1 + \beta f^n)}{\alpha f^{n+1}} \partial_s f,$$

где мы положили $f=f_0(s, t; \alpha, \beta, n)$, $a(t)=a_0(t, \alpha, \beta, n)$. Следовательно, если $m \neq n$, то

$$\int_0^s f^m ds = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{m-n} f^{m-n} + \frac{\beta}{m} f^m - \frac{1}{m-n} t^{m-n} - \frac{\beta}{m} t^m \right).$$

Для $m > n$ получаем ответ:

$$g_1(s, t; m, \alpha, \beta, n) = \exp \left(\frac{1}{\alpha(m-n)} (f^{m-n} - t^{m-n}) + \frac{\beta}{\alpha m} (f^m - t^m) \right).$$

Для $m < n$, используя формулу (13), покажем, что $f^{m-n} - t^{m-n}$ является рядом от t, s :

$$f^{m-n} - t^{m-n} = \frac{(1 - \theta(s, t) t^n)^{(n-m)/m} - 1}{t^{n-m}},$$

откуда и следует наше утверждение. Пусть теперь $m = n$. Тогда

$$\int_0^s f^n ds = \frac{1}{\alpha} \log \frac{f}{t} + \frac{\beta}{\alpha n} (f^n - t^n),$$

и поэтому

$$g_1(s, t) = \left(\frac{f}{t} \right)^{1/\alpha} \exp \left(\frac{\beta}{\alpha n} (f^n - t^n) \right).$$

Для $n=0$ имеем

$$g_1(s, t; l) = \exp \left(\frac{t^l}{cl} \exp(c ls) \right).$$

ТЕОРЕМА 3. Любое решение уравнения IV) сопряжением по переменной t сводится к произведению рядов

$$g_1(s, t; l) = \exp \left(\frac{t^l}{cl} \exp(c ls) \right);$$

либо к произведению рядов

$$g_1(s, t; m, \alpha, \beta, n) = \exp \left(\frac{1}{\alpha(m-n)} (f^{m-n} - t^{m-n}) + \frac{\beta}{\alpha m} (f^m - t^m) \right), \quad m \neq n;$$

$$g_1(s, t; n, \alpha, \beta, n) = \left(\frac{f}{t} \right)^{1/\alpha} \exp \left(\frac{\beta}{\alpha n} (f^n - t^n) \right); \quad f = f(s, t; \alpha, \beta, n). \quad \square$$

Следствие 5. Если $b_1(t) = ca_0(t)/t$, то для любой группы $f_0(s, t)$ имеет место формула $g_1(s, t) = (f_0(s, t)/t)^c$.

Доказательство. Имеем

$$b_1(f_0(s, t)) = ca_0(f_0(s, t))/f_0(s, t) =$$

$$= c \left(\frac{\partial}{\partial s} f_0(s, t) \right) / f_0(s, t) = c \frac{\partial}{\partial s} \log(f_0(s, t)/t),$$

поэтому

$$\int_0^s b_1(f_0(s, t)) ds = c \log(f_0(s, t)/t). \quad \square$$

Рассмотрим теперь уравнение III). Положим

$$\gamma_i(s, t) = b_i(f_0(s, t)), \quad i=0, 1.$$

Дифференцируя III) по s_1 и полагая $s_1=0, s_2=s$, получаем

$$\frac{\partial g_0(s, t)}{\partial s} = g_0(s, t) \gamma_1(s, t) + \gamma_0(s, t).$$

Заметив, что $g_1(s, t) = \int_0^s \gamma_1(s, t) ds$ является интегрирующим множителем этого уравнения, приходим к решению

$$g_0(s, t) = g_1(s, t) \int_0^s (\gamma_0(s, t)/g_1(s, t)) ds.$$

Положим теперь $\alpha_1(s, t) = g_1(s, t)a_1(f_0(s, t))$, $\alpha_0(s, t) = a_0'(f_0(s, t))$. Дифференцируя II) по s_1 и полагая $s_1=0$, $s_2=s$, получаем

$$\frac{\partial f_1(s, t)}{\partial s} = \alpha_0(s, t)f_1(s, t) + \alpha_1(s, t).$$

Так как

$$\alpha_0'(f_0(s, t)) = \frac{\partial}{\partial s} \log(a_0(f_0(s, t))),$$

то интегрирующий множитель равен $\mu(s, t) = a_0(f_0(s, t))/a_0(t)$ и решение имеет вид

$$f_1(s, t) = \int_0^s g_1(u, t) a_1(f_0(u, t)) \frac{a_0(f_0(s, t))}{a_0(f_0(u, t))} du.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(a_0(t), a_1(t), b_0(t), b_1(t))$ — направляющий вектор однопараметрической подгруппы

$$(f_0(s, t) + \lambda \tau f_1(s, t), \lambda g_0(s, t) + \tau g_1(s, t)).$$

Тогда

$$g_1(s, t) = \exp\left(\int_0^s b_1(f_0(u, t)) du\right), \quad g_0(s, t) = g_1(s, t) \int_0^s (b_0(f_0(u, t))/g_1(u, t)) du,$$

$$f_1(s, t) = \int_0^s (g_1(u, t) a_1(f_0(u, t)) a_0(f_0(s, t))/a_0(f_0(u, t))) du. \quad \square$$

Пример 1. Направляющему вектору $(a_0(t), a_0(t)/t, a_0(t), a_0(t)/t)$ отвечает однопараметрическая подгруппа

$$\varphi_s(t) = \frac{f_0(s, t)}{t} \left(t + \lambda \tau s \frac{\partial}{\partial s} \log\left(\frac{f_0(s, t)}{t}\right) \right),$$

$$\varphi_s(\tau) = \frac{f_0(s, t)}{t} (\lambda s t + \tau).$$

Пример 2. Направляющему вектору $(0, a_1(t), b_0(t), b_1(t))$ отвечает однопараметрическая подгруппа, у которой

$$f_0(s, t) = t, \quad f_1(s, t) = a_1(t) (\exp(s b_1(t)) - 1)/b_1(t),$$

$$g_0(s, t) = b_0(t) (\exp(s b_1(t)) - 1)/b_1(t), \quad g_1(s, t) = \exp(s b_1(t)). \quad \square$$

Рассмотрим общее решение уравнения

III)' $g_0(s_1 + s_2, t) = g_0(s_2, t) g_1(s_1, t) + g_0(s_1, t)$, т. е. III) — его уравнения при $a_0(t) = 0$ без предположения, что $g_1(s, t)$ удовлетворяет уравнению IV). Аналогично предыдущему можно доказать, что имеет место

ЛЕММА 4. Общее решение уравнения III)' имеет вид

$$g_0(s, t) = b_0(t) (\exp(s b_1(t)) - 1)/b_1(t), \quad g_1(s, t) = \exp(s b_1(t)). \quad \square$$

§ 2. Однородные коалгебры

В этом параграфе мы рассмотрим некоторый класс коалгебр на суперпрямой $R_{\Lambda}^{1,1}$. Пусть $(\mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1}), \delta)$ является коалгеброй, где

$$\delta: \mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1}) \rightarrow \mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1}) \hat{\otimes}_{\Lambda} \mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1})$$

— четное Λ -линейное отображение (определение коалгебры на суперпространствах см. в [1]). Будем всегда считать, что аугментация $\varepsilon: \mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1}) \rightarrow \Lambda$ является двусторонней коединицей коалгебры $(\mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1}), \delta)$.

Определение 3. Коалгебру $(\mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1}), \delta)$ будем называть *однородной*, если коумножение сохраняет градуировки, а градуировка вводится формулой $\deg x = 2, \deg \xi = 1, \deg \lambda = -1, \deg 1 = 0$.

