© 2017 г. Е.В. ОРЛОВА, канд. техн. наук (ekorl@mail.ru)
(Уфимский государственный авиационный технический университет)

УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ ЦЕН В МОДЕЛИ ЦЕНОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Рассматривается динамическая модель ценовой конкуренции, в которой процессы стратегического взаимодействия фирм на рынке несовершенной конкуренции описываются с помощью теоретико-игрового подхода и методов нелинейной динамики. Динамика ценообразования фирм моделируется с помощью разностных уравнений (отображений). Исследована устойчивость неподвижной точки отображения цен. Результаты численного моделирования показали существование периодических и хаотических решений в модели ценовой конкуренции. Предложены внутрифирменные механизмы адаптации, основанные на изменении цен, пропорциональном скорости изменения прибылей фирм и позволяющем привести цены к локальному равновесию по Нэшу и стабилизировать хаотическую динамику рынка.

Ключевые слова: нелинейная экономическая динамика, модель ценовой конкуренции, периодический и хаотический динамические режимы, нелинейная динамика рынка, управление ценообразованием, бифуркационный анализ, устойчивость по Ляпунову, стратегическое взаимодействие фирм, равновесие по Нэшу.

1. Введение

Одним из важнейших инструментов управления деятельностью фирмы в условиях нестационарности параметров внешней среды и зависимости сфер производства и потребления является механизм адаптивного ценообразования. Процессы формирования и изменения цен, их структуры и уровни должны быть согласованы как со стратегическими целями фирм, так и с изменяющимися предпочтениями потребителей. Поэтому проблема управления процессом ценообразования является актуальной и значимой в условиях конкурентного рынка.

Модели ценообразования в условиях несовершенной конкуренции разнообразны, порождаются различными типами стратегического взаимодействия фирм, степенью воздействия спроса на цену и различаются в зависимости от наличия следующих факторов: 1) однородности (неоднородности) производимой продукции; 2) типа ограничения на производственные мощности; 3) наличия сговора конкурентов; 4) наличия фирмы-лидера по издержкам; 5) наличия барьеров входа на рынок.

Такие модели объединяют следующие принципы формирования цены: а) минимизация отклонения совокупного спроса от совокупного предложения; б) рациональность экономических агентов — производителей и потребителей продукции; в) существование совершенной информации о состоянии рынков; г) эффективность рынков. Последние исследования [1–4] показали,

что перечисленные принципы и предположения не всегда являются состоятельными. Поэтому развитие новых подходов и методов моделирования динамики рыночных цен, основанных на учете таких свойств экономической системы как неопределенность, стохастичность и нелинейность является актуальным и своевременным.

Содержательная постановка задачи. В теоретико-игровых задачах ценовой конкуренции, как правило, при обосновании выбора стратегий игроков ограничиваются доказательством существования и единственности ситуации равновесия. Для этого достаточно обосновать непрерывность функции выигрыша (прибыли фирм) и компактность множества стратегий [5, 6]. Отметим, что при решении задач игрового взаимодействия фирм на рынке не исследуются вопросы устойчивости равновесия при изменении параметров задачи. При исследовании рынков, подверженных как экзогенной, так и эндогенной изменчивости, постановка задачи анализа и управления устойчивостью равновесных ценовых стратегий фирм представляется важной и должна являться неотъемлемой частью при формировании стратегии фирм. Так, колебания цен на производственные ресурсы фирмы, изменения поведенческих стратегий и предпочтений потребителей прямо влияют на изменения параметров в задаче формирования цен на производимую продукцию. В настоящей статье ставится задача анализа устойчивости равновесных по Нэшу цен в модели игрового взаимодействия фирм на рынке несовершенной конкуренции и управления этой устойчивостью. Исследуется нелинейная динамика рыночных цен с помощью разностных уравнений (отображений) и изучается устойчивость неподвижной точки этого отображения.

2. Обзор существующих моделей ценовой конкуренции

В классической модели ценовой конкуренции — модели Бертрана предполагается совершенная заменимость товаров разных производителей и, как следствие, высокая степень ценовой конкуренции. В этой модели каждый из фирм-олигополистов принимает уровень цен как данный и независимо от всех остальных участников рынка принимает решение об уровне своей цены. Известен парадокс Бертрана, состоящий в том, что весь спрос достается производителю, установившему минимальную цену, и при одинаковых предельных издержках производителей единственным равновесием Нэша будет реализация продукции на уровне этих издержек, обеспечивая производителям нулевую прибыль. Если бы такое взаимодействие действительно происходило, то даже при небольшом числе производителей они не получали бы прибыль, истощили бы все свои ресурсы в затяжных ценовых войнах и в перспективе прекратили бы свою производственную деятельность. Однако эмпирические исследования показывают [7], что рост степени концентрации в отраслях экономики положительно отражается на ценах. Крупные производители не только не прекращают свою деятельность, но получают существенные прибыли в долгосрочной перспективе.

Рассмотренный парадокс Бертрана объясняется следующими ценовыми моделями.

1. Модель динамической ценовой конкуренции [8]. Выбор оптимальной стратегии фирмы зависит от соотношения значений выигрыша по каждо-

му из возможных вариантов в динамической (повторяющейся) игре. Фирмы отказываются от ценовой войны, если вероятность дальнейшего взаимодействия растет и увеличивается значимость будущих прибылей, если одностороннее снижение цены приводит к незначительному росту прибыли.

