ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14, № 1 2008

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ВЫСОКОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ[1]

А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов

В работе проводится исследование стационарных задач естественной тепловой конвекции в приближении Буссинеска с нерегулярными граничными данными. Доказаны теоремы существования и единственности слабого решения таких задач. Исследована гладкость слабого решения в зависимости от гладкости исходных данных и гладкости границы области, в которой рассматривается задача.

Введение

В работе проводится исследование стационарных задач естественной тепловой конвекции неоднородной несжимаемой высоковязкой жидкости в приближении Буссинеска. Соответствующая краевая задача тепловой конвекции представляет собой систему уравнений с частными производными вместе с краевыми условиями для искомых функций. Система уравнений рассматривается в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и включает в себя уравнение Стокса вместе с уравнением несжимаемости для определения стационарного поля скоростей, а также стационарное уравнение теплового баланса для определения температуры. На границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω для искомого поля скоростей задается краевое условие прилипания, а для искомой температуры задается смешанное неоднородное краевое условие, в котором на части границы задан тепловой поток, а на оставшейся части границы задана температура. Граница Γ области Ω может иметь различную гладкость. В частности, она может быть кусочно-гладкой, а сама область может быть выпуклой или невыпуклой. Особенность исследуемой здесь краевой задачи тепловой конвекции состоит в том, что она рассматривается в областях с нерегулярной границей и нерегулярными граничными данными на этой границе. Это обстоятельство существенно усложняет исследование задачи, поскольку граничные данные в этих условиях, вообще говоря, не могут быть продолжены внутрь области регулярным образом, и краевая задача не может быть сведена классическим способом к краевой задаче с однородными граничными условиями. Это приводит к необходимости ослабления понятия решения краевой задачи. В работе вводится понятие слабого решения краевой задачи тепловой конвекции, доказываются теоремы существования и единственности такого решения. Для доказательства слабой разрешимости предварительно выводятся априорные оценки для возможного решения, с помощью которых показывается, что некоторый специальным образом сконструированный оператор является сжимающим. Неподвижная точка этого оператора дает "температурную" составляющую решения краевой задачи, "скоростная" составляющая находится из уравнения Стокса. Затем исследуется гладкость слабого решения в зависимости от гладкости границы области и гладкости исходных данных на этой границе. В этой части работы, в зависимости от гладкости упомянутых данных, доказана разрешимость краевой задачи в пространствах Соболева первого и второго порядков. Поскольку область Ω, в которой рассматривается задача, может иметь нерегулярную негладкую границу Γ, то компонента "скорости" решения по своим

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00029) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН по направлению "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики".

свойствам гладкости может несколько отставать от компоненты “температуры”. Эти факты отражены отдельно в последнем разделе, чтобы не загромождать основные утверждения работы деталями, связанными с теми или иными свойствами гладкости границы Γ.

Данная работа связана с исследованием граничных обратных задач [1, 2], в которых для процессов, описываемых моделями высоковязкой несжимаемой жидкости, требуется восстановить некоторый неизвестный тепловой граничный режим по какой-либо дополнительной информации о процессе. Такие обратные задачи часто возникают на практике, например, в геофизике и технике, когда прямые измерения искомых величин невозможны на определенной части границы объекта, но известна некоторая дополнительная информация об объекте на другой части его границы. По этой дополнительной информации и должна осуществляться идентификация искомых величин.

Рассматриваемые в работе задачи интенсивно изучаются в последнее время, они представляют как научный, так и прикладной интерес. Близкие по постановке задачи с регулярными граничными данными рассматривались в работах [3–6] (см. также библиографию в них).

1. Постановка задачи

В некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$, с границей $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \neq \varnothing$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \varnothing$ рассматривается движение высоковязкой несжимаемой теплопроводной жидкости, находящейся в поле силы тяжести под воздействием некоторого внешнего теплового режима. Математическая модель установившегося движения такой жидкости представлена следующей обезразмеренной краевой задачей в приближении Буссинеска [7]:

$$\Delta \boldsymbol{u} = \nabla p - \mathrm{Ra}\, T \boldsymbol{e}_n, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\Delta T = \boldsymbol{u} \nabla T, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{u}|_\Gamma = 0, \tag{1.4}$$

$$T|_{\Gamma_D} = v, \quad \partial T / \partial \boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = w, \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; $\boldsymbol{u} = (u_1(\boldsymbol{x}), \ldots, u_n(\boldsymbol{x}))$ — вектор скорости движения жидкости; $p = p(\boldsymbol{x})$ — давление; $T = T(\boldsymbol{x})$ — температура; $v = v(\boldsymbol{x})$ и $w = w(\boldsymbol{x})$ — заданные температурные режимы на Γ_D и Γ_N соответственно; Ra — число Рэлея; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ; $\boldsymbol{e}_n$ — орт оси x_n. Далее в качестве Ω будут рассматриваться ограниченные области, принадлежащие одному из следующих классов.

Класс C^2 [8, с. 67; 9, с. 31].

Класс, который мы обозначим через $\mathfrak{LUR}$; он включает области, удовлетворяющие следующим трем условиям из [9]: условию 1 [9, с. 212] (условие строгой липшицевости), условию 2 [9, с. 212] (условие равномерной ограниченности собственных чисел соответствующей квадратичной формы) и условию $\mathfrak{R}$ [9, с. 222] (условие сильной разрешимости задачи Пуассона с гладкими правыми частями и смешанными однородными граничными условиями, которые в данном случае соответствуют условиям (1.5)).