Аналогично определяется понятие однородной коалгебры на прямой R^1 , суперпрямой $R^{1,1}$ и на Λ -алгебре $\Lambda[\xi]$, где ξ — нечетная переменная, $\xi^2 = 0$. Ясно, что на последней алгебре коумножение любой однородной коалгебры имеет вид

$$\delta\xi = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi + a\lambda\xi \otimes \xi, \quad a \in R. \quad (16)$$

Пусть x, ξ — соответственно четная и нечетная образующие Λ -алгебры $\mathcal{O}(R_{\Lambda}^{1,1})$. В этой работе мы ограничимся следующим простым классом однородных коалгебр на суперпрямой $R_{\Lambda}^{1,1}$, для которого

$$\delta x^n \xi^e = \delta_1 x^n \otimes \delta_2 \xi^e,$$

где δ_1 — однородное коумножение на прямой, а δ_2 — однородное коумножение на $\Lambda[\xi]$ вида (16). Таким образом, нам нужно выяснить строение однородных коалгебр на прямой. Мы выясним строение однородных коммутативных коалгебр на прямой, удовлетворяющих условию невырожденности (см. ниже).

Итак, пусть на кольце $R[[x]]$ задана структура коммутативной коалгебры с коумножением

$$\delta_x^y: R[[x]] \rightarrow R[[x]] \hat{\otimes}_R R[[x]] \cong R[[x, y]],$$

причем 0 — двусторонняя коединица коалгебры, т. е. $\delta_x^y f(x) |_{y=0} = f(x)$, $\delta_x^y f(x) |_{x=0} = f(y)$. Ясно, что коалгебра $(R[[x]], \delta)$ однородна, если коумножение переводит мономы x^n в однородные полиномы от x, y степени n .

Рассмотрим первый инвариантный оператор d_1 (*генератор*) на этой коалгебре [3, 19]. По определению $d_1 f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta_x^y f(x)) \right) \Big|_{y=0}$. Из однородности коалгебры следует, что

$$d_1 x^n = \mu_n x^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad \mu_n \in R. \quad (17)$$

Заметим, что $\mu_1 = 1$.

Определение 4. Однородная коалгебра $(R[[x]], \delta)$ называется *невырожденной*, если в соответствующей ей последовательности $\mu = (1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots)$ все μ_i отличны от нуля. Такие последовательности μ также будем называть *невырожденными*.

ТЕОРЕМА 5. 1) (Ср. [14, 15, 16, 28].) Пусть δ_x^y — невырожденная однородная коалгебра на прямой. Положим $c_k = \prod_{i=1}^k \mu_i, c_0 = 1$. Тогда для любого n

$$\delta_x^y x^n = \sum_{k=0}^n \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} x^k y^{n-k}. \quad (18)$$

Обратно, если $\mu = (1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots)$ — произвольная невырожденная последовательность, то формула (18) задает на прямой структуру коммутативной, однородной невырожденной коалгебры.

2) (Ср. [25].) Канонические инвариантные операторы $d_k, k \geq 1$ [3], коалгебры $(R[[x]], \delta)$ равны d_1^k/c_k , в частности, d_1 — генератор этой коалгебры.

3) (Ср. [3, 19].) Задачи

$$\begin{cases} d_1^x u(x, y) = d_1^y u(x, y), & \begin{cases} d_1 b(x) = v(b(x), x), \\ b(0) = b_0 \end{cases} \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

в кольцах формальных рядов имеют единственные решения, причем $u(x, y) = \delta_x^y \varphi(x)$.

4) Единственное решение задачи $d_1 b(x) = b(x), b(0) = 1$, в кольце $R[[x]]$ имеет вид $b(x) = \sum_{n \geq 0} x^n / c_n$, т. е. $b(x)$ — собственная функция генератора d_1 с собственным значением, равным единице.

5) Задача

$$\begin{cases} d_1^x R(x, t) = f(t) R(x, t), \\ R(0, t) = \rho(t) \end{cases}$$

в кольце $R((t))[[x]]$ имеет единственное решение $R(x, t) = \rho(t) b(xf(t))$, где $R((t))$ означает кольцо формальных рядов Лорана, $\rho(t), f(t) \in R((t))$.

6) (См. [14, 15, 26, 25, 28].) $\delta_x^y = b(yd_1^x)$.

7) $\delta_x^y b(xf(t)) = b(xf(t)) b(yf(t))$ для любого ряда Лорана $f(t) \in R((t))$.

8) (Ср. [14, 15].) $g(d_1^x) b(xf(t)) = g(f(t)) b(xf(t)), g(t) \in R[[t]]$.

9) Пусть

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \sum_{n \geq 0} p_n(x) t^n = b(xf(t)), \\ R(x, t) &= \sum_{n \geq 0} r_n(x) t^n = g(t) b(xf(t)), \end{aligned}$$

где $g(t), f(t) \in R[[t]]$ и $g(0) \neq 0, f(0) = 0, f'(0) \neq 0$. Тогда определены ряды $\bar{g}(t), \bar{f}(t)$ такие, что $\bar{g}(t)g(t) = 1, f(\bar{f}(t)) = t$ и

$$\delta_x^y = \sum_{n \geq 0} r_n(x) (\bar{g}(\bar{f}(d_1^y))) \bar{f}(d_1^y)^n.$$

В частности, имеет место формула разложения [14, 15, 26, 28]

$$p(x) = \sum_{n \geq 0} r_n(x) (\bar{g}(\bar{f}(d_1^y))) \bar{f}(d_1^y)^n \rho(y)|_{y=0}$$

для любого полинома $p(x)$. Кроме того, имеют место формулы

$$L_1 r_n(x) = p_n(x), \quad L_2 p_n(x) = r_n(x), \quad L_3 r_n(x) = r_{n-1}(x),$$

где $L_1 = \bar{g}(\bar{f}(d_1)), L_2 = g(\bar{f}(d_1)), L_3 = \bar{f}(d_1)$.

Доказательство. В [3] доказана формула

$$d_k d_1 = \sum_{n \geq 1} \langle d_1 x^n, x_k \rangle d_k.$$

Используя формулу (17), получим $d_k d_1 = \mu_{k+1} d_{k+1}$, откуда $d_k = d_1^k / c_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \delta_x^y x^n &= \sum_{k=0}^n y^k d_k x^n = \sum_{k=0}^n y^k \frac{d_1^k}{c_k} x^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\mu_n \cdots \mu_{n+1-k}}{c_k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} x^{n-k} y^k. \end{aligned}$$

Сразу проверяется, что формула (18) задает на прямой структуру однородной коммутативной коалгебры, где число 0 является двусторонней коединицей. Из той же формулы следует, что $d_k x^n = \frac{c_n}{c_k c_{n-k}} x^{n-k}$, отку-

да вытекает п. 2) теоремы; п. 3) легко следует из условия однородности и невырожденности генератора; п. 4) следует из формулы $d_1 x^n / c_n = x^{n-1} / c_{n-1}$. Докажем п. 5). Будем искать решение в виде

$$R(x, t) = \sum_{n \geq 0} r_n(t) x^n, \quad r_n(t) \in R((t)), \quad r_0(t) = \rho(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} d_1^x R(x, t) &= \sum_{n \geq 1} \mu_n r_n(t) x^{n-1}, \\ &\parallel \\ f(t) R(x, t) &= f(t) \sum_{k \geq 0} r_k(t) x^k. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при x^{n-1} , получим

$$\mu_n r_n(t) = f(t) r_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

Отсюда $r_n(t) = \rho(t) f(t)^n / c_n$. Поэтому

$$R(x, t) = \sum_{n \geq 0} r_n(t) x^n = \sum_{n \geq 0} \rho(t) f(t)^n x^n / c_n = \rho(t) b(xf(t)).$$

Ясно, что это действительно решение задачи п. 5). Для любой коалгебры $\delta_x^y = \sum_{k \geq 0} y^k d_k^x$. Из этой формулы и из п. 2) получаем доказательство п. 6):

$$\delta_x^y = \sum_{k \geq 0} y^k d_k^x = \sum_{k \geq 0} y^k d_1^k / c_k = b(yd_1^x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta_x^y b(xf(t)) &= \delta_x^y \sum_{n \geq 0} x^n f(t)^n / c_n = \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{x^k f(t)^k}{c_k} \frac{y^{n-k} f(t)^{n-k}}{c_{n-k}} = b(xf(t)) b(yf(t)), \end{aligned}$$

что доказывает п. 7). Пункт 8) следует из формулы $d_1^n b(xf(t)) = f(t)^n b(xf(t))$. Доказательство п. 9) следует из тождеств

$$b(xt) = \bar{g}(\bar{f}(t)) R(x, \bar{f}(t)), \quad \delta_x^y|_{y=0} = \text{id}_x.$$

Теорема полностью доказана. \square

Оператор d_1 как R — линейный оператор из $R[[x]]$ в $R[[x]]$ в самом общем случае можно записать в виде

$$d_1 = \sum_{k \geq 1} a_k x^{k-1} D^k, \quad D = \frac{d}{dx},$$

коэффициенты a_k связаны с последовательностью μ системой линейных уравнений с нижнетреугольной матрицей:

$$\sum_{k=1}^n a_k(n+1-k)_{k-1} = \mu_n/n, \quad n \geq 1,$$

где $(m)_k = \Gamma(m+k)/\Gamma(m) = m(m+1)\dots(m+k-1)$ — растущий факториал.