2. Модель Эджворта [9] как модель с ограничениями на производственные мощности производителей. Эджворт получил следующее достаточное условие существования равновесия по Нэшу: если суммарная мощность всех производителей, за исключением фирмы с максимальной производственной мощностью, превышает объем спроса по цене, равной средней себестоимости, то равновесная цена по Нэшу совпадает с ценой конкурентного равновесия (по Вальрасу) и равна средней себестоимости. В противном случае свойства модели существенно зависят от порядка, в котором потребители получают доступ к товару. Порядок потребителей, как правило, задается в виде “пропорционального правила рационирования” [10]. Если в этом случае общая производственная мощность производителей ниже спроса по цене, равной средней себестоимости, то равновесия по Нэшу в чистых стратегиях в общих предположениях не существует.

3. Модель с дифференцированным продуктом [11]. Продукт характеризуется с помощью набора характеристик — качество, долговечность, дополнительные услуги, месторасположение продавца, время продажи и др. Каждая из этих характеристик может выступать в качестве фактора продуктовой дифференциации. Дифференциация означает различение потребителем товара одного производителя от товаров данного класса других производителей и представляет собой форму неценовой конкуренции. Стандартная модель Бертрана предполагает совершенную заменимость продуктов и, как следствие, высокую степень ценовой конкуренции. Дифференциация смягчает ценовую конкуренцию, что не ведет к полному исчезновению прибылей фирм.

3. Описание нелинейной экономической динамики с помощью отображений

Исследование дискретных последовательностей на основе разностных уравнений, как правило, проще, чем с помощью дифференциальных уравнений. Такие объекты как дискретные отображения могут демонстрировать множество нетривиальных свойств, которыми обладают реальные системы. На сегодняшний день теория отображений развита довольно глубоко [12–16] и позволяет понять важные фундаментальные законы природы (биологии, химии, физики). Однако применение теории отображений для изучения социально-экономических систем в настоящее время мало развито. Поэтому приложение этой теории к экономике позволит получить новый взгляд на протекающие в ней процессы и, быть может, вскрыть новые законы эволюции динамических экономических процессов.

В ряде публикаций по исследованию нелинейной динамики систем разной природы (физической, химической, биологической, экономической) было установлено, что режим динамического хаоса является типичным явлением. Хаотические свойства проявляются в самых разнообразных системах, а если хаос не обнаруживается, то причинами могут быть либо существование хаоса в небольших областях параметрического пространства, либо его суще-

ствование вне допустимых областей значений параметров. В последнее время интенсивно развивается направление в нелинейной динамике, связанное с изучением проблем предсказуемости поведения хаотических систем, управления их динамикой и стабилизацией хаоса. Теоретические и экспериментальные работы в этой области выявили неожиданное свойство хаотических динамических систем: они являются управляемыми с точки зрения внешних воздействий [17, 18], т.е. посредством небольших воздействий возможно существенно влиять на динамику хаотических систем и стабилизировать их поведение, переводя их траектории из хаотического режима на требуемый периодический режим функционирования.

Исследования в области управления хаосом применительно к экономическим системам проводились, например, в [11; 18–25]. Управление хаосом предлагалось Ахмедом и Хассаном на основе уменьшения стоимости выпускаемой продукции, либо путем добавления новых аддитивных слагаемых, отвечающих дополнительным инвестициям (Холист, Урбанович, Копель), либо управление подбиралось в зависимости от произошедших изменений между прошлыми и текущими значениями переменных, т.е. при эффективном использовании обратной связи (Копель, Ахмед, Хассан).

4. Предлагаемая модель ценовой конкуренции

Рассматривается модель, описывающая динамику цен на олигополистическом рынке, на котором фирмы-производители предлагают дифференцированный продукт, характеризующийся тем, что у разных фирм он имеет отличительные свойства либо потребитель по тем или иным причинам отдает предпочтение продукту определенного производителя. Продукт одной фирмы не является совершенным заменителем продукта другой фирмы. Цена, которую устанавливает i-й производитель ($i \in I$, I – множество, содержащее не очень большое число элементов) на свой продукт, равна p_i. Рынок определяет объем продукта q_i, который может быть продан по данной цене. Спрос на продукт характеризуется набором функций конкурентного спроса $q_i(\vec{p})$, $i \in I$. Тогда функция выигрыша i-го производителя определяет его прибыль $\Pi_i(\vec{p}) = (p_i - c_i)\, q_i(\vec{p})$, где $c_i > 0$ – удельные затраты, постоянные для любого объема выпуска. Положим, что каждый производитель стремится максимизировать свою прибыль и на основе этого критерия изменяет свою цену.

Относительно функций спроса $q_i(\vec{p})$ на продукт i-го производителя будем предполагать, что они удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $q_i(\vec{p})$ и их первые производные непрерывны по своим переменным.

2. Спрос на продукцию i-го производителя убывает с ростом цены:

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} < 0 \quad \text{для любых} \quad i \in I.$$

3. Спрос стремится к нулю при стремлении цены к бесконечности:

$$q_i(\vec{p}) \to 0, \quad \text{если} \quad p_i \to +\infty.$$

Будем исследовать игровое взаимодействие фирм на рынке. Вектор цен $\vec{p}^* = (p_i^*, i \in I)$ является локальным равновесием Нэша (локально устойчивым по Нэшу), если удовлетворяет следующим условиям локальных условных максимумов функции прибыли: $\partial \Pi_i / \partial p_i = 0$ и $\partial^2 \Pi_i / \partial (p_i)^2 < 0$. Стратегией i-го производителя является изменение цены p_i пропорционально изменению своей прибыли с некоторым постоянным коэффициентом $k_i > 0$ с целью максимизации своей же эффективности, т.е. для достижения локального устойчивого равновесия по Нэшу. Далее будем рассматривать дуополию, а ценовая динамика фирм будет представлена в виде двумерного отображения — модели, в которой цены связаны рекуррентными соотношениями.