В [8, 9, 17] описаны различные подклассы областей, содержащиеся в классах C^2 или $\mathfrak{LUR}$.

Требуется исследовать вопрос о разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.5) в некотором слабом смысле, определив принадлежность искомых функций подходящим функциональным пространствам, а также наложив соответствующие условия на исходные данные задачи. Далее по тексту будут использоваться пространства Лебега $L_m(\Omega)$ и пространства Соболева $W^l_m(\Omega)$, $m \geq 1$, $l \geq 1$ [8–11], а также их векторные аналоги $\boldsymbol{L}_m(\Omega)$ и $\boldsymbol{W}^l_m(\Omega)$ соответственно, нормы в которых определяются обычным образом [9, с. 467]. Кроме того, будут использоваться пространства [12, с. 41]

$$\boldsymbol{H}(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}^1_2(\Omega) : \boldsymbol{u}|_\Gamma = 0, \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\},$$

$$G_1(\Omega) = \{g \in W_2^1(\Omega) : g|_{\Gamma_D} = 0\},$$

$$G_2(\Omega) = \{g \in W_2^2(\Omega) : g|_{\Gamma_D} = 0,\ \partial g/\partial \boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = 0\}.$$

В $G_1(\Omega)$ и $G_2(\Omega)$ будут использоваться нормы пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ соответственно или эквивалентные им нормы. Мера части Γ_D границы Γ считается положительной.

2. Определение слабого решения задачи

Для заданных функций $v \in L_2(\Gamma_D)$ и $w \in L_2(\Gamma_N)$ под слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.5) будем понимать пару функций $(\boldsymbol{u}, T) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$, которые удовлетворяют тождествам

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}\, dx = \mathrm{Ra} \int\limits_{\Omega} T \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{f}\, dx, \quad \forall\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}(\Omega), \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta g + \boldsymbol{u}\nabla g)\, T\, dx = \int\limits_{\Gamma_D} v\, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_N} w\, g\, d\Gamma, \quad \forall\, g \in G_2(\Omega). \tag{2.2}$$

Классическое решение краевой задачи (1.1)–(1.5) является и ее слабым решением, так как тождество (2.1) является следствием равенства (1.1) (оно определяется аналогично тождеству [12, с. 45–46] для обобщенного решения краевой задачи Стокса (1.1), (1.2), (1.4)), а тождество (2.2) является следствием равенства (1.3) (и получается умножением последнего на функцию $g \in G_2(\Omega)$ и интегрированием результата по Ω с применением второй формулы Грина [13, с. 171] и формулы интегрирования по частям [11, с. 75], а также с учетом граничных значений функций $\boldsymbol{u}$, T, g и условия несжимаемости (1.2)).

3. Вспомогательная задача

Для перехода от исходной краевой задачи (1.1)–(1.5) к соответствующей краевой задаче с однородными граничными условиями рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\Delta y = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$y|_{\Gamma_D} = v, \quad \partial y/\partial \boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = w. \tag{3.2}$$

Слабым решением краевой задачи (3.1), (3.2) назовем функцию $y \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} y\, \Delta\psi\, dx = \int\limits_{\Gamma_D} v\, \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_N} w\, \psi\, d\Gamma, \quad \forall\, \psi \in G_2(\Omega), \tag{3.3}$$

которое получается умножением уравнения (3.1) на функцию $\psi \in G_2(\Omega)$ и интегрированием результата по Ω с применением второй формулы Грина, а также с учетом граничных значений функций y и ψ.

Теорема 1. *Слабое решение краевой задачи* (3.1), (3.2) *существует и единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство методом транспонирования [14, с. 78–80], следуя схеме рассуждений из [15]. Возьмем произвольный элемент $h \in L_2(\Omega)$. Пусть $\psi \in G_1(\Omega)$ будет единственным обобщенным решением сопряженной к (3.1), (3.2) краевой задачи

$$\Delta\psi = h, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{3.4}$$

$$\psi|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial\psi/\partial\boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = 0, \tag{3.5}$$

удовлетворяющим тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \nabla\psi\nabla\phi\, dx = -\int\limits_{\Omega} h\,\phi\, dx, \quad \forall\, \phi \in G_1(\Omega). \tag{3.6}$$

Существование и единственность такого решения следуют из теоремы Лакса — Мильграма [16, с. 386], причем при $\phi = \psi$ из тождества (3.6) вытекает оценка

$$\|\nabla\psi\|_{L_2(\Omega)} \le c_1\, \|h\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.7}$$

где c_1 — константа из неравенства Пуанкаре — Фридрихса [11, с. 116]

$$\|g\|_{L_2(\Omega)} \le c_1\, \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, g \in G_1(\Omega). \tag{3.8}$$

Везде в оценках под c_i будем понимать положительные константы, не зависящие от оцениваемых величин. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть область Ω принадлежит классу C^2 или $\mathfrak{LUR}$, а $\psi \in G_1(\Omega)$ является обобщенным решением краевой задачи* (3.4), (3.5) *при каком-нибудь $h \in L_2(\Omega)$. Тогда $\psi \in G_2(\Omega)$.*