Пример 1. q -теневой анализ [15] задается последовательностью $\mu_n = (1-q^n)/(1-q)$, $q \neq 1$. Легко проверить, что

$$d_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{(q^{-1})^{k-1}}{k!} x^{k-1} D^k.$$

Пример 2. Положим

$$d_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} D^k.$$

Тогда

$$d_1 x^n = n \left(1 + \lambda(n-1) + \dots + \lambda^l \binom{n-1}{l} + \dots + \lambda^{n-1} \right) = n(1+\lambda)^{n-1} x^{n-1},$$

т. е. $\mu_n = n(1+\lambda)^{n-1}$, $c_n = n!(1+\lambda)^{n(n-1)/2}$. По формуле (18) коумножение имеет вид

$$\delta_x^y x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+\lambda)^{k(n-k)} x^k y^{n-k}. \quad \square$$

Пусть $\mathcal{D} = xD$, $D = \frac{d}{dx}$. Тогда [7, с. 185] гипергеометрический ряд $u = {}_pF_q \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix}; x \right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D(\mathcal{D} + \beta_1 - 1) \dots (\mathcal{D} + \beta_q - 1) u = (\mathcal{D} + \alpha_1) \dots (\mathcal{D} + \alpha_p) u,$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q)$ такие числа, что $\alpha_l \neq -n$, $1 \leq l \leq p$, $\beta_i \neq -n$, $1 \leq i \leq q$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Имеем $D(\mathcal{D} + \beta_i - 1) = (\mathcal{D} + \beta_i)D$. Положим

$$P(\mathcal{D}) = \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{\alpha_1}\right) \dots \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{\alpha_p}\right), \quad Q(\mathcal{D}) = \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{\beta_1}\right) \dots \left(1 + \frac{\mathcal{D}}{\beta_q}\right).$$

Тогда ряд u удовлетворяет уравнению

$$\beta_1 \dots \beta_q P(\mathcal{D}) D u = \alpha_1 \dots \alpha_p Q(\mathcal{D}) u.$$

Имеем $\left(1 + \frac{\mathcal{D}}{\beta_i}\right) x^n = \left(1 + \frac{n}{\beta_i}\right) x^n$. Следовательно,

$$Q(\mathcal{D}) x^n = \left(1 + \frac{n}{\beta_1}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{\beta_q}\right) x^n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

и поэтому существует оператор $Q_1 = \sum_{i \geq 0} b_i x^i D^i$ такой, что $Q_1 Q = Q Q_1 = 1$ — тождественный оператор. Оператор Q_1 однозначно определяется условием

$$Q_1 x^n = \left(1 + \frac{n}{\beta_1}\right)^{-1} \dots \left(1 + \frac{n}{\beta_q}\right)^{-1} x^n.$$

Следовательно, определен оператор $d_1 = Q_1 P(\mathcal{D}) D$ такой, что

$$\beta_1 \dots \beta_q d_1^x u = \alpha_1 \dots \alpha_p u. \quad (19)$$

Заменим x на $\frac{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\beta_1 \dots \beta_q} x$. Из (19) следует, что $d_1 u = u$, т. е. гипергеометрический ряд

$${}_pF_q \left(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \frac{\beta_1 \dots \beta_q}{\alpha_1 \dots \alpha_p} x \right)$$

является собственной функцией генератора невырожденной однородной коалгебры, для которой

$$c_n = \frac{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n}{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n} \left(\frac{\alpha_1 \dots \alpha_p}{\beta_1 \dots \beta_q} \right)^n n!$$

Следствие 6. Гипергеометрический ряд является собственной функцией невырожденной однородной коалгебры (т. е. собственной функцией генератора с собственным значением единица) тогда и только тогда, когда существуют полиномы $P(t)$, $Q(t)$ такие, что эти полиномы не имеют целых неотрицательных корней и для любого n

$$d_1 x^n = n \frac{P(n-1)}{Q(n-1)} x^{n-1}. \quad (20)$$

Пример. Собственная функция оператора $d_1 = (1 + \alpha x D) D$, $\alpha \neq 0$, с собственным значением единица имеет вид $b(x) = {}_0F_1 \left(\frac{1}{\alpha}; \frac{x}{\alpha} \right)$. Имеем также [8]:

$${}_0F_1 \left(\frac{1}{\alpha}; \frac{x}{\alpha} \right) = \Gamma \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(-\frac{x}{\alpha} \right)^{1/2-1/(2\alpha)} J_{1/\alpha-1} \left(2 \sqrt{-\frac{x}{\alpha}} \right),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода. \square

Определение 5. Однородная коалгебра на прямой называется гипергеометрической, если существует рациональная функция $P(t)/Q(t)$ такая, что $d_1 x^n = n \frac{P(n-1)}{Q(n-1)} x^{n-1}$.

Пример 1. Рассмотрим производящую функцию для полиномов Генбауэра [8, гл. 10]:

$$P(x, t) = \sum_{n \geq 0} C_n^\lambda(x) t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-\lambda}.$$

Тогда

$$P(x, t) = (1 + t^2)^{-\lambda} \left(1 - \frac{2xt}{1 + t^2} \right)^{-\lambda} = g(t) b(xf(t)),$$

где $g(t) = (1 + t^2)^{-\lambda}$, $b(x) = (1 - x/\lambda)^{-\lambda}$, $f(t) = 2xt/(1 + t^2)$. Имеем

$$\left(1 - \frac{x}{\lambda} \right)^{-\lambda} = {}_1F_0 \left(\lambda; \frac{x}{\lambda} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda)_n}{\lambda^n n!} x^n.$$

Следовательно, $\mu_n = \lambda n / (\lambda + n - 1)$ и генератор коалгебры удовлетворяет условию $\left(\frac{1}{\lambda} x D + 1 \right) d_1 = D$. Так как

$$d_1 P(x, t) = \frac{2\lambda t}{1 + t^2} P(x, t) = \left(2\lambda \sum_{k \geq 0} (-1)^k t^{2k+1} \right) P(x, t),$$

то

$$d_1 C_n^\lambda(x) = 2\lambda \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^m C_{n-1-2m}^\lambda(x),$$

Поэтому

$$DC_n^\lambda(x) = (2xD + 2\lambda) \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^m C_{n-1-2m}^\lambda(x).$$

Из условия $(\frac{1}{\lambda}xD + 1)d_1 = D$ легко вычислить генератор d_1 :

$$d_1 = \sum_{k \geq 0} (-1)^{k-1} \frac{\lambda^k}{(\lambda)_k} x^{k-1} D^k. \quad (21)$$

Ясно, что

$$\delta_x^y x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(\lambda)_k (\lambda)_{n-k}}{(\lambda)_n} x^k y^{n-k}. \quad (22)$$

Так как для полиномов Лежандра $P_n(x)$ и Чебышева $U_n(x)$ имеем $P_n(x) = C_n^{1/2}(x)$, $U_n(x) = C_n^1(x)$, то для этих случаев формулы (21), (22) примут вид

$$d_1 = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{(2k-1)!!} D^k, \quad \delta_x^y x^n = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{\binom{2n}{2k}} x^k y^{n-k}, \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

$$d_1 = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k!} D^k, \quad \delta_x^y x^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}, \quad \lambda = 1.$$

Заметим, что в последнем случае оператор d_1 можно записать в виде $1/x$, нужно лишь помнить, что $d_1(1) = 0$, т. е. d_1 — регуляризация оператора деления на x : $d_1 p(x) = \frac{p(x) - p(0)}{x}$. Подробный разбор этого примера имеется в [14], там же рассмотрены полиномы Якоби.