5. Алгоритм анализа и управления нелинейной динамикой цен

В условиях выдвинутых предпосылок взаимодействие фирм-дуополистов по Бертрану будет осуществляться в соответствии с моделью, описанной выше. Алгоритм моделирования и управления динамикой цен можно представить в виде последовательности этапов.

1. Оценка функции спроса на продукцию. Функция спроса определяется как решение задачи потребителя, максимизирующего свою полезность при бюджетном ограничении.

2. Формирование модели конкурентного взаимодействия производителей на основе адаптационного механизма. Определение цен, локально равновесных по Нэшу в условиях стратегического взаимодействия фирм.

3. Анализ устойчивости локально равновесных по Нэшу цен. Вычисление матрицы Якоби, вычисление старшего ляпуновского показателя, построение бифуркационных диаграмм в пространствах параметров модели, построение аттракторов системы.

4. Реализация адаптационного механизма, основанного на изменении цен, пропорционального скорости изменения прибылей фирм.

5.1. Определение функции спроса

Функцию спроса потребителя, т.е. зависимость объемов потребляемой продукции от цены, можно смоделировать на основании эмпирической информации об объемах продаж и средних цен. В этом случае возникают проблемы сбора достоверной информации, характеризующей рынок. Другим вариантом восстановления функции спроса является решение задачи потребителя, который максимизирует свою полезность при ограничении на доходы (бюджетное ограничение). В рамках настоящего исследования в качестве функции полезности используется функция полезности с постоянной эластичностью замены благ (CES-функция), которая довольно часто применяется в эмпирических исследованиях [22, 26].

Придерживаясь модели Бертрана с дифференцированным продуктом, положим q_1, q_2 – два продукта, производимые двумя различными фирмами. Полезность потребителя в виде CES-функции имеет вид:

$$U(q_1, q_2) = q_1^\beta + q_2^\beta, \quad 0 < \beta < 1, \tag{1}$$

где β – эластичность замещения продуктов, представляет собой степень заменяемости между двумя продуктами. Для $\beta = 1$ функция полезности отражает предпочтения потребителей, которые считают продукты полностью взаимозаменяемыми (неразличимыми). Уменьшение значения параметра β до нуля соответствует снижению степени заменяемости продуктов, а в пределе при $\beta \to -\infty$ продукты становятся взаимодополняемыми.

Потребитель максимизирует функцию полезности (1) при бюджетном ограничении:

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1. \tag{2}$$

Эта задача на условный экстремум сводится к нахождению безусловного экстремума функции Лагранжа:

$$L\left(q_1, q_2, \lambda\right) = q_1^{\beta} + q_2^{\beta} + \lambda\left(1 - p_1 q_1 - p_2 q_2\right). \tag{3}$$

Необходимые условия первого порядка – равенства нулю частных производных имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \beta q_1^{\beta-1} - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \beta q_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 1 - p_1 q_1 - p_2 q_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Решая первые два уравнения системы (4) относительно q_1 и q_2, получим:

$$q_1 = \left(\frac{\lambda}{\beta} p_1\right)^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad q_2 = \left(\frac{\lambda}{\beta} p_2\right)^{\frac{1}{\beta-1}}, \tag{5}$$

откуда

$$\frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}. \tag{6}$$

Из третьего уравнения системы (4) выразим q_2: $q_2 = \frac{1-p_1 q_1}{p_2}$ и, подставив его в (6), получим выражение для $q_1 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{1-p_1 q_1}{p_2}\right)$, из которого величина спроса на продукцию первого производителя q_1 может быть определена как $q_1 = \frac{p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}}(1-p_1 q_1)}{p_1^{\frac{1}{1-\beta}}}$. Далее $q_1 = \frac{p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{p_1 p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}} + p_1^{\frac{1}{1-\beta}}} = \frac{p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{p_1\left(p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}} + p_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)}$ или

$$q_1 = \frac{p_2^{\gamma}}{p_1\left(p_1^{\gamma} + p_2^{\gamma}\right)}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{\beta}{1-\beta}. \tag{7}$$

Аналогично спрос на продукцию второго производителя q_2 определяется в виде

$$q_2 = \frac{p_1^\gamma}{p_2\left(p_1^\gamma + p_2^\gamma\right)}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{\beta}{1-\beta}. \tag{8}$$

5.2. Динамический анализ конкурентного взаимодействия. Оценка равновесных цен

Проанализируем конкурентное поведение производителей в динамике для $\beta = 1/2$, тогда $\gamma = 1$. В этом случае выражения для кривых спроса q_1 и q_2 примут вид: $q_1 = \frac{p_2}{p_1}\frac{1}{p_1+p_2}$, $q_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{1}{p_1+p_2}$. Положим, что обе фирмы имеют постоянные средние издержки c_i, а функция совокупных издержек определяется как $C_i(q_i) = c_i q_i$, $i = 1, 2$. Тогда функция прибыли каждой фирмы будет равна $\Pi_i(p_i, p_j) = p_i q_i(p_i, p_j) - c_i q_i(p_i, p_j) = \frac{p_j}{p_i}\frac{1}{p_i+p_j}(p_i - c_i)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

Будем считать, что каждая фирма использует в динамике следующий механизм адаптации (изменения) своей цены пропорционально изменению предельной прибыли $\partial\Pi_i/\partial p_i$ [17, 22, 27, 28]. В период времени $(t+1)$ фирма принимает решение по увеличению (уменьшению) своей цены, если в период времени t предельная прибыль являлась положительной (отрицательной) в соответствии с механизмом:

$$p_i\left(t+1\right) = p_i\left(t\right) + k_i\frac{\partial\Pi_i}{\partial p_i}, \tag{9}$$

где $k_i > 0$ – коэффициент, отражающий скорость адаптационного процесса.