Доказательство. Для областей класса C^2 доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 4 из [17, гл. 4, § 2]. Для областей класса $\mathfrak{LUR}$ лемма доказывается аналогично теореме 7.1 [11, гл. 2, § 7] с учетом того, что для оператора Лапласа в таких областях справедливо неравенство

$$\|g\|_{W_2^2(\Omega)} \le c_2\, \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, g \in G_2(\Omega) \tag{3.9}$$

(второе основное неравенство [9, гл. 3, § 8; 11, гл. 2, § 6]). □

Итак, согласно доказанной лемме, $\psi \in G_2(\Omega)$. Тогда ψ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \Delta\psi\, \phi\, dx = \int\limits_{\Omega} h\,\phi\, dx, \quad \forall\, \phi \in L_2(\Omega),$$

из которого при $\phi = \Delta\psi$ следует оценка

$$\|\Delta\psi\|_{L_2(\Omega)} \le \|h\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.10}$$

Теперь рассмотрим отображение, которое переводит произвольный элемент $h \in L_2(\Omega)$ в единственное решение $\psi \in G_2(\Omega)$ задачи (3.6). В силу оценок (3.7), (3.8) и того, что уравнение (3.6) линейно, данное отображение линейно и непрерывно. На базе такого отображения определим линейный функционал

$$l(h) = \int\limits_{\Gamma_D} v\, \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_N} w\,\psi\, d\Gamma. \tag{3.11}$$

Докажем его ограниченность. Из (3.11) следует, что

$$|l(h)| \le \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} \Big\| \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}} \Big\|_{L_2(\Gamma)} + \ \|w\|_{L_2(\Gamma_N)} \|\psi\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{3.12}$$

Для функции $g \in G_2(\Omega)$ справедливы соотношения

$$\|\nabla g\|^2_{L_2(\Omega)} = -\int\limits_{\Omega} g\,\Delta g\, dx \le \|g\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)} \le c_1\, \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)},$$

которые дают неравенство

$$\|\nabla g\|_{L_2(\Omega)} \le c_1 \,\|\Delta g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, g \in G_2(\Omega). \tag{3.13}$$

Кроме того, в областях рассматриваемых классов справедливы неравенства [9, с. 79, с. 215]

$$\int\limits_{\Gamma} g^2\, d\Gamma \le \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon_1\, |\nabla g|^2 + \; c_{\varepsilon_1}\, g^2\right) dx, \quad \forall\, g \in W_2^1(\Omega),\ \varepsilon_1 > 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\right)^2 d\Gamma \le \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon_2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \; c_{\varepsilon_2}\, |\nabla g|^2\right) dx, \quad \forall\, g \in W_2^2(\Omega),\ \varepsilon_2 > 0,$$

из которых с учетом (3.8), (3.9), (3.13) следуют оценки

$$\|g\|_{L_2(\Gamma)} \le c_3 \,\|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, g \in G_1(\Omega), \tag{3.14}$$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\right\|_{L_2(\Gamma)} \le c_4 \,\|\Delta g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, g \in G_2(\Omega). \tag{3.15}$$

Таким образом, из неравенств (3.8), (3.10), (3.12), (3.14), (3.15) следует ограниченность функционала $l(h)$

$$|l(h)| \le (c_4 \,\|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1\, c_3 \,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)})\, \|h\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.16}$$

Итак, равенство (3.11) определяет линейный непрерывный функционал, действующий в $L_2(\Omega)$. Записывая тождество (3.3) в виде

$$(y, h) = l(h), \quad \forall\, h \in L_2(\Omega), \tag{3.17}$$

заключаем, что, согласно теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала, существует единственный элемент $y \in L_2(\Omega)$ такой, что выполняется (3.17) и для него справедлива оценка

$$\|y\|_{L_2(\Omega)} \le c_4 \,\|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1\, c_3 \,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)}, \tag{3.18}$$

которая при $h = y$ вытекает из (3.16), (3.17). Теорема доказана. □

4. Переход к однородной задаче

От краевой задачи (1.1)–(1.5) перейдем к рассмотрению соответствующей краевой задачи с однородными граничными условиями для T. Для этого введем замену $\tilde{T} = T - \Phi$, где Φ — решение краевой задачи (3.1), (3.2). Тогда однородная задача, соответствующая краевой задаче (1.1)–(1.5), запишется в следующем виде:

$$\Delta \boldsymbol{u} = \nabla p - \mathrm{Ra}\, (\tilde{T} + \Phi)\, \boldsymbol{e}_n, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.2}$$

$$\Delta \tilde{T} = \boldsymbol{u}\, (\nabla \tilde{T} + \nabla \Phi), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma} = 0, \tag{4.4}$$

$$\tilde{T}\Big|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial \tilde{T}/\partial \boldsymbol{n}\Big|_{\Gamma_N} = 0. \tag{4.5}$$

Вопрос о разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.5) сводится к вопросу о разрешимости краевой задачи (4.1)–(4.5). Под решением этой задачи будем понимать ее обобщенное решение.