Пример 2. Циклические m -значные формальные группы [3, 5, 19, 25], для которых

$$\delta_x^y f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f((\sqrt[m]{x} + \varepsilon_i \sqrt[m]{y})^m),$$

$$\delta_x^y x^n = \sum_{k=0}^n \binom{mn}{mk} x^k y^{n-k}, \quad c_n = (mn)! / (m!)^n,$$

$$b(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \exp(\varepsilon_i \sqrt[m]{m!x}) = {}_0F_{m-1} \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}; \frac{(m-1)!}{m^{m-1}} x \right),$$

где $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}$ — полный набор корней степени m из единицы. В частности, при $m=1$ получаем формальную группу $(x+y)$, $c_n = n!$, $b(x) = \exp(x)$, а при $m=2$ — двузначную циклическую формальную группу [3], для которой $c_n = (2n)!/2^n$, $b(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{2x}) = {}_0F_1(1/2; x/2)$. Явный вид генератора циклической m -значной формальной группы указан в [19]. \square

Пример 3. Действие группы вращений $O(m)$ на R^m индуцирует сдвиг Дельсарта [10]:

$$T_{v_1}^{v_2} f(v_1) = \int_{O(m)} f(v_1 + Av_2) dA, \quad (23)$$

где dA — нормированная мера Хаара на группе $O(m)$. Подкольцом инвариантов этого действия \mathcal{D} в кольце функций на R^m являются функции

вида $f(x)$, $x = |\omega|^2 = \omega_1^2 + \dots + \omega_m^2$, где ω_i — координаты в R^m . Ограничение сдвига Дельсарта на подкольцо \mathcal{D} превращает последнее в коммутативную коалгебру. Если в качестве кольца функций на R^m взять кольцо формальных рядов, то \mathcal{D} изоморфно кольцу формальных рядов $R[[x]]$ и ограничение сдвига Дельсарта на это подкольцо превращает последнее в однородную коммутативную коалгебру. Положим $x = |v_1|^2$, $y = |v_2|^2$. Имеем

$$\delta_x^y x^n = T_{v_1}^{v_2} |v_1|^{2n} = \int_{O(m)} (v_1 + Av_2)^{2n} dA.$$

Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Ввиду инвариантности меры Хаара, (24) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta_x^y x^n &= \int_{S^{m-1}} |\sqrt{x} e_1 + \sqrt{y} a|^{2n} da = \int_{S^{m-1}} (x + y + 2xy \langle e_1, a \rangle)^n da = \\ &= \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} (x + y)^{n-k} (xy)^{k/2} \int_{S^{m-1}} \langle e_1, a \rangle^k da, \end{aligned}$$

где da — индуцированная мера на сфере S^{m-1} . Заметим, что если k нечетное, то $\langle e_1, a \rangle^k$ — нечетная функция на сфере, и поэтому $\int_{S^{m-1}} \langle e_1, a \rangle^k da = 0$. Для $k = 2l$ имеет место хорошо известная формула [20]:

$$\int_{S^{m-1}} \langle e_1, a \rangle^{2l} da = C \frac{(2\pi)^{m-1/2} \Gamma(l + 1/2)}{\Gamma(l + m/2)},$$

где константа C находится из условия

$$\int_{S^{m-1}} da = C \frac{(2\pi)^{m-1/2} \Gamma(1/2)}{\Gamma(m/2)} = 1.$$

Таким образом,

$$\int_{S^{m-1}} \langle e_1, a \rangle^{2l} da = \frac{\Gamma(m/2) \Gamma(l + 1/2)}{\Gamma(1/2) \Gamma(l + m/2)}.$$

Итак, для $l \geq 1$

$$\alpha_{2l} = \int_{S^{m-1}} \langle e_1, a \rangle^{2l} da = \frac{1 \cdot 3 \dots (2l - 1)}{m(m+2) \dots (m+2l-2)}$$

и $\alpha_0 = 1$, а $\alpha_2 = 1/m$. Следовательно,

$$\delta_x^y x^n = \sum_{l=0}^{[n/2]} \binom{n}{2l} 4^l \alpha_{2l} x^l y^l (x + y)^{n-2l}.$$

Имеем

$$d_1 x^n = \left(n + \binom{n}{2} \frac{4}{m} \right) x^{n-1} = n \left(1 + \frac{2n-2}{m} \right) x^{n-1} = \left(1 + \frac{2}{m} xD \right) D x^n.$$

В частности, при $m=1$ получаем двузначную циклическую формальную группу с генератором $d_1 = D + 2xD^2$.

Следствие 7. Имеет место формула

$$\int_{S^{m-1}} {}_0F_1 \left(\frac{m}{2}; \frac{m}{2} \left(x + 2\sqrt{xy} \langle e_1, a \rangle + y \right) \right) da = {}_0F_1 \left(\frac{m}{2}; \frac{mx}{2} \right) {}_0F_1 \left(\frac{m}{2}, \frac{my}{2} \right).$$

Доказательство получается из предыдущих утверждений с использованием теоремы 5 и следствия 6. \square

Рассмотрим в R^m оператор Лапласа $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial \omega_i^2}$. Ограничение Δ на радиальные функции $f(|\omega|)$ имеет вид

$$\Delta f(|\omega|) = \left(D_{|\omega|}^2 + \frac{m-1}{|\omega|} D_{|\omega|} \right) f(|\omega|).$$

Следовательно, $\Delta x^n = \Delta |\omega|^{2n} = 2n(2n+m-2)x^{n-1}$. Получаем, что

$$\Delta x^n = 2md_1 x^n = (2m+4xD)D.$$

Определим операторы π, π^* по формуле

$$\langle \pi \Delta, x^n \rangle = \langle \Delta, \pi^* x^n \rangle = \Delta |\omega|^{2n}.$$

Тогда имеет место формула $\pi \Delta = 2md_1$, т. е. преобразование $\pi: x^n \rightarrow |\omega|^{2n}$ сплетает операторы $\frac{2}{m} d_1$ и оператор Лапласа Δ в R^m . В общем случае дифференциальный оператор в R^m , инвариантный относительно вращений, определяет инвариантный оператор на соответствующей коалгебре и преобразование π сплетает эти операторы. \square

В дальнейшем нам потребуется новое понятие. Пусть $(R[[x]], \delta)$ — коалгебра и пусть $g(x)$ — формальный ряд такой, что $g(0) = 0, g'(0) = 1$. Зададим R -линейное мультипликативное отображение

$$\hat{g}: R[[x]] \rightarrow R[[x]]$$

формулой $\hat{g}(f(x)) = f(g(x))$, например $\hat{g}(x^n) = g(x)^n$. В силу условий $g(0) = 0, g'(0) = 1$ отображение \hat{g} является изоморфизмом и потому определено обратное отображение $(\hat{g})^{-1}$. Определим отображение $\delta_g: R[[x]] \rightarrow R[[x, y]]$ из условия коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} R[[x]] & \xrightarrow{\delta} & R[[x, y]] \\ \downarrow \hat{g} & & \downarrow \hat{g} \otimes \hat{g} \\ R[[x]] & \xrightarrow{\delta_g} & R[[x, y]] \end{array}$$

т. е. $\delta_g = (\hat{g} \otimes \hat{g}) \delta (\hat{g})^{-1}$. Тогда отображение δ_g задает на кольце $R[[x]]$ структуру коалгебры.

Определение 6. Будем говорить, что коалгебра $(R[[x]], \delta_g)$ получена из коалгебры $(R[[x]], \delta)$ *заменой переменных при помощи ряда $g(x)$* .

Определение 7. Коалгебра $(R[[x]], \delta)$ называется *почти однородной*, если она заменой переменных сводится к однородной. Ряд $g(x)$ будем называть *логарифмом* почти однородной коалгебры.