Предельная прибыль каждого производителя в период времени t имеет вид:

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial p_i} = \frac{\left(-p_i^2 p_j + 2c_1 p_i p_j + c_i p_j^2\right)}{p_i^2\left(p_i + p_j\right)^2}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \tag{10}$$

Подставив (10) в (9), получаем отображение:

$$\begin{aligned} p_1\left(t+1\right) &= p_1\left(t\right) + k_1\frac{\left(-p_1^2\left(t\right)p_2\left(t\right) + 2c_1 p_1\left(t\right)p_2\left(t\right) + c_1 p_2^2\left(t\right)\right)}{\left(p_1^2\left(t\right) + p_1\left(t\right)p_2\left(t\right)\right)^2}, \\ p_2\left(t+1\right) &= p_2\left(t\right) + k_2\frac{\left(-p_1\left(t\right)p_2^2\left(t\right) + 2c_2 p_1\left(t\right)p_2\left(t\right) + c_2 p_1^2\left(t\right)\right)}{\left(p_2^2\left(t\right) + p_1\left(t\right)p_2\left(t\right)\right)^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Система (11) является игрой, в которой цены в период времени $(t+1)$ определяются через цены периода t с учетом механизма адаптации. Неподвижная точка игры (11) определяется исходя из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} p_1^2 p_2 - 2c_1 p_1 p_2 - c_1 p_2^2 &= 0, \\ p_1 p_2^2 - 2c_2 p_1 p_2 - c_2 p_1^2 &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Система уравнений (12) определяет кривые реакции фирм, решение которой выявляет оптимальные цены каждой фирмы. Совокупность этих цен составляет локальное равновесие по Нэшу $p = p_1^* = p_2^*$, так как предельные прибыли обоих производителей в этой точке обращаются в нуль, а вторые производные прибыли по цене $\partial^2 \Pi_i / \partial (p_i)^2$ являются отрицательными для всех возможных значений параметров функционирования предприятий в реальных экономических условиях.

Разделив первое уравнение из (12) на $p_2 \neq 0$, а второе на $p_1 \neq 0$, получим:

$$p - 2c_1 p_1 - c_1 p_2 = 0,$$
$$p_2^2 - 2c_2 p_2 - c_2 p_1 = 0.$$

Из первого уравнения получившейся системы найдем p_1, а из второго p_2. Для p_1: $D = 4c_1^2 + 4c_1 p_2$, тогда $p_{1(1,2)} = \frac{2c_1 \pm \sqrt{4c_1^2 + 4c_1 p_2}}{2}$, $p_{1(1)} = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_1 p_2}$, второй корень не рассматривается, так как цена не может быть установлена ниже средних издержек. Аналогично для p_2: $p_{2(1)} = c_2 + \sqrt{c_2^2 + c_2 p_1}$.

Равновесие по Нэшу, характеризующееся парой цен p_1^* и p_2^*, является решением следующей системы уравнений:

$$p_1^* = c_1 + c_1 \sqrt{1 + \frac{p_2^*}{c_1}},$$
$$p_2^* = c_2 + c_2 \sqrt{1 + \frac{p_1^*}{c_2}}. \tag{13}$$

5.3. Анализ устойчивости равновесных цен

Модель конкурентного взаимодействия фирм может описываться двумерной системой разностных уравнений (11), где $p_1(t)$, $p_2(t)$ — цены фирм, взятые через дискретные интервалы времени t; вторые слагаемые в обоих уравнениях показывают, как осуществляется изменение цен в период t и как это изменение повлияет на цену в следующем $(t+1)$ периоде. Строго говоря, параметры k_1 и k_2 характеризуют прирост цен за счет изменения ценовой политики.

Далее проведем анализ эволюции динамики системы (11) в зависимости от значений параметров k_1, k_2, c_1, c_2 – определим наличие областей стабильности, бифуркаций, хаоса. Это можно сделать на основе известных аналитических и графических критериев динамического хаоса [13, 14, 29], таких как характеристический показатель Ляпунова, бифуркационные диаграммы, построение аттракторов системы при вариации ее параметров. Чтобы управлять поведением системы на основе выявленных закономерностей, необходимо подобрать способ изменения ее параметров с целью вывести функционирование системы на необходимый режим. На уровне каждой фирмы это означает управление ее издержками c_i, слежением за изменением прибыли за отчетный период и выбором соответствующей реакции k_i, а практически это — варьирование параметров управления, приводящее обе фирмы к сбалансированности интересов, т.е. к равновесию по Нэшу.

С экономической точки зрения это означает, что фирмы выбирают такой режим функционирования, который приведет к изменению ситуации на рынке, в результате чего уровни цен начнут эволюционировать предсказуемо, периодически. Если такое управление допустимо, то осуществляется такой переход к равновесному состоянию рынка, при котором каждая из фирм будет в среднем более эффективна.

Отметим, что неподвижная точка (p_{10}, p_{20}) системы двумерного отображения (11) есть такая точка, которая переходит сама в себя при однократной итерации отображения и определяется исходя из решения системы уравнений: $\begin{cases} p_{10} = f(p_{10}, p_{20}), \\ p_{20} = g(p_{10}, p_{20}), \end{cases}$ где f – функция $p_1(t+1)$ от $p_1(t)$ и $p_2(t)$, а g – функция $p_2(t+1)$ от $p_1(t)$ и $p_2(t)$ отображения (11). Решение последней системы уравнений, очевидно, будет совпадать с решением системы (12). Поэтому неподвижная точка системы (11) совпадает с равновесием по Нэшу, определенным для конкурентного взаимодействия фирм. Характер устойчивости неподвижной точки, как известно, определяется ее мультипликаторами, являющимися собственными числами матрицы возмущений (матрицы Якоби). Число мультипликаторов равно размерности отображения. Для двумерных отображений известен удобный в методическом плане подход, в рамках которого бифуркационный анализ и анализ устойчивости производятся на плоскости параметров — инвариантов матрицы Якоби [16]. Для двумерного отображения это — след и якобиан матрицы Якоби.