5. Определение обобщенного решения однородной задачи

Под обобщенным решением однородной краевой задачи (4.1)–(4.5) будем понимать пару функций $(\boldsymbol{u}, \tilde{T}) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$, которые удовлетворяют тождествам

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}\, dx = \mathrm{Ra} \int\limits_{\Omega} (\tilde{T} + \Phi)\, \boldsymbol{e}_2\, \boldsymbol{f}\, dx, \quad \forall\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}(\Omega), \tag{5.1}$$

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla g + \boldsymbol{u}\, g) \nabla \tilde{T}\, dx = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u} \nabla g\, \Phi\, dx, \quad \forall\, g \in G_1(\Omega), \tag{5.2}$$

где Φ — слабое решение краевой задачи (3.1), (3.2).

Тождество (5.1) выводится аналогично тождеству (2.1). Тождество (5.2) получается умножением уравнения (4.3) на функцию $g \in G_1(\Omega)$ и интегрированием результата по Ω с применением первой формулы Грина [13, с. 171] и формулы интегрирования по частям с учетом граничных значений функций $\boldsymbol{u}$, $\tilde{T}$, g и условия несжимаемости (1.2).

6. Априорные оценки обобщенного решения однородной задачи

Получим некоторые априорные оценки обобщенного решения $(\boldsymbol{u}, \tilde{T}) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ краевой задачи (4.1)–(4.5). Подставим $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}$ в тождество (5.1). Тогда

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathrm{Ra} \int\limits_{\Omega} (\tilde{T} + \Phi)\, \boldsymbol{e}_2\, \boldsymbol{u}\, dx \le \mathrm{Ra}\, \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\|_{L_2(\Omega)} \le c_1\, \mathrm{Ra}\, \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Сокращая полученное неравенство на $\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L_2(\Omega)}$, получим

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L_2(\Omega)} \le c_1\, \mathrm{Ra}\, \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)}. \tag{6.1}$$

Подставим $g = \tilde{T}$ в тождество (5.2), дополнительно считая, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_\infty(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla \tilde{T} + \boldsymbol{u}\, \tilde{T}) \nabla \tilde{T}\, dx = \|\nabla \tilde{T}\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}\, \tilde{T}\, \nabla \tilde{T}\, dx = \|\nabla \tilde{T}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u} \nabla \tilde{T}\, \Phi\, dx$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}\, \Phi\, dx \le n \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}| |\nabla \tilde{T}| |\Phi|\, dx \le n\, \|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}.$$

Сокращая полученное неравенство на $\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}$, получим

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \le n\, \|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}. \tag{6.2}$$

Лемма 2. *Для обобщенного решения $\boldsymbol{u}$ задачи Стокса* (4.1), (4.2), (4.4), *удовлетворяющего тождеству* (5.1), *при $\tilde{T} + \Phi \in L_2(\Omega)$ имеет место включение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_\infty(\Omega)$ и справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_5\, \mathrm{Ra}\, \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)}. \tag{6.3}$$

Доказательство. При $n = 3$ для ограниченных областей класса C^2 включение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_\infty(\Omega)$ и неравенство (6.3) следуют из теоремы 2 [12, гл. 3, § 5] и теорем вложения [11, гл. 1, § 8]. При $n = 3$ для ограниченных областей класса $\mathfrak{LUR}$ включение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_\infty(\Omega)$ и неравенство (6.3) следуют из оценки (6.1) и теоремы 3.1 [18]. При $n = 2$ результаты леммы можно получить аналогичным образом с учетом особенностей теории потенциалов при $n = 2$ [19]. $\square$

Из неравенств (3.8) и (6.3) вытекает неравенство

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_5 \,\mathrm{Ra}\left(c_1 \,\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\right). \tag{6.4}$$

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие на входные данные исходной задачи

$$n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\left(c_4 \,\|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1\, c_3 \,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)}\right) < 1. \tag{6.5}$$

Тогда из неравенства (3.18) следует, что

$$n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} < 1. \tag{6.6}$$

Из неравенств (6.2) и (6.4) выразим $\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}$:

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{n\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}}{1 - n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}. \tag{6.7}$$

Из неравенств (6.4) и (6.7) получим

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \le \frac{c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}. \tag{6.8}$$

Итак, установлено, что если функции $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ и $\tilde{T} \in G_1(\Omega)$ удовлетворяют тождествам (5.1), (5.2), то имеет место включение $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_\infty(\Omega)$ и при выполнении неравенства (6.5) или (6.6) выполняются неравенства (6.7), (6.8).

7. Единственность обобщенного решения однородной задачи

Предположим, что краевая задача (4.1)–(4.5) имеет два обобщенных решения $(\boldsymbol{u}_1, \tilde{T}_1)$ и $(\boldsymbol{u}_2, \tilde{T}_2)$, удовлетворяющих тождествам (5.1), (5.2). Тогда разность таких решений $(\boldsymbol{u}_*, \tilde{T}_*)$, где $\boldsymbol{u}_* = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$, $\tilde{T}_* = \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2$, будет удовлетворять следующим тождествам:

$$\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{u}_*}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}\, dx = \mathrm{Ra} \int\limits_\Omega \tilde{T}_*\, \boldsymbol{e}_2\, \boldsymbol{f}\, dx, \quad \forall\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}(\Omega), \tag{7.1}$$

$$\int\limits_\Omega (\nabla g + \boldsymbol{u}_1\, g) \nabla \tilde{T}_*\, dx = \int\limits_\Omega \boldsymbol{u}_* \nabla g\, (\Phi - \tilde{T}_2)\, dx, \quad \forall\, g \in G_1(\Omega). \tag{7.2}$$