Важный класс почти однородных коалгебр образуют многозначные формальные группы [3, 19]. Например, коумножение δ , задаваемое одномерной формальной группой $\mu(x, y)$, т. е. $\delta_x y f(x) = f(\mu(x, y))$ над кольцами без кручений является почти однородным, так как заменой переменных сводится к обычному сдвигу $(x+y)$. Аналогичное утверждение справедливо для одномерных двузначных и трехзначных коммутативных формальных групп, только имеется по паре различных однородных двузначных и трехзначных формальных групп [3, 19].

§ 3. Функциональные уравнения, связанные с однородными коалгебрами

Пусть δ — оператор сдвига на прямой, т. е. $\delta_x^y f(x) = f(x+y)$. Последовательности полиномов $p_n(x)$, $s_n(x)$, $n \geq 0$, над R называются [12, 14—18]

а) последовательностью *биномиального* типа, если для любого $n \geq 0$

$$\delta_x^y p_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) p_{n-i}(y);$$

б) последовательностью *Шеффера*, если для любого $n \geq 0$

$$\delta_x^y s_n(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x) p_{n-i}(y),$$

где $p_i(x)$ — данная последовательность биномиального типа.

Замечание 1. Мы не требуем выполнения условий $\deg p_n(x) = \deg s_n(x) = n$, как в [12, 14—18].

Замечание 2. Пусть d_n — последовательность элементов из R , причем $d_n \neq 0$. Тогда полиномы $u_n(x) = d_n p_n(x)$, $v_n(x) = d_n s_n(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\delta_x^y u_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{d_n}{d_i d_{n-i}} u_i(x) u_{n-i}(y), \quad \delta_x^y v_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{d_n}{d_i d_{n-i}} v_i(x) u_{n-i}(y). \quad (24)$$

Обычно полагают $d_n = n!$ [12, 14—18].

Нас будут интересовать последовательности полиномов, для которых

$$\text{с) } \delta_x^y r_n(x) = \sum_{k=0}^n (r_k(x) p_{n-k}(y) + r_k(y) p_{n-k}(x)),$$

$$\text{д) } \delta_x^y q_n(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^n q_{1,i,k}(x) q_{2,i,n-k}(y),$$

где $p_n(x)$, $q_{j,i,n}(x)$ — какие-то последовательности полиномов.

В дальнейшем в уравнениях а) — д) через δ_x^y будем обозначать некоторое невырожденное однородное коумножение на прямой, причем последовательность $s_n(x)$ будем называть *последовательностью Боаса — Бака* [2, 23, 14]. Для произвольной последовательности полиномов $h_n(x)$ рассмотрим производящую функцию $H(x, t) = \sum_{n \geq 0} h_n(x) t^n$. Тогда уравнения а) — д) можно переписать в компактном виде:

$$\delta_x^y P(x, t) = P(x, t) P(y, t), \quad (25)$$

$$\delta_x^y S(x, t) = P(x, t) S(y, t), \quad (26)$$

$$\delta_x^y R(x, t) = R(x, t) P(y, t) + R(y, t) P(x, t), \quad (27)$$

$$\delta_x^y Q(x, t) = \sum_{i=1}^m Q_{1,i}(x, t) Q_{2,i}(y, t). \quad (28)$$

Если δ_x^y — обычный сдвиг на прямой ($\delta_x^y p(x) = p(x+y)$), то уравнения (25) — (28) аналогичны классическим функциональным уравнениям Кوشي, Пексидера, Абеля, Леви-Чивиты и Штокля [24]. Ясно, что урав-

нения (25) — (27) являются частными случаями уравнения (28). Мы получим общее решение уравнения

$$\delta_x^y \varphi_0(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \theta_i(y), \quad (29)$$

где δ_x^y — коумножение невырожденной однородной коалгебры, $\varphi_i(x)$, $\theta_j(x) \in K[[x]]$, а K — поле характеристики нуль. Найти решение уравнения (29) для данных δ , m означает найти набор рядов $\varphi_i(x)$, $\theta_j(x)$, $i=0, \dots, m$, $j=1, \dots, m$ (т. е. все $\varphi_i(x)$, $\theta_j(x)$ являются неизвестными). Если в качестве K взять поле формальных рядов Лорана $R((t))$, а $\varphi_0(x)$ искать в кольце $R[[x, t]]$, то мы получим общее решение функционального уравнения (28). Из уравнения (29) и теоремы 5 имеем

$$\sum_{k \geq 0} (d_1^k \varphi_0(x)) \frac{y^k}{c_k} = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \theta_i(y).$$

Откуда

$$d_1^k \varphi_0(x) = \sum_{i=1}^m a_{i,k} \varphi_i(x), \quad (30)$$

где $a_{i,k} = c_k \theta_i^{(k)}(0)/k!$. Рассмотрим в кольце $K[[x]]$ линейное пространство V над K , порожденное рядами $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$. Из (30) получаем, что $d_1^k \varphi_0(x) \in V$ для всех $k \geq 0$ и так как $\dim_K V \leq m$, то набор рядов $\varphi_0(x), d_1 \varphi_0(x), \dots, d_1^m \varphi_0(x)$ линейно зависим, т. е. ряд $\varphi_0(x)$, удовлетворяющий функциональному уравнению (29), должен быть решением уравнения

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i d_1^i \varphi_0(x) = 0, \quad \lambda_i \in K. \quad (31)$$

Пусть μ_1, \dots, μ_k — различные корни характеристического уравнения

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \mu^i = \prod_{i=1}^k (\mu - \mu_i)^{r_i} = 0$$

в некотором расширении поля K , а r_1, \dots, r_k — кратности этих корней. Тогда уравнение (31) примет вид

$$\left(\prod_{i=1}^k L(\mu_i)^{r_i} \right) \varphi_0(x) = 0, \quad (32)$$

где $L(\mu_i) = d_1 - \mu_i$.

ЛЕММА 6. Общее решение уравнения (31) имеет вид

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^k P_i(\mathcal{D}) b(\mu_i x), \quad \mathcal{D} = x \frac{d}{dx},$$

где $P_i(x)$ — полином степени $r_i - 1$ с неопределенными коэффициентами.

Доказательство. Пусть $\omega_i(x)$ — решение уравнения

$$L(\mu_i)^{r_i} \omega_i(x) = 0, \quad (33)$$

тогда ясно, что $\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^k \omega_i(x)$ является решением (32) ввиду того, что операторы $L(\mu_i)$, $i=1, \dots, k$, коммутируют. Нам понадобится

ЛЕММА 7. *Общее решение уравнения (33) имеет вид*

$$\omega_i(x) = P_i(\mathcal{D}) b(\mu_i x),$$

где $P_i(x)$ — полином степени $r_i - 1$ с неопределенными коэффициентами.

Доказательство. Из линейности уравнения (33) и невырожденности коалгебры следует, что множество решений уравнения (33) является векторным пространством размерности r_i . Покажем, что ряды

$$\mathcal{D}^k b(\mu_i x), \quad k = 0, \dots, r_i - 1, \quad (34)$$

являются решениями уравнения (33), используя индукцию и формулу

$$d_1 \mathcal{D} - \mathcal{D} d_1 = d_1, \quad (35)$$

которую достаточно проверить на мономах x^n . Докажем, что

$$L(\mu_i)^n \mathcal{D}^{n-1} b(\mu_i x) = 0, \quad n \geq 1. \quad (36)$$

Ясно, что $L(\mu_i) b(\mu_i x) = 0$. Предположим, что для всех n , $1 \leq n \leq N-1$, выполнено (36). Из (35) следует, что $L(\mu_i) \mathcal{D} - \mathcal{D} L(\mu_i) = d_1 = L(\mu_i) + \mu_i$. Поэтому

$$\begin{aligned} (L(\mu_i)^N \mathcal{D}^{N-1}) b(\mu_i x) &= L(\mu_i)^{N-1} (\mathcal{D} L(\mu_i) + L(\mu_i) + \mu_i), \\ \mathcal{D}^{N-2} b(\mu_i x) &= L(\mu_i)^{N-1} \mathcal{D} L(\mu_i) \mathcal{D}^{N-2} b(\mu_i x) = \\ &= L(\mu_i)^{N-2} (\mathcal{D} L(\mu_i) + L(\mu_i) + \mu_i) L(\mu_i) \mathcal{D}^{N-2} b(\mu_i x) = \\ &= L(\mu_i)^{N-2} \mathcal{D} L(\mu_i)^2 \mathcal{D}^{N-2} b(\mu_i x) = \dots = \mathcal{D} L(\mu_i)^N \mathcal{D}^{N-2} b(\mu_i x) = 0. \end{aligned}$$