Матрица Якоби динамической системы (11) в неподвижной точке имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_{p_1} & f'_{p_2} \\ g'_{p_1} & g'_{p_2} \end{pmatrix}_{(p_{10}, p_{20})}. \tag{14}$$

Собственные числа этой матрицы представляют собой мультипликаторы отображения (11) μ_1 и μ_2, для которых справедливо соотношение $\mu^2 - S\mu + J = 0$, где S и J – два инварианта матрицы Якоби, ее след и якобиан, при этом $S = \mu_1 + \mu_2$, $J = \mu_1 \cdot \mu_2$. В соответствии с треугольником устойчивости [16] условия устойчивости неподвижной точки имеют вид:

$$\begin{cases} 1 - S + J > 0, \\ 1 + S + J > 0, \\ J < 1. \end{cases} \tag{15}$$

Исследуем матрицу Якоби системы (11) и выявим характер устойчивости ее неподвижной точки. Матрица Якоби в произвольной точке (p_1, p_2) примет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_{p_1} & f'_{p_2} \\ g'_{p_1} & g'_{p_2} \end{pmatrix}_{(p_1, p_2)},$$

где

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
f'_{p1} &= \frac{k_1\left(2c_1p_2-2p_1p_2\right)}{\left(p_1^2+p_1p_2\right)^2} - \frac{2k_1\left(2p_1+p_2\right)\left(2c_1p_1p_2+c_1p_2^2-p_1^2p_2\right)}{\left(p_1^2+p_1p_2\right)^3}+1,\\
f'_{p2} &= \frac{k_1\left(-p_1^2+2c_1p_1+2c_1p_2\right)}{\left(p_1^2+p_1p_2\right)^2} - \frac{2k_1p_1\left(2c_1p_1p_2+c_1p_2^2-p_1^2p_2\right)}{\left(p_1^2+p_1p_2\right)^3},\\
g'_{p1} &= \frac{k_2\left(-p_2^2+2c_2p_2+2c_2p_1\right)}{\left(p_2^2+p_1p_2\right)^2} - \frac{2k_2p_{21}\left(c_2p_1^2-p_1p_2^2+2c_2p_1p_2\right)}{\left(p_2^2+p_1p_2\right)^3},\\
g'_{p2} &= \frac{k_2\left(2c_2p_1-2p_1p_2\right)}{\left(p_2^2+p_1p_2\right)^2} - \frac{2k_2\left(2p_2+p_1\right)\left(2c_2p_1p_2+c_2p_1^2-p_2^2p_1\right)}{\left(p_2^2+p_1p_2\right)^3}+1.
\end{aligned}
$$

Очевидно, аналитическое представление этой матрицы в неподвижной точке (p_{10}, p_{20}) и установление областей ее устойчивости окажется довольно сложным, поэтому в дальнейшем будем исследовать устойчивость динамической системы численно.

5.4. Реализация адаптационного механизма. Численные эксперименты

1. *Определение равновесных по Нэшу цен p_1^* и p_2^*, выявление условий достижения и сохранения этого равновесия при заданных издержках c_i.*

Зафиксируем значения себестоимостей c_1, c_2 на уровне 0,1 и 0,15 соответственно и определим равновесные по Нэшу цены (11): $p_1^* = 0{,}33$; $p_2^* = 0{,}42$. Матрица Якоби (14) в этой точке будет иметь вид

$$
\hat{M} = \begin{pmatrix} 1-3{,}1k_1 & 0{,}69k_1 \\ 0{,}5k_2 & 1-1{,}77k_2 \end{pmatrix}_{\left(p_1^*, p_2^*\right)},
$$

и ее характеристический полином $\mu^2 - S\mu + J = 0$ имеет след и якобиан:

$$
S = 2 - 1{,}77k_2 - 3{,}1k_1,
$$

$$
J = \left(1-3{,}1k_1\right)\left(1-1{,}77k_2\right) - 0{,}345k_1k_2 = 1 - 3{,}1k_1 - 1{,}77k_2 + 5{,}142k_1k_2.
$$

Условия устойчивости найденного равновесия сформулированы системой (15). Решив эту систему относительно k_1 и k_2, получим диапазон изменения скоростей адаптации k_1 и k_2 для равновесия по Нэшу (0,33; 0,42):

$$
\begin{cases}
5{,}142k_1k_2 - 1 > 0,\\
5{,}142k_1k_2 - 6{,}2k_1 - 3{,}54k_2 + 4 > 0,\\
1 - 3{,}1k_1 - 1{,}77k_2 + 5{,}142k_1k_2 < 1.
\end{cases}
$$

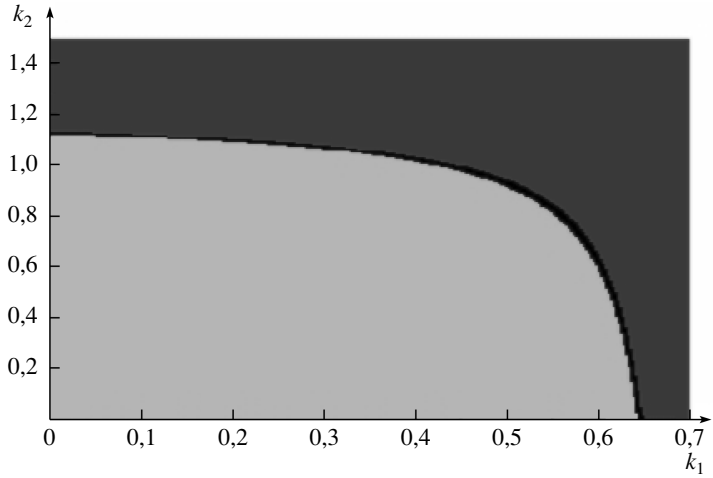

Рис. 1. Область допустимых значений адаптационных параметров.