Неравенства, аналогичные (6.2) и (6.4), можно получить из тождеств (7.1) и (7.2) для $(\boldsymbol{u}_*, \tilde{T}_*)$

$$\|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} \le n\, \|\boldsymbol{u}_*\|_{L_\infty(\Omega)} (\|\tilde{T}_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)})\,, \tag{7.3}$$

$$\|\boldsymbol{u}_*\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{7.4}$$

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие на входные данные исходной задачи:

$$2\, n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\left(c_4 \,\|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1\, c_3 \,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)}\right) < 1. \tag{7.5}$$

Тогда из неравенства (3.18) следует, что

$$2\, n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} < 1. \tag{7.6}$$

Из неравенств (7.3) и (7.4), учитывая неравенства (3.8) и (6.7), справедливые для $\tilde{T}_2$, получим

$$\|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} \frac{1 - 2\, n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n\, c_1\, c_5 \,\mathrm{Ra}\, \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}} \le 0, \tag{7.7}$$

откуда следует, что $\|\nabla\tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} = 0$. Учитывая, что $\tilde{T}_*\Big|_{\Gamma_D} = 0$, заключаем, что $\tilde{T}_* = 0$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Тогда из тождества (7.1) при $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{u}_*$ следует, что $\|\nabla\boldsymbol{u}_*\|_{L_2(\Omega)} = 0$. Воспользовавшись условием $\boldsymbol{u}_*|_\Gamma = 0$, получаем, что $\boldsymbol{u}_* = 0$ для почти всех $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Отсюда следует единственность решения.

Итак, при выполнении неравенства (7.5) или (7.6) краевая задача (4.1)–(4.5) может иметь не более одного обобщенного решения $(\boldsymbol{u}, \tilde{T}) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$.

8. Доказательство существования обобщенного решения однородной задачи

Докажем существование обобщенного решения $(\boldsymbol{u}, \tilde{T})$ краевой задачи (4.1)–(4.5) в пространстве $\boldsymbol{H}(\Omega) \times G_1^*(\Omega)$, где

$$G_1^*(\Omega) = \{g \in G_1(\Omega) : \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)} \le n\, c_5\, \mathrm{Ra}\, \|\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}/(1 - n\, c_1\, c_5\, \mathrm{Ra}\|\Phi\|_{L_2(\Omega)})\}.$$

При этом считаем выполненным условие (6.5) или (6.6).

Множество $\boldsymbol{H}(\Omega) \times G_1^*(\Omega)$ является замкнутым подмножеством в банаховом пространстве $\boldsymbol{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ и поэтому является полным метрическим пространством с естественным расстоянием, индуцированным нормой пространства $\boldsymbol{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$.

Введем оператор

$$A : G_1^*(\Omega) \ni \eta \to A\eta = \zeta \in G_1^*(\Omega),$$

действующий следующим образом. Сначала по элементу $\eta \in G_1^*(\Omega)$ определяется элемент $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$, удовлетворяющий равенству

$$\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial x_j} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}\, dx = \mathrm{Ra} \int\limits_\Omega (\eta + \Phi)\, \boldsymbol{e}_2\, \boldsymbol{f}\, dx, \quad \forall\, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{H}(\Omega). \tag{8.1}$$

Затем по элементу $\boldsymbol{\xi}$ определяется элемент $\zeta \in G_1^*(\Omega)$, удовлетворяющий равенству

$$\int\limits_\Omega (\nabla g + \boldsymbol{\xi}\, g)\nabla\zeta\, dx = \int\limits_\Omega \boldsymbol{\xi}\nabla g\, \Phi\, dx, \quad \forall\, g \in G_1(\Omega). \tag{8.2}$$

Покажем, что оператор A определен корректно. Действительно, по заданному элементу $\eta \in G_1^*(\Omega)$ из равенства (8.1) однозначно определяется [11, с. 254] элемент $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{H}(\Omega)$, так как $\eta + \Phi \in L_2(\Omega)$, причем для него справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{\xi}\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_5\, \mathrm{Ra}\, (c_1\, \|\nabla\eta\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}). \tag{8.3}$$

Если элемент $\boldsymbol{\xi}$ задан, то однозначная разрешимость задачи (8.2) в $G_1(\Omega)$ следует из теоремы Лакса — Мильграма [16, с. 386]. Действительно, правая часть тождества (8.2) определяет линейную форму на $G_1(\Omega)$

$$L(g) = \int\limits_\Omega \boldsymbol{\xi}\nabla g\, \Phi\, dx,$$

а левая часть определяет билинейную форму

$$B(\zeta, g) = \int\limits_\Omega (\nabla g + \boldsymbol{\xi}\, g)\nabla\zeta\, dx,$$

причем она коэрцитивна и ограничена на $G_1(\Omega)\times G_1(\Omega)$,

$$B(g,g)=\int\limits_{\Omega}(\nabla g+\boldsymbol{\xi}\,g)\nabla g\,dx=\|\nabla g\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$\Big|B(\zeta,g)\Big|\le(1+n\,c_1\,\|\boldsymbol{\xi}\|_{L_\infty(\Omega)})\|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\zeta\|_{L_2(\Omega)}.$$