Формула (36) доказана. Таким образом, мы показали, что ряды (34) являются решениями уравнения (33). Далее,

$$\mathcal{D}^m = x^m D^m + \sum_{i < m} S(m, i) x^i D^i, \quad D = \frac{d}{dx}$$

(отметим, что $S(m, i)$ являются числами Стирлинга [13]), т. е. ряды $\mathcal{D}^k b(\mu_i x)$, $0 \leq k \leq r_i - 1$, получаются линейным обратимым преобразованием из рядов $x^k D^k b(\mu_i x)$, $0 \leq k \leq r_i - 1$, которые, очевидно, линейно независимы. Лемма 7 доказана.

Для доказательства леммы 6 осталось воспользоваться тем, что ряды $\mathcal{D}^l b(\mu_i x)$, $i = 1, \dots, k$, $0 \leq l \leq r_i - 1$, при условии $\mu_i \neq \mu_j$, если $i \neq j$, линейно независимы. \square

ТЕОРЕМА 6. *Ряд $\varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению (29) для фиксированного невырожденного коумножения δ и числа m для некоторых рядов $\varphi_i(x)$, $\theta_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, тогда и только тогда, когда $\varphi_0(x)$ удовлетворяет уравнению (31), т. е. в обозначениях леммы 6*

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^k P_i(\mathcal{D}) b(\mu_i x), \quad m = \sum_{i=1}^k r_i.$$

Доказательство. Для ряда $\mathcal{D}_x^n b(\mu x)$ имеем

$$\begin{aligned} \delta_x^y (\mathcal{D}_x^n b(\mu x)) &= \delta_x^y (\mathcal{D}_\mu^n b(\mu x)) = \mathcal{D}_\mu^n (\delta_x^y b(\mu x)) = \\ &= \mathcal{D}_\mu^n (b(\mu x) b(\mu y)) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\mathcal{D}_\mu^i b(\mu x)) (\mathcal{D}_\mu^{n-i} b(\mu y)) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\mathcal{D}_x^i b(\mu x)) (\mathcal{D}_y^{n-i} b(\mu y)). \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, ряд $\varphi_0(x) = \mathcal{D}_x^n b(\mu x)$ удовлетворяет уравнению (29) с $m = n + 1$, $\varphi_i(x) = \theta_i(x) = \mathcal{D}_x^{i-1} b(\mu x)$, $i = 1, \dots, m$. Так как в силу леммы 7 ряды $\mathcal{D}_x^{m_i} b(\mu_i x)$, $i = 1, \dots, k$, $0 \leq m_i \leq r_i - 1$, образуют базис пространства решений уравнения (31), то из формулы (37) и того, что $n = r_1 + \dots + r_k$, вытекает доказательство теоремы. \square

З а м е ч а н и е. Пусть ряды $\varphi_i(x)$, $\theta_j(x)$, $i = 0, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$, являются решением уравнения (29) и пусть A — обратимая матрица над K . Тогда $\varphi_0(x)$, $\hat{\varphi}_i(x)$, $\hat{\theta}_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, также являются решением уравнения (29), где

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1(x) \\ \dots \\ \hat{\varphi}_m(x) \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1(x) \\ \dots \\ \hat{\theta}_m(x) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1(x) \\ \dots \\ \theta_m(x) \end{pmatrix}. \quad \square$$

В следующем следствии все функциональные уравнения рассматриваются над кольцом $R((t))[[x, y]]$.

С л е д с т в и е 8. 1) Уравнение (25) имеет решение $P(x, t) = b(xf(t))$.

2) Уравнение (26) имеет решение $S(x, t) = g(t)P(x, t) = g(t) \times \times b(xf(t))$.

3) Уравнение $\delta_x^y P(x, t) = Q(x, t)R(y, t)$ имеет решение

$$P(x, t) = \pi(t)\rho(t)b(xf(t)), \quad Q(x, t) = \pi(t)b(xf(t)), \\ R(x, t) = \rho(t)b(xf(t)).$$

4) Уравнение

$$\delta_x^y P(x, t) = Q(x, t)b(yf(t)) + R(y, t)b(xf(t)) \quad (38)$$

имеет решение

$$P(x, t) = (\pi(t) + \rho(t))b(xf(t)) + h(t)\mathcal{D}_x b(xf(t)), \\ Q(x, t) = \pi(t)b(xf(t)) + h(t)\mathcal{D}_x b(xf(t)), \\ R(x, t) = \rho(t)b(xf(t)) + h(t)\mathcal{D}_x b(xf(t)).$$

Доказательство необходимо провести лишь для п. 4). Рассмотрим уравнение

$$\delta_x^y \varphi_0(x) = \varphi_1(x)b(\mu y) + b(\mu x)\theta_2(y). \quad (39)$$

ЛЕММА 8. Уравнение

$$d_1 \varphi_0(x) = \mu_1 \varphi_0(x) + \mu_2 b(\mu_3 x) \quad (40)$$

в кольце $K[[x]]$ имеет следующие решения:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} a_1 b(\mu_1 x) + a_2 b(\mu_3 x) & , \text{ если } \mu_1 \neq \mu_3, \\ a_1 b(\mu_1 x) + a_2 \mathcal{D}_x b(\mu_1 x), & \text{ если } \mu_1 = \mu_3. \end{cases}$$

Доказательство. Применяя к уравнению (40) оператор d_1 и учитывая условие $c_1 = 1$, получим уравнение

$$d_1^2 \varphi_0(x) = \mu_1 d_1 \varphi_0(x) + \mu_2 \mu_3 b(\mu_3 x). \quad (41)$$

Из уравнений (40), (41) следует уравнение

$$d_1^2 \varphi_0(x) - (\mu_1 + \mu_3) d_1 \varphi_0(x) + \mu_1 \mu_3 = 0,$$

характеристические корни которого равны μ_1 , μ_3 . Поэтому утверждение леммы следует из леммы 6. \square

Вернемся к уравнению (39), для которого уравнения (30) примут вид (напомним, что $c_1=1$)

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) + \theta_2(0)b(\mu x), \quad d_1\varphi_0(x) = \mu\varphi_1(x) + \theta_2'(0)b(\mu x). \quad (42)$$

Откуда $d_1\varphi_0(x) = \mu\varphi_0(x) + (\theta_2'(0) - \mu\theta_2(0))b(\mu x)$. Учитывая лемму 8, уравнение (42) и уравнение $\varphi_0(y) = \varphi_1(0)b(\mu y) + \theta_2(y)$, получаем общее решение уравнения (39):

$$\varphi_0(x) = (a_1 + a_2)b(\mu x) + a_3\mathcal{D}_x b(\mu x), \quad (43)$$

$$\varphi_1(x) = a_1b(\mu x) + a_3\mathcal{D}_x b(\mu x), \quad (44)$$

$$\theta_2(x) = a_2b(\mu x) + a_3\mathcal{D}_x b(\mu x). \quad (45)$$

Формулы (43)–(45) дают решение функционального уравнения (38). \square

З а м е ч а н и е. Если в функциональных уравнениях следствия 8 вместо однородного коумножения рассматривать почти однородное $(\delta_g)_x^y$ с логарифмом $g(x)$, то в решениях нужно заменить x на $g(x)$. \square