Решение данной системы неравенств, определяющих треугольник устойчивости для неподвижной точки двумерного отображения цен (11), показано на рис. 1. Таким образом, выявлена область допустимых значений адаптационных ценовых параметров k_1 и k_2, которая на рис. 1 выделена серым цветом. Обеспечить устойчивость ценовому равновесию по Нэшу (0,33; 0,42) в условиях заданных значений себестоимостей фирм на уровне 0,1 и 0,15 позволит использование фирмами такой стратегии адаптации, которая основана на множестве сочетаний адаптационных параметров, находящихся в зоне допустимых значений.

Как только их значения отклоняются от допустимых, происходит потеря устойчивости равновесия и переход к другому неустойчивому режиму — хаотическому, т.е. какая бы ни была первоначальная цена у конкурента или у самой фирмы, они достигнут равновесия по Нэшу, если будут использовать ценовую стратегию в соответствии с найденными значениями адаптационных ценовых характеристик. Эти характеристики не способны изменить ценового равновесия но Нэшу, поэтому для увеличения своей эффективности фирмы должны использовать предлагаемое адаптивное управление.

2. *Определение параметров системы, способствующих переходу от периодического поведения к хаотическому.*

Как было показано выше, исследование устойчивости решения системы (11) аналитически не представляется возможным из-за сложности выражений, входящих в систему. В зависимости от параметров k_1, k_2, c_1, c_2 решение данной системы может быть регулярным или хаотическим. Для комплексного численного изучения поведения решения системы и динамических режимов, в которых может находиться система, положим: $\beta = \frac{1}{2}$; $k_1 = 0{,}9$; $k_2 = 1$; $c_1 = 0{,}1$; $c_2 = 0{,}15$. Примем также начальные условия: $p_{10} = 0{,}3$, $p_{20} = 0{,}31$.

Наличие разных режимов эволюции рыночных цен иллюстрирует бифуркационная диаграмма (дерево Фейгенбаума) от параметра k_1, см. рис. 2.

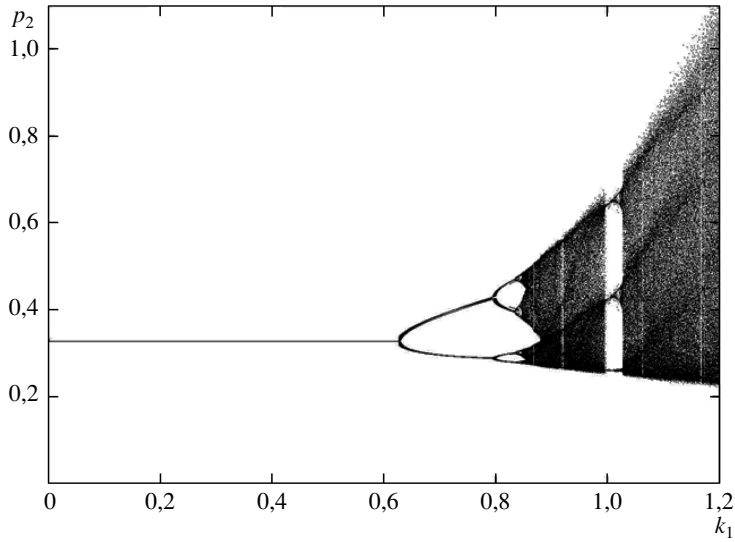

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма ценовой модели в зависимости от изменений параметра k_1 ($k_2 = 1$; $c_1 = 0{,}1$; $c_2 = 0{,}15$).

Наблюдается следующая последовательность режимов. Сначала имеется неподвижная точка, при значениях $k_1 < 0{,}61$, т.е Нэш-равновесие ценовой модели является устойчивым. Затем возникает синхронный режим периода два при $k_1 \in (0{,}61;\ 0{,}8)$. При дальнейшем росте управляющего параметра 2-цикл испытывает удвоение периода и далее возникает сложный, неповторяющийся процесс — динамический хаос. Белые просветы на диаграмме характеризуют окна периодичности.

Для исследования поведения моделируемой системы цен необходимо установить области, где она проявляет регулярные и хаотические свойства. Для этого можно использовать известные критерии динамического хаоса: показатели Ляпунова, автокорреляционную функцию и спектральную плотность, энтропию Колмогорова. Поскольку хаотичность является следствием неустойчивости фазовых траекторий, так что близкие траектории с течением времени расходятся, то представляется вполне естественным в качестве одного из таких критериев выбрать именно меру разбегания фазовых траекторий системы.

3. *Анализ устойчивости траекторий ценовой модели по Ляпунову.* Из теории нелинейной динамики и динамического хаоса известно, что критерием хаоса является присутствие положительного старшего характеристического ляпуновского показателя. Ляпуновский показатель является важной характеристикой системы, позволяет определить тип ее динамики (периодический, непериодический). Для одномерных отображений вида $x_{n+1} = f(x_n)$ ляпуновский показатель можно рассчитать как предел среднего логарифма производной функции $f(x_n)$: $\Lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |f'(x_i)|$. Для многомерных отображений ляпуновские показатели можно ввести через матрицу эволюции малых возмущений (матрицу Якоби) и ее собственные числа [30, 31].