При этом для ζ справедлива оценка (аналогичная оценке (6.2)):

$$\|\nabla\zeta\|_{L_2(\Omega)}\le n\,\|\boldsymbol{\xi}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}.\tag{8.4}$$

При помощи оценок (8.3) и (8.4) нетрудно убедиться, что оператор A на самом деле действует в $G_1^*(\Omega)$. Покажем теперь, что оператор A является сжимающим. Имеем

$$\|\nabla A\eta_1-\nabla A\eta_2\|_{L_2(\Omega)}=\|\nabla\zeta_1-\nabla\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}\le n\,\|\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2\|_{L_\infty(\Omega)}(\|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}+\|\Phi\|_{L_2(\Omega)})$$
$$\le n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,(\|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}+\|\Phi\|_{L_2(\Omega)})\|\nabla\eta_1-\nabla\eta_2\|_{L_2(\Omega)}$$
$$\le n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\left(\frac{n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}}{1-n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}+\ \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\right)\|\nabla\eta_1-\nabla\eta_2\|_{L_2(\Omega)}=q\,\|\nabla\eta_1-\nabla\eta_2\|_{L_2(\Omega)},$$
$$q=\frac{n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1-n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}.$$

Если выполнено неравенство (7.5) или (7.6), то $0<q<1$ и оператор A является сжимающим. Тогда, согласно теореме Банаха о неподвижной точке [20, с. 88], существуют единственный элемент $\tilde T\in G_1^*(\Omega)$ и соответствующий ему элемент $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}(\Omega)$ такие, что $A\tilde T=\tilde T$, причем пара $(\boldsymbol{u},\tilde T)$ доставляет обобщенное решение краевой задаче (4.1)–(4.5). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Если исходные данные краевой задачи* (1.1)–(1.5) *таковы, что* $v\in L_2(\Gamma_D)$, $w\in L_2(\Gamma_N)$ *и выполняется неравенство* (7.5) *или* (7.6), *то ее слабое решение* $(\boldsymbol{u},T)\in\boldsymbol{H}(\Omega)\times L_2(\Omega)$, *удовлетворяющее тождествам* (2.1), (2.2), *существует и единственно. Кроме того,* $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}_\infty(\Omega)$, *а компонента* T *слабого решения может быть представлена в виде суммы* $T=\tilde T+\Phi$, *состоящей из компоненты* $\tilde T\in G_1(\Omega)$ *обобщенного решения* $(\boldsymbol{u},\tilde T)\in\boldsymbol{H}(\Omega)\times G_1(\Omega)$ *краевой задачи* (4.1)–(4.5) *с однородными граничными условиями для* T *и слабого решения* $\Phi\in L_2(\Omega)$ *вспомогательной задачи* (3.1), (3.2) *с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы следующие оценки*:

$$\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\le c_4\,\|v\|_{L_2(\Gamma_D)}+c_1\,c_3\,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)},$$
$$\|\tilde T\|_{L_2(\Omega)}\le c_1\,\|\nabla\tilde T\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\|T\|_{L_2(\Omega)}\le\|\tilde T\|_{L_2(\Omega)}+\|\Phi\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\|\nabla\tilde T\|_{L_2(\Omega)}\le\frac{n\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|^2_{L_2(\Omega)}}{1-n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}},\tag{8.5}$$
$$\|\nabla\tilde T\|_{L_2(\Omega)}\le n\,\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\Phi\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\le\frac{c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1-n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}.$$

С вычислительной точки зрения важно, что сжимающий оператор обеспечивает сходимость соответствующих последовательных приближений к неподвижной точке со скоростью геометрической прогрессии:

$$T_{k+1}=A\,T_k,\quad\|T_k-\tilde T\|_{G_1(\Omega)}\le\frac{q^k}{1-q}\ \|T_1-T_0\|_{G_1(\Omega)},\quad k=0,1,2,\dots\,,$$

где T_0 — произвольное начальное приближение из $G_1^*(\Omega)$.

9. Свойства гладкости слабого решения при гладких исходных данных

Краевую задачу (3.1), (3.2) с помощью замены искомой функции $\tilde{y} = y - \theta$ можно преобразовать к следующей краевой задаче:

$$\Delta\tilde{y} = -\Delta\theta, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{9.1}$$

$$\tilde{y}|_{\Gamma_D} = v - \theta|_{\Gamma_D}, \quad \partial\tilde{y}/\partial n|_{\Gamma_N} = w - \partial\theta/\partial n|_{\Gamma_N}. \tag{9.2}$$

Исследуем сначала гладкость слабого решения краевой задачи (3.1), (3.2), когда $w \in L_2(\Gamma_N)$ и $\theta \in W_2^1(\Omega)$, $\theta|_{\Gamma_D} = v$.