Зафиксируем теперь коумножение δ на суперпрямой $R_\Lambda^{\Lambda^1}$, для которого (см. § 2) $\delta x^n \xi^\varepsilon = \delta_1 x^n \otimes \delta_2 \xi^\varepsilon$, где δ_1 — почти однородное невырожденное коумножение на прямой с логарифмом $g(x)$, а $\delta_2 \xi = \xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi + a\lambda \xi \otimes \xi = \xi + \eta + a\lambda \xi \eta$, где мы положили $\xi = \xi \otimes 1$, $\eta = 1 \otimes \xi$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$\delta_{x,\xi}^{y,\eta} P(x, \xi, t, \tau) = Q(x, \xi, t, \tau) R(y, \eta, t, \tau), \quad (46)$$

где $\delta_{x,\xi}^{y,\eta} = (\delta_1)_x^y \otimes (\delta_2)_{\xi}^\eta$, а $P(x, \xi, t, \tau)$, $Q(x, \xi, t, \tau)$, $R(x, \xi, t, \tau)$ принадлежит Λ -алгебре $\mathcal{O}(R_\Lambda^{\Lambda^1}) \widehat{\otimes}_\Lambda \mathcal{O}L(R_\Lambda^{\Lambda^1})$, $\mathcal{O}L(R_\Lambda^{\Lambda^1}) = \Lambda \otimes_R R((t)) \otimes_R R[\tau]/\tau^2$. Будем считать, что все функции в уравнении (46) четные. Тогда

$$P(x, \xi, t, \tau) = P_{00}(x, t) + P_{01}(x, t)\lambda\xi + P_{10}(x, t)\lambda\tau + P_{11}(x, t)\xi\tau,$$

где $P_{ij}(x, t) \in R((t))[[x]]$, $i, j=0, 1$. Аналогично введем ряды $Q_{ij}(x, t)$, $R_{ij}(x, t)$, $i, j=0, 1$. Для удобства положим $\delta_1 = \delta$. Тогда функциональное уравнение (46) примет вид

$$\begin{aligned} & \delta_x^y P_{00}(x, t) + \delta_x^y P_{01}(x, t)\lambda(\xi + \eta) + \delta_x^y P_{10}(x, t)\lambda\tau + \\ & + \delta_x^y P_{11}(x, t)(\varepsilon + \eta + a\lambda\xi\eta)\tau = \\ & = (Q_{00}(x, t) + Q_{01}(x, t)\lambda\xi + Q_{10}(x, t)\lambda\tau + Q_{11}(x, t)\xi\tau) \times \\ & \times (R_{00}(y, t) + R_{01}(y, t)\lambda\eta + R_{10}(y, t)\lambda\tau + R_{11}(y, t)\eta\tau). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\delta_x^y P_{00}(x, t) = Q_{00}(x, t) R_{00}(y, t), \quad (47)$$

$$\delta_x^y P_{01}(x, t) = Q_{01}(x, t) R_{00}(y, t) = Q_{00}(x, t) R_{01}(y, t), \quad (48)$$

$$\delta_x^y P_{10}(x, t) = Q_{00}(x, t) R_{10}(y, t) = Q_{00}(x, t) R_{10}(y, t), \quad (49)$$

$$\delta_x^y P_{11}(x, t) = Q_{11}(x, t) R_{00}(y, t) = Q_{00}(x, t) R_{11}(y, t), \quad (50)$$

$$a\delta_x^y P_{11}(x, t) = Q_{01}(x, t) R_{11}(y, t) - Q_{11}(x, t) R_{01}(y, t). \quad (51)$$

Предположим, что $Q_{00}(x, t)R_{00}(y, t) \neq 0$, иначе уравнение (46) сильно вырождается: $P_{00}(x, t) = P_{01}(x, t) = P_{11}(x, t) = 0$ и решение его не пред-

ставляет труда. Из уравнений (47)–(51), используя следствие 8, получим

$$\begin{aligned}
 P_{00}(x, t) &= \pi_{00}(t) \rho_{00}(t) A, & Q_{00}(x, t) &= \pi_{00}(t) A, & R_{00}(x, t) &= \rho_{00}(t) A, \\
 P_{01}(x, t) &= \pi_{01}(t) \rho_{00}(t) A = \pi_{00}(t) \rho_{01}(t) A, & Q_{01}(x, t) &= \pi_{01}(t) A, \\
 R_{01}(x, t) &= \rho_{01}(t) A, & P_{11}(x, t) &= \pi_{11}(t) \rho_{00}(t) A = \pi_{00}(t) \rho_{11}(t) A, \\
 Q_{11}(x, t) &= \pi_{11}(t) A, & R_{11}(x, t) &= \rho_{11}(t) A, & P_{10}(x, t) &= (\pi_{10}(t) + \rho_{10}(t)) A + B, \\
 & & & & & (52) \\
 Q_{10}(x, t) &= \frac{\pi_{10}(t)}{\rho_{00}(t)} A + \frac{1}{\rho_{00}(t)} B, & R_{10}(x, t) &= \frac{\rho_{10}(t)}{\pi_{00}(t)} A + \frac{1}{\pi_{00}(t)} B, \\
 A &= b(g(x)f(t)), & B &= h(t)g(x)D_{g(x)}b(g(x)f(t)).
 \end{aligned}$$

Так как

$$\pi_{01}(t) \rho_{00}(t) = \pi_{00}(t) \rho_{01}(t), \quad \pi_{11}(t) \rho_{00}(t) = \pi_{00}(t) \rho_{11}(t),$$

то в силу предположения, что $\pi_{00}(t) \rho_{00}(t) \neq 0$,

$$\pi_{01}(t) \rho_{11}(t) = \pi_{11}(t) \rho_{01}(t).$$

Поэтому $Q_{01}(x, t)R_{11}(y, t) = Q_{11}(x, t)R_{01}(y, t)$ и, значит, $a\delta_x^y P_{11}(x, t) = 0$. Если $a \neq 0$, то

$$P_{11}(x, t) = Q_{11}(x, t) = R_{11}(x, t) = 0, \quad a \neq 0. \quad (53)$$

Таким образом, формулы (52), (53) дают полное решение уравнения (46). \square

Следствие 9. 1) Решение функционального уравнения

$$\delta_{x, \xi}^{y, \eta} P(x, \xi, t, \tau) = P(x, \xi, t, \tau) P(y, \eta, t, \tau) \quad (54)$$

для однородного коумножения на суперпрямой $R_\Lambda^{1,1}$ имеет вид

$$P(x, \xi, t, \tau) = b(xf(t)) (1 + \rho_{01}(t) \lambda \xi + \rho_{11}(t) \xi \tau) + h(t) x D_x b(xf(t)) \lambda \tau. \quad (55)$$

2) Пусть

$$P(x, \xi, t, \tau) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\varepsilon=0}^1 p_{n,\varepsilon}(x, \xi) t^n \tau^\varepsilon.$$

Рассмотрим отображение φ суперпрямой $R_\Lambda^{1,1}$ в себя:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \xi \rho_{01}(t), \quad \varphi(\tau) = \lambda h(t) + \xi \rho_{11}(t),$$

и пусть

$$F: C_\Lambda(R^{1,1}) \rightarrow \text{Mat}(1, 1; T \text{Mat}(R, \infty)),$$

— суперматричное представление (см. § 1). Тогда

$$\begin{pmatrix} \rho_{0,0}(x, \xi) \\ \dots \\ \rho_{n,0}(x, \xi) \\ \dots \\ \rho_{0,1}(x, \xi) \\ \dots \\ \rho_{n,1}(x, \xi) \\ \dots \end{pmatrix} = F(\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ x^k/c_k \\ \dots \\ \xi \\ \dots \\ \xi x^k/c_k \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Определение 8. Элемент $\varphi \in C_\Lambda(R^{1,1}, R^{1,1})$, определяющий производящую функцию $P(x, \xi, t, \tau)$, назовем параметром производящей функции.

Рассмотрим последовательность полиномов $p_{n,\varepsilon}(x, \xi) \in \mathcal{O}(R_\Lambda^{1,1})$, $n=0, 1, \dots$, $\varepsilon=0, 1$. Сопоставим этой последовательности производящую функцию

$$P(x, \xi, t, \tau) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\varepsilon=0}^1 p_{n,\varepsilon}(x, \xi) t^n \tau^\varepsilon \in \mathcal{O}(R_\Lambda^{1,1}) \widehat{\otimes}_\Lambda \mathcal{O}(R_\Lambda^{1,1}).$$

Определение 9. Последовательность полиномов $p_{n,\varepsilon}(x, \xi)$ назовем *четной*, если четность полинома $p_{n,\varepsilon}(x, \xi)$ равна ε .