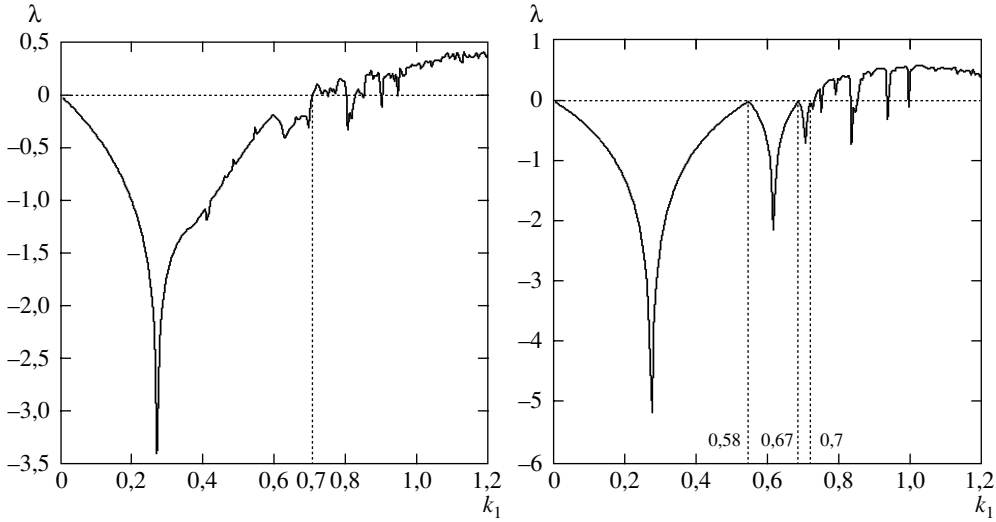

Рис. 3. Графики старшего ляпуновского характеристического показателя ценовой модели, построенные при значениях $k_2 = 1{,}2$ (слева) и $k_2 = 0$ (справа).

Для непериодических режимов ляпуновский показатель, как правило, находится численно. Полученный таким образом график зависимости ляпуновского показателя для отображения (11) от параметра k_1 приведен на рис. 3.

На графиках рис. 3 отчетливо видно, что в условиях реализации в системе периодического режима функционирования ляпуновский показатель является отрицательным. По графику ляпуновского показателя также можно зафиксировать точки, в которых происходят бифуркации удвоения периода, в таких точках ляпуновский показатель обращается в ноль. Положительные значения ляпуновского показателя характеризуют непериодический режим функционирования системы. Возникает ситуация, в которой с одной стороны, ляпуновский показатель положителен и режим неустойчив, т.е. две изначально близкие траектории с течением времени экспоненциально расходятся. С другой стороны, значения переменной остаются конечными. Такой режим можно идентифицировать как динамический хаос.

Области хаотичности в пространстве параметров k_1 и k_2 при фиксированных c_1, c_2 представлены на рис. 4.

Анализ карты старшего ляпуновского показателя показывает следующее. На карте хорошо видна граница между областями хаотических и нехаотических (регулярных) режимов: хаосу соответствует положительный ляпуновский показатель, регулярным режимам — нулевой и отрицательный. При выбранной палитре темному цвету соответствуют очень большие отрицательные значения ляпуновских показателей. Мультипликатор отображения при этом также близок к нулю, поэтому на этих линиях реализуются режимы максимальной устойчивости.

На основе карты ляпуновских показателей выявлены режимы максимальной устойчивости. Для первой фирмы это отражается в том, что с ростом

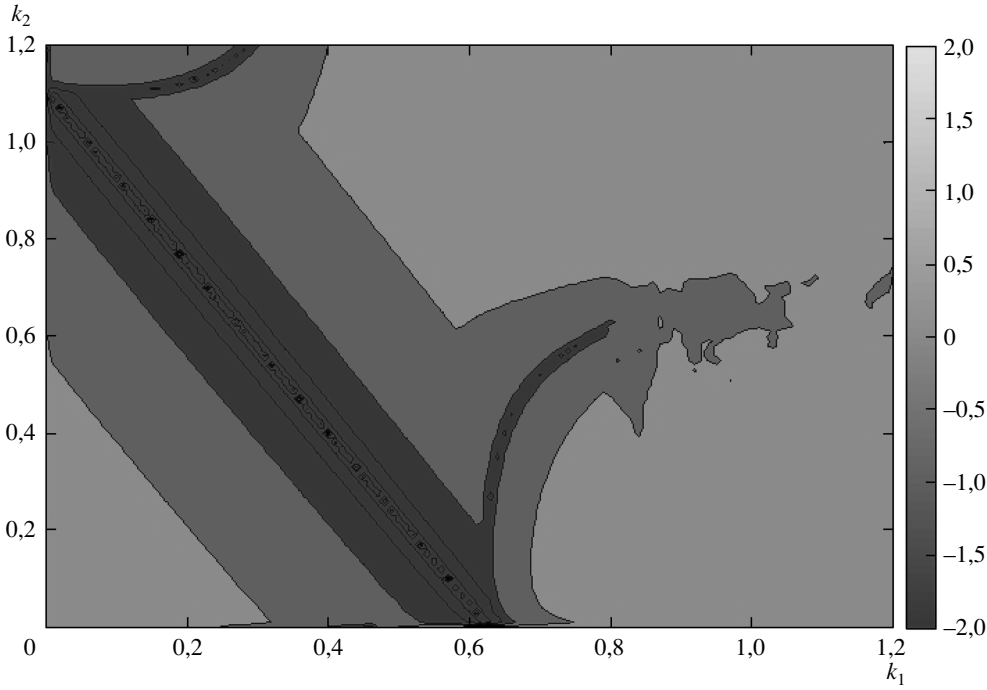

Рис. 4. Карта распределения старшего ляпуновского показателя на плоскости параметров k_1 и k_2 ценовой модели ($c_1 = 0{,}1$; $c_2 = 0{,}15$).