Под решением краевой задачи (9.1), (9.2) теперь будем понимать ее обобщенное решение. Обобщенным решением краевой задачи (9.1), (9.2) назовем функцию $\tilde{y} \in G_1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega \nabla\tilde{y}\nabla g\,dx = -\int\limits_\Omega \nabla\theta\nabla g\,dx + \int\limits_{\Gamma_N} w\,g\,d\Gamma, \quad \forall\, g \in G_1(\Omega). \tag{9.3}$$

Ясно, что обобщенное решение задачи (9.1), (9.2) является решением задачи (3.1), (3.2) в слабом смысле и, наоборот, достаточно гладкое слабое решение задачи (3.1), (3.2) является обобщенным решением задачи (9.1), (9.2).

Существование и единственность обобщенного решения краевой задачи (9.1), (9.2) доказываются с помощью теоремы Лакса — Мильграма, причем при $g = \tilde{y}$ из (9.3) и вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Gamma_N)$ [11, с. 85] вытекает следующая оценка:

$$\|\nabla\tilde{y}\|_{L_2(\Omega)} \le \|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} + c_6\,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)},$$

откуда, возвращаясь к функции y, получаем, что $y \in W_2^1(\Omega)$, $y|_{\Gamma_D} = v$ и

$$\|\nabla y\|_{L_2(\Omega)} \le 2\,\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} + c_6\,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)}.$$

Таким образом, в краевой задаче (4.1)–(4.5) можно считать $\Phi \in W_2^1(\Omega)$, $\Phi|_{\Gamma_D} = v$. Из теоремы 2 следует, что $\tilde{T} \in G_1(\Omega)$, поэтому $\tilde{T} + \Phi = T \in W_2^1(\Omega)$. Тогда из леммы 1 и единственности обобщенного решения краевой задачи (4.1)–(4.5) вытекает, что $\tilde{T} \in G_2(\Omega)$.

Под решением краевой задачи (4.1)–(4.5) теперь будем понимать ее сильное решение. Сильным решением краевой задачи (4.1)–(4.5) назовем пару функций $(\boldsymbol{u}, \tilde{T}) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$, которые удовлетворяют тождеству (5.1) и тождеству

$$\int\limits_\Omega \Delta\tilde{T}\,g\,dx = \int\limits_\Omega \boldsymbol{u}\,(\nabla\tilde{T} + \nabla\Phi)\,g\,dx, \quad \forall\, g \in L_2(\Omega). \tag{9.4}$$

При $g = \Delta\tilde{T}$ из (9.4) получается оценка

$$\|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \le n\,\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\big(\|\nabla\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}\big),$$

из которой с учетом (3.13), (6.8) следуют неравенства

$$\|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{n\,\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n\,c_1\,\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}},$$

$$\|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{n\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - 2\,n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}.$$

Теорема 3. *Если исходные данные краевой задачи* (1.1)–(1.5) *таковы, что* $w \in L_2(\Gamma_N)$, $\theta \in W_2^1(\Omega), \theta|_{\Gamma_D} = v$ *и выполняется неравенство* (7.5) *или* (7.6)*, то ее слабое решение* $(\boldsymbol{u}, T) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$*, удовлетворяющее тождествам* (2.1), (2.2)*, существует, единственно и обладает дополнительной гладкостью:* $(\boldsymbol{u}, T) \in \boldsymbol{L}_\infty(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$*. Кроме того, компонента* T *слабого решения может быть представлена в виде суммы* $T = \tilde{T} + \Phi$*, состоящей из компоненты* $\tilde{T} \in G_2(\Omega)$ *сильного решения* $(\boldsymbol{u}, \tilde{T}) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$ *краевой задачи* (4.1)–(4.5) *с однородными граничными условиями и обобщенного решения* $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ *вспомогательной задачи* (3.1), (3.2) *с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы оценки* (8.5)*, а также оценки*

$$
\begin{gathered}
\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)} \leq 2\,\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} + c_6\,\|w\|_{L_2(\Gamma_N)},\\
\|\nabla T\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\nabla\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)},\\
\|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{n\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - 2\,n\,c_1\,c_5\,\mathrm{Ra}\,\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}},\\
\|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{n\,\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n\,c_1\,\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}},\\
\|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq n\,\|\boldsymbol{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\big(\|\nabla\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}\big).
\end{gathered}
\tag{9.5}
$$

Исследуем теперь гладкость слабого решения краевой задачи (3.1), (3.2), когда $\theta \in W_2^2(\Omega)$, $\theta|_{\Gamma_D} = v$, $\partial\theta/\partial\boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = w$.

Под решением краевой задачи (9.1), (9.2) теперь будем понимать ее сильное решение. Сильным решением краевой задачи (9.1), (9.2) назовем функцию $\tilde{y} \in G_2(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$
\int\limits_\Omega \Delta\tilde{y}\,g\,dx = -\int\limits_\Omega \Delta\theta\,g\,dx, \quad \forall\, g \in L_2(\Omega). \tag{9.6}
$$

Как уже говорилось выше, в силу того что $\Delta\theta \in L_2(\Omega)$, краевая задача (9.1), (9.2) однозначно разрешима в $G_2(\Omega)$.

Ясно, что сильное решение задачи (9.1), (9.2) является обобщенным решением этой задачи и является слабым решением задачи (3.1), (3.2) и, наоборот, достаточно гладкое слабое решение задачи (3.1), (3.2) или достаточно гладкое обобщенное решение задачи (9.1), (9.2) являются сильным решением задачи (9.1), (9.2).