Производящая функция четной последовательности полиномов является четной функцией. Если производящие функции четных последовательностей полиномов $p_{n,\varepsilon}(x, \xi)$, $q_{n,\varepsilon}(x, \xi)$, $r_{n,\varepsilon}(x, \xi)$ удовлетворяют функциональному уравнению (46), то для любых n, ε

$$\delta_{x,\xi}^{y,\eta} p_{n,\varepsilon}(x, \xi) = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=0}^\varepsilon q_{k,\alpha}(x, \xi) r_{n-k,\varepsilon-\alpha}(y, \eta). \quad (56)$$

Обратно, если для любых n, ε выполнено (56), то для производящих функций выполнено уравнение (46). Изучим более подробно функциональное уравнение

$$\delta_{x,\xi}^{y,\eta} p_{n,\varepsilon}(x, \xi) = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=0}^\varepsilon p_{k,\alpha}(x, \xi) p_{n-k,\varepsilon-\alpha}(y, \eta), \quad (57)$$

которое эквивалентно

$$\delta_{x,\xi}^{y,\eta} P(x, \xi, t, \tau) = P(x, \xi, t, \tau) P(y, \eta, t, \tau),$$

где δ — однородное невырожденное коумножение с $a=0$. Тогда производящая функция задается рядом $b(x)$ и параметром $\varphi \in C_\Lambda(R^{1,1}, R^{1,1})$. Зафиксируем оператор δ (или ряд $b(x)$). Рассмотрим две последовательности полиномов $p_{n,\varepsilon}(x, \xi)$, $q_{n,\varepsilon}(x, \xi)$. Пусть

$$p_{n,\varepsilon}(x, \xi) = \sum_{k,\alpha} p_{n,\varepsilon,k,\alpha} x^k \xi^\alpha / c_k.$$

Определение 10 (ср. [12, 14—18]). Последовательность полиномов $r_{n,\varepsilon}(x, \xi)$, определенная формулой

$$r_{n,\varepsilon}(x, \xi) = \sum_{k,\alpha} p_{n,\varepsilon,k,\alpha} q_{k,\alpha}(x, \xi),$$

называется *теневой композицией* последовательностей $p_{n,\varepsilon}(x, \xi)$, $q_{n,\varepsilon}(x, \xi)$ и обозначается $p_{n,\varepsilon}[q(x, \xi)]$.

ТЕОРЕМА 8. Если $p_{n,\varepsilon}(x, \xi)$, $q_{n,\varepsilon}(x, \xi)$ — две последовательности полиномов, удовлетворяющие (48), а $\varphi, \psi \in C_\Lambda(R^{1,1}, R^{1,1})$ — параметры их производящих функций, то теневая композиция $p_{n,\varepsilon}[q(x, \xi)]$ также удовлетворяет уравнению (48), а $\psi(\varphi)$ — параметр ее производящей функции.

Доказательство. Из п. 2) следствия 9 имеем

$$\{p_{n,\varepsilon}(x, \xi)\} = F(\varphi) \{x^k \xi^\alpha / c_k\}, \quad \{q_{n,\varepsilon}(x, \xi)\} = F(\psi) \{x^k \xi^\alpha / c_k\}.$$

Поэтому

$$\{r_{n,\varepsilon}(x, \xi)\} = F(\varphi) F(\psi) \{x^k \xi^\alpha / c_k\} = F(\psi(\varphi)) \{x^k \xi^\alpha / c_k\}.$$

Здесь мы воспользовались теоремой 1. \square

Определение 11 (ср. [12, 14—18]). Линейный оператор

$$F(\varphi): \left\{ \frac{x^k \xi^\alpha}{c_k} \right\} \rightarrow \{p_{n, \varepsilon}(x, \xi)\}$$

назовем *теневым оператором*.

Таким образом, определено действие полугруппы $S_\Delta(R^{1,1}, R^{1,1})$ на последовательностях полиномов, удовлетворяющих (57).

Следствие 10. Для суперпрямой $R^{1,1}$ четная последовательность полиномов имеет вид $p_{n,0}(x, \xi) = p_n(x)$, $p_{n,1}(x, \xi) = \xi s_n(x)$, а производящая функция вид $P(x, \xi, t, \tau) = b(xf(t))(1 + \xi \tau g(t))$, и определено представление полугруппы $S(R^{1,1}, R^{1,1})$ на этих производящих функциях. Следовательно, теория последовательностей полиномов Боаса — Бака есть в точности теория последовательностей четных полиномов на обычной суперпрямой, удовлетворяющих функциональному уравнению (57).

Литература

1. Березин Ф. А., Кац Г. И. Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами//Матем. сб. 1970. Т. 82. С. 349—359.
2. Boas R. P., Buck R. C. Polynomial expansion of analytic functions. Berlin: Springer, 1958.
3. Бухштабер В. М. Двухзначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения к кобордизмам. I//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. С. 1044—1064.
4. Бухштабер В. М. Алгебра Стиррода — обертывающая алгебра супергруппы p -адических диффеоморфизмов прямой//Доп. к книге Стиррод Н., Эпштейн Д. «Когомологические операции». М.: Наука, 1983.
5. Бухштабер В. М., Новиков С. П. Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса//Матем. сб. 1971. Т. 84(126). С. 81—118.
6. Бухштабер В. М., Шокуров А. В. Алгебра Ландвебера — Новикова и формальные векторные поля на прямой//Функц. анализ. 1978. Т. 12. Вып. 3. С. 1—11.
7. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
8. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
9. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1977.
10. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.
11. Лейтес Д. А. Введение в теорию супермногообразий//УМН. 1980. Т. 35. Вып. 1. С. 3—57.
12. Mullin R., Rota G.-C. On the foundations of combinatorial theory III: Theory of binomial enumerations//Graph theory and its applications. N.-Y.: Acad. Press, 1970. P. 167—213.
13. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.
14. Roman S. The theory of the umbral calculus. I//J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 87. P. 58—115.
15. Roman S. The umbral calculus. N.-Y.: Acad. Press, 1984.
16. Roman S., Rota G.-C. The umbral calculus//Adv. Math. 1978. V. 27. P. 95—188.
17. Rota G.-C., Kahane D., Odlyzko A. On the foundations of combinatorial theory VIII. Finite operator calculus//J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 42. P. 685—760.
18. Rota G.-C. Finite operator calculus. N.-Y.: Acad. Press, 1975.
19. Холодов А. Н. Алгебраическая теория многозначных формальных групп//Матем. сб. 1981. Т. 114(156). С. 299—321.
20. Хелгасон С. Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
21. Шварц А. С. К определению суперпространства//ТМФ. 1984. Т. 60. С. 37—42.
22. Sheffer I. M. Some properties of polinomial sets of type zero//Duke Math. J. 1939. V. 5. P. 590—622.
23. Rainville D. E. Special functions. N.-Y.: Macmilan Co., 1960.
24. Aczel J. Lectures on functional equations and their applications. N.-Y.: Acad. Press, 1966.
25. Холодов А. Н. Теневой анализ на многозначных формальных группах и проекторы Адамса в K -теории//Матем. сб. 1988. Т. 137. С. 417—431.
26. Ueno K. The umbral calculus and special functions//Adv. Math. 1988. V. 67. P. 174—230.
27. Jabotinsky E. Analytic iteration//Trans. AMS. 1963. V. 108. P. 457—477.
28. Висков О. В. Операторная характеристика обобщенных полиномов Аппеля//Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. С. 749—752.
29. Владимиров В. С., Волович И. В. Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление//ТМФ. 1984. Т. 59. С. 3—27.
30. Reich L. On a differential equations in iteration theory in rings of formal power series in one variables//Lect. Notes Math. 1985. V. 1163. P. 133—148.

Поступила в редакцию
8.II.1988
31.X.1988