скорости реакции изменений ценовой политики, начиная с значения $k_2 = 0{,}6$ второй фирмы, первая должна реагировать пропорционально. Самые устойчивые ценовые стратегии наблюдаются при взвешенной ценовой политике обеих фирм. В условиях, когда вторая фирма начинает агрессивную ценовую войну и ее $k_2 > 0{,}8$, первая фирма, поступая аналогичным образом, рискует погрузить весь рынок в хаос. Поэтому мониторинг карты старшего ляпуновского показателя является залогом устойчивого развития рынка.

6. Заключение

В статье рассмотрены процессы рыночного взаимодействия фирм в условиях несовершенной конкуренции. Обнаружено, что динамическая система рыночного ценообразования может обладать сложными и многообразными типами движений, так что структура ее фазового пространства и зависимость этой структуры от параметров являются очень сложными. По структуре разбиения фазового пространства на траектории выделены два основных типа динамического поведения системы: устойчивость-неустойчивость и синхронность-хаотичность.

Построена модель ценовой конкуренции на базе теории отображений с использованием теоретико-игрового подхода к моделированию взаимодействия производителей и потребителей на рынке. Для прояснения взаимосвязи между устойчивостью локального равновесия по Нэшу и параметрами модели построена карта ляпуновского показателя. Положительные значения ляпу-

новского показателя характеризуют чувствительную зависимость хаотического поведения от начальных условий и свойственны для тех же наборов параметров, при которых система переходит к циклам и хаотическому режиму функционирования. Хаотическая ценовая динамика в модели рыночного ценообразования означает, что если одна из фирм изменит свою цену даже незначительно, то в долгосрочной перспективе возможны непредсказуемые изменения цен других производителей и всего рынка.

Предложены внутрифирменные механизмы адаптации цен, основанные на изменении цен, пропорциональном скорости изменения прибылей фирм. Применение этих механизмов позволит стабилизировать хаотическую динамику рынка, обеспечить устойчивость локального равновесия цен по Нэшу, а значит, сохранить режим максимальной эффективности функционирования фирм и рынка в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орлова Е.В.* Механизм эффективного ценообразования на продукцию промышленных предприятий // Экономика и предпринимательство. 2013. № 12–1. С. 622–626.
2. *Канеман Д.* Рациональный выбор, ценности и фреймы // Психологический журнал. 2003. Т. 24. № 4. С. 31–42.
3. *Орлова Е.В.* Моделирование функции полезности с учетом иррациональных факторов // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. 2012. № 3. С. 24–30.
4. *Орлова Е.* Экономическое поведение: синтез рационального и иррационального // Проблемы теории и практики управления. 2014. № 3. С. 127–136.
5. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
6. *Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К.* Динамические игры и их приложения в менеджменте. СПб.: Изд-во “Высшая школа менеджмента”, 2009.
7. *Филатов А.Ю., Айзенберг Н.И.* Математические модели несовершенной конкуренции. Иркутск: Изд-во ИГУ. 2012.
8. *Axelrod R.* The evolution of cooperation. N.Y.: Basic Book, 1984.
9. *Вурос А., Розанова Н.* Экономика отраслевых рынков. М.: ТЕИС, 2002.
10. *Васин А.А., Морозов В.В.* Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.
11. *Рии Т.* Nonlinear Economic Dynamics. Springer. 1997.
12. *Lorenz H.-W.* Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
13. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006.
14. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Основы теории сложных систем. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.
15. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Книжный дом “Либроком”, 2010.
16. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В.* и др. Бифуркации отображений. Саратов: ООО Издат. центр “Наука”, 2012.

17. *Островский А.В.* Об одном классе моделей конкурентного ценообразования в рыночной экономике // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. 2000. № 2. С. 58–77. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j058.pdf (дата обращения 06.03.2015).

18. *Лоскутов А.Ю.* Нелинейная оптимизация хаотической динамики рынка // Экономика и математические методы. 2010. Т. 46. № 3. С. 58–70.

19. *Holyst J.A., Urbanowicz K.* Chaos Control in Economical Model by Time-Delayed Feedback Method // Physica A. 2000. V. 287. P. 587–598.

20. *Kopel M.* Improving the Performance of an Economic System: Controlling Chaos // J. Evolutionary Econ. 1997. V. 7. P. 269–289.

21. *Ahmed E., Hassan S.Z.* On Controlling Chaos in Cournot-Games with Two and Three Competitors // Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences. 2000. V. 4. № 2. P. 189–194.

22. *Ahmed E., Elsadany A.A., Puu T.* On Bertrand Duopoly Game with Differentiated Goods // Applied Mathematics and Computation. 2015. V. 251. P. 169–179.

23. *Feichtinger G.* Economic Evolution and Demographic Change. Berlin: Springer, 1992.

24. *Agliari A., Gardini L., Puu T.* Global Bifurcations in Duopoly when the Cournot Point is Destabilized through a Subcritical Neimark Bifurcation. Working paper. 2003. URL: http://www.cerum.umu.se/digitalAssets/18/18883_cwp_66_03.pdf (дата обращения 04.03.2015).

25. *Stachurski D.* Economic Dynamics: Theory and Computation. Cambridge: MIT Press, 2009.

26. *Puu T.* Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. 2nd Ed. Springer, 2003.

27. *Неймарк Ю.И., Островский А.В.* О некоторых моделях ценообразования в рыночной экономике // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. № 6. С. 35–41.

28. *Ferguson B.S., Lim G.C.* Dynamic Economic Models in Discrete Time: Theory and Empirical Applications. N.Y.: Taylor & Francis e-Library, 2005.

29. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.

30. *Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A.* The Dimension of Chaotic Attractors // Physica 7D. 1983. P. 153–180.

31. *Мун Ф.* Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 19.05.2015