Задачи M2494–M2497, Ф2501–Ф2504,
Квант, 2018, номер 1, 20–21

З А Д А Ч Н И К «К В А Н Т А»

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2494–М2497, Ф2501–Ф2504

М2494. Доска 20×20 покрашена в два цвета: нечетные столбцы покрашены в черный цвет, четные – в белый. На всех черных клетках стоит по одному шахматному королю. Каждым ходом один из королей сдвигается на свободную соседнюю по стороне или диагонали клетку. За какое наименьшее число ходов все короли могут снова встать на черные клетки, причем так, что ни один король не окажется в клетке, в которой стоял изначально?

Р.Ефремов

М2495. а) Найдите остаток от деления числа $(2n-1)^{(2n-1)} + (2n+1)^{(2n+1)}$ на $(2n)^3$.
б) Найдите остаток от деления числа $(2n-1)^{(2n-1)^{(2n-1)}} + (2n+1)^{(2n+1)^{(2n+1)}}$ на $(2n)^2$ и на $(2n)^3$.

В.Расторгуев

М2496. На плоскости расположено нечетное количество городов так, что все попарные расстояния между ними различны. Некоторые пары городов соединены (двусторонними) авиарейсами. Оказалось, что из каждого города выходят ровно два авиарейса, причем это рейсы в два наиболее удаленных города. Докажите, что, используя авиарейсы, из любого города можно добраться до любого другого.

А.Гайфуллин

М2497. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Внутри четырехугольника выбираются пары точек P, Q, удовлетворяющие условию

$$\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$$

(рис.1). Докажите, что всевозможные прямые PQ проходят через фиксированную точку либо все они параллельны друг другу.

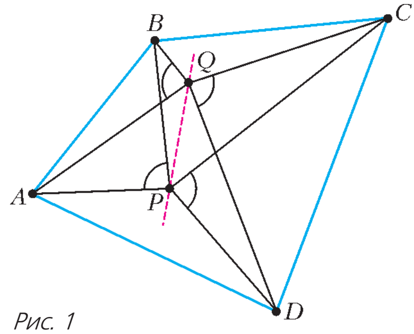

Рис. 1

С.Берлов

Ф2501. Механическая модель молекулы состоит из двух шариков, скрепленных невесомой пружинкой. Такая модель-молекула движется к жесткой стенке так, как показано на рисунке 2 (прямая линия,

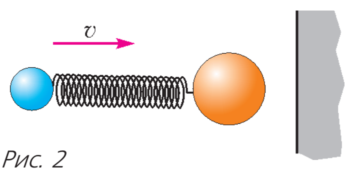

Рис. 2

проходящая через центры шариков, перпендикулярна плоскости стенки). Шарики движутся с одинаковыми скоростями, пружинка не деформирована. При каком соотношении масс атомов-шариков удар молекулы о стенку будет резонансным? При таком ударе энергия колебаний молекулы после «ухода» от стенки должна быть максимальной. Удар шарика о стенку считайте абсолютно упругим.

А.Власов

Ф2502. С одним молем одноатомного газа провели процесс, состоящий из четырех участков. На участке *1–2* газ совершил работу A, при этом температура была пропорциональной объему в степени n. Температуры T_1 и T_2 известны, причем $T_1 < T_2$. На участке *2-3* газ изотермически расширялся, на участке *3–4* он адиабатически расширялся, а на участке *4–1* – изотермически сжимался. Какова работа, совершенная газом на участке *3–4*?

К.Парфёнов

Ф2503. Однократно ионизованный атом гелия (ион) пересекает ось симметрии длинного, $L = 100$ м, цилиндрического, с площадью поперечного сечения $S = 100\ \text{см}^2$, магнита на расстоянии $l = 100$ см от его южного полюса (вне магнита). В этот момент скорость иона была направлена перпендикулярно оси симметрии магнита, а ускорение составляло угол 100° с вектором индукции магнитного поля. Какой была скорость иона в этот момент? Какова длина волны де Бройля, соответствующая этой скорости иона? Модуль заряда электрона равен $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Магнитный дипольный момент электрона, связанный с наличием у него собственного момента количества движения (спина), равен $\mu_e = 928 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл.

С.Варламов

Ф2504. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100$ нФ и катушки индуктивностью $L = 100$ мкГн. Емкость конденсатора периодически изменяют с амплитудой $\Delta C = C/100$ и с периодом вдвое меньшим, чем период собственных колебаний контура. Оцените максимальное время, за которое амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе на собственной частоте достигнет 100 мВ. Считайте, что тепловые колебания в контуре имеют характерную тепловую энергию kT. Температура равна 100 К. Омическое сопротивление проводов катушки равно нулю.

Фольклор

Решения задач М2482–М2485, Ф2489–Ф2492

М2482. *Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом B, в котором $AD > AB$ (рис.1). На диагонали AC выбраны такие*

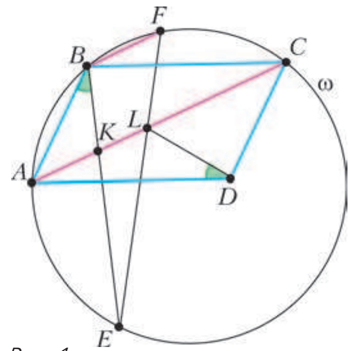

Рис. 1

точки K и L, что $\angle ABK = \angle ADL$ (точки A, K, L, C различны, причем K лежит между A и L). Прямая BK пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E, а прямая EL пересекает ω в точках E и F. Докажите, что $BF \parallel AC$.

Рассмотрим точку F_1, симметричную D относительно прямой AC (рис.2).

Заметим, что $F_1 \in \omega$. Действительно: по свойству параллелограмма $\angle ABC = \angle ADC$; $\angle ADC = \angle AF_1C$ из симметрии.

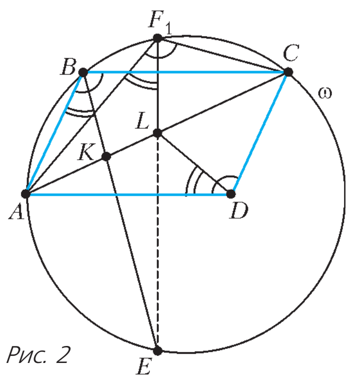

Рис. 2