Из тождества (9.6) при $g = \Delta\tilde{y}$ получается следующая оценка:

$$
\|\Delta\tilde{y}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\Delta\theta\|_{L_2(\Omega)},
$$

откуда, возвращаясь к функции y, можно получить

$$
\|\Delta y\|_{L_2(\Omega)} \leq 2\,\|\Delta\theta\|_{L_2(\Omega)}.
$$

Таким образом, в краевой задаче (4.1)–(4.5) можно считать $\Phi \in W_2^2(\Omega)$, $\Phi|_{\Gamma_D} = v$, $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = w$.

Теорема 4. *Если исходные данные краевой задачи* (1.1)–(1.5) *таковы, что* $\theta \in W_2^2(\Omega)$, $\theta|_{\Gamma_D} = v, \partial\theta/\partial\boldsymbol{n}|_{\Gamma_N} = w$ *и выполняется неравенство* (7.5) *или* (7.6)*, то ее слабое решение* $(\boldsymbol{u}, T) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$*, удовлетворяющее тождествам* (2.1), (2.2)*, существует, единственно и обладает дополнительной гладкостью:* $(\boldsymbol{u}, T) \in \boldsymbol{L}_\infty(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$*. Кроме того, компонента* T *слабого решения может быть представлена в виде суммы* $T = \tilde{T} + \Phi$*, состоящей из компоненты* $\tilde{T} \in G_2(\Omega)$ *сильного решения* $(\boldsymbol{u}, \tilde{T}) \in \boldsymbol{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$ *краевой задачи* (4.1)–(4.5) *с однородными граничными условиями и сильного решения* $\Phi \in W_2^2(\Omega)$ *вспомогательной задачи* (3.1), (3.2) *с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы оценки* (8.5), (9.5), *а также оценки*

$$\|\Delta\Phi\|_{L_2(\Omega)} \le 2\,\|\Delta\theta\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\|\Delta T\|_{L_2(\Omega)} \le \|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\Phi\|_{L_2(\Omega)}.$$

10. Замечание о гладкости компоненты $\boldsymbol{u}$ в теоремах 2–4

В теоремах 2–4 отражена в основном зависимость гладкости компоненты T решения $(\boldsymbol{u}, T)$ задачи (1.1)–(1.5) от гладкости исходных данных. С повышением гладкости компоненты T повышается и гладкость компоненты $\boldsymbol{u}$. Однако здесь нет прямой пропорциональной зависимости, поскольку на свойства гладкости компоненты $\boldsymbol{u}$ сильное влияние оказывает регулярность границы Γ области Ω. Отметим некоторые результаты в этом направлении.

Из результатов [12, гл. 3, § 5] следует, что для областей класса C^2 компонента $\boldsymbol{u}$ решения $(\boldsymbol{u}, T)$ обладает большей дополнительной гладкостью, чем указано в теоремах 2–4. Именно, когда $T \in W_2^l(\Omega)$, $l = 0, 1, 2$, то $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^{l+2}(\Omega)$. Поэтому для областей этого класса можно дополнительно считать, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^2(\Omega)$ в теореме 2, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^3(\Omega)$ в теореме 3, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^4(\Omega)$ в теореме 4.

Из результатов [18] следует, что для областей класса $\mathfrak{LUR}$ компоненту $\boldsymbol{u}$ решения $(\boldsymbol{u}, T)$ в теоремах 2–4 можно считать обладающей дополнительной гладкостью: $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^{3/2}(\Omega)$. Однако если область этого класса является выпуклым многоугольником (при $n = 2$) или выпуклым многогранником (при $n = 3$), то в теоремах 2–4 можно считать, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_2^2(\Omega)$ [21, 22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби : Тр. междунар. семинара. 2005. Екатеринбург: УрГУ, 2006. Т. 2. С. 82–91.
2. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
3. **Алексеев Г.В.** Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнения тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
4. **Алексеев Г.В., Смышляев А.Б., Терешко Д.А.** Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса при смешанных краевых условиях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 1. С. 66–80.
5. **Алексеев Г.В.** Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
6. **Алексеев Г.В.** Разрешимость краевой задачи для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 9, № 1. С. 13–27.
7. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Dover Publications, 1981.
8. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Acad. Press, 1975.
9. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
10. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
11. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
12. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961.
13. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
14. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

15. **Lukaszewicz G., Rojas-Medar M., Santos M.** Stationary micropolar fluid flows with boundary data in L^2 // J. Math. Anal. Appl. 2002. Vol. 271, no. 1. P. 91–107.
16. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.
17. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
18. **Brown R.M., Shen Z.** Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains // Indiana Univ. Math. J. 1995. Vol. 44, no. 4. P. 1183–1206.
19. **Brown R.M., Perry P.A., Shen Z.** On the dimension of the attractor for the non-homogenous Navier–Stokes equations in non-smooth domains // Indiana Univ. Math. J. 2000. Vol. 49, no. 1. P. 81–112.
20. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
21. **Kellogg R.B., Osborn J.E.** A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon // J. Func. Anal. 1976. Vol. 21, no. 4. P. 397–431.
22. **Dauge M.** Stationary Stokes and Navier–Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part I: Linearized equations // SIAM J. Math. Anal. 1989. Vol. 20, no. 1. P. 74–97.

Поступила 16.11.2007