А. Д. Баев, Д. А. Чечин, С. А. Шабров, Н. И. Работинская, Н. А. Бабайцева, Априорная оценка решений одной граничной задачи для псевдодифференциального уравнения с вырождением, *Изв. вузов. Матем.*, 2021, номер 5, 6–10

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-5-6-10

Известия вузов. Математика
2021, № 5, с. 6–10
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Д. БАЕВ, Д.А. ЧЕЧИН, С.А. ШАБРОВ, Н.И. РАБОТИНСКАЯ, Н.А. БАБАЙЦЕВА

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Аннотация. В работе получена коэрцитивная априорная оценка решений граничной задачи в полупространстве для вырождающегося псевдодифференциального уравнения. Левая часть уравнения представляет собой сумму певдодифференциального оператора с вырождением, построенного по специальному интегральному преобразованию, и оператора дифференцирования. Априорная оценка получена в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева, нормы в которых построены с помощью специального интегрального преобразования.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся уравнение, псевдодифференциальный оператор с вырождением, весовое пространство С.Л. Соболева.

УДК: 517.946

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-5-6-10

Теория вырождающихся уравнений в настоящее время интенсивно развивается. Такие уравнения описывают математические модели, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. Краевые задачи для таких уравнений относятся к неклассическим задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Развитие теории коэрцитивной разрешимости краевых задач для вырождающихся уравнений потребовало соответствующего развития теории псевдодифференциальных операторов. Одним из направлений развития этой теории стало введение и исследование классов вырождающихся псевдодифференциальных операторов, построенных с помощью специального интегрального преобразования F_α, введенного в [1]. Изучение вырождающихся псевдодифференциальных операторов с постоянным символом позволило разработать методы исследования общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений (см. [1], [2]). При этом вырождение носит не только “степенной” характер, но и произвольный. Другой метод использования псевдодифференциальных операторов в теории вырождающихся уравнений был применен С.З. Левендорским [3]. В отличие от работы [3] мы не требуем, чтобы весовая функция $\alpha(t)$, определяющая вырождение, принадлежала пространству $C^\infty(R^1)$.

Поступила в редакцию 27.04.2020, после доработки 27.04.2020. Принята к публикации 30.03.2021.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00197).

Изучение некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом позволило исследовать коэрцитивную разрешимость и получить априорные оценки решений новых классов краевых задач для вырождающихся уравнений (см. [4]–[6]).

В настоящей работе исследуется граничная задача в полупространстве вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом. При доказательстве основной теоремы используются свойства вырождающихся псевдодифференциальных операторов, полученные в [7].

Рассмотрим функцию $\alpha(t),\ t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geq d$ при некотором $d > 0$. Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} \right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}},$$

определенное, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля $\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}$, что дает возможность расширить это преобразование до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$. Это равенство позволяет также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)},$$

где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ — обратное преобразование Фурье. На функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, \ldots$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \ \partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Преобразование F_α переводит операцию $D_{\alpha,t}$ в операцию умножения на двойственную переменную η.

Рассмотрим вырождающийся псевдодифференциальный оператор, определенный формулой

$$P^{(\sigma)}\left(t, D_x, D_{\alpha,t}\right) v\left(x,t\right) = F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha \left[p\left(t,\xi,\eta\right) F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v\left(x,t\right)\right]\right].$$

Здесь $D^\tau_x = i^{|\tau|}\partial^{\tau_1}_{x_1}\partial^{\tau_2}_{x_2}\ldots\partial^{\tau_{n-1}}_{x_{n-1}},\ F_{x\to\xi}\ (F^{-1}_{\xi\to x})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье, переводящее переменную $x \in R^{n-1}$ в двойственную переменную $\xi \in R^{n-1}$.

Определение 1. Будем говорить, что символ $p(t,\xi,\eta)$ вырождающегося псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in \mathrm{R}^1$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, если функция $p(t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $t \in \Omega$ и $\eta \in R^1$. Причем при всех $j = 0, 1, 2, \ldots,\ l = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial^l_\eta \lambda(t,\xi,\eta)| \leq c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - \rho l + \delta j}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1},\ \ \eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок.

Условие 1. Существует число $\mu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\mu}(t)| \le c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \ge 2N - |\sigma|$, где

$$N \ge \max_{0 \le p_1 \le l} \left\{ 2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2} \right\},\ l = 1,\ 2, \dots,$$

σ — некоторое действительное число.

Условие 1$'$. Выполнено условие 1 при $\sigma = s + q,\ \ l = 1, 2, \dots, [s/q]$, где $q > 1,\ \ s \ge 0$ — действительные числа.

Можно показать, что указанное выше число μ существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \Big| F_\alpha F_{x \to \xi}[v(x,t)] \Big|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ $(s \ge 0,\ q > 1)$ состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q,\lambda} = \left\{ \sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F^{-1}_{\xi \to x} F^{-1}_\alpha \left[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s - ql}{2}} F_\alpha F_{x \to \xi}[\partial^l_t v] \right] \right\|^2_{L_2(R^+_n)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[s/q]$ — целая часть числа s/q.

В R^n_+ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &P^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})\, v(x,t) - \partial_t v(x,t) = F(x,t), \\ &v(x,t)|_{t=0} = G(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(q)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 2. Символ $p(t,\xi,\eta)$ принадлежит классу $S^q_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+,\ 0 \le \delta < \rho \le 1$, $q > 1$ — действительное число, $\Omega \subset \bar{R}^1_+$. Причем с некоторой константой $c > 0$, не зависящей от $t \in \Omega,\ \ \xi \in R^{n-1},\ \ \eta \in R^1,\ \ |\xi| + |\eta| > 0$, справедливы оценки

$$-\mathrm{Re}\, p(t,\xi,\eta) \ge c(1 + |\xi| + |\eta|)^q \ \text{ при всех } \ t \in \Omega, \xi \in R^{n-1}, \eta \in R^1.$$

Доказана

Теорема. *Пусть $s \ge 0, q > 1$ — действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $p(t,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любого решения $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (1) справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \le c \left(\|F\|_{s,\alpha,q} + \|G\|_{s+\frac{1}{2}q} + \|v\|_{L_2(R^n_+)} \right)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $v,\ F,\ G$.

Литература

[1] Баев А.Д. *Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы*, Докл. Академии наук, **265** (5), 1044–1046 (1982).

[2] Баев А.Д. *Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка*, Докл. Академии наук, **422** (6), 727–728 (2008).

[3] Левендорский С.З. *Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе,* Матем. сб., **111** (153), 483–501 (1980).

[4] Баев А.Д., Ковалевский Р.А. *Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений*, Докл. Академии наук, **461** (1), 7–9 (2016).

[5] Баев А.Д., Ковалевский Р.А., Кобылинский П.А. *О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением,* Докл. Академии наук, **471** (4), 387–390 (2016).

[6] Баев А.Д., Садчиков П.В. *Корректность некоторых краевых задач, моделирующих процессы с вырождением*, Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физ.-матем. науки, **4** (88), 50–56 (2009).

[7] Баев А.Д., Работинская Н.И. *О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов,* Докл. Академии наук, **477** (1), 7–10 (2017).

Александр Дмитриевич Баев

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Дмитрий Александрович Чечин

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Сергей Александрович Шабров

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: shaspoteha@mail.ru

Наталья Ивановна Работинская

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: rabotinskaya@math.vsu.ru

Наталия Александровна Бабайцева

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: babaytseva.nata 73@mail.ru

$\boxed{\text{A.D. Baev}}$, D.A. Chechin, S.A. Shabrov, N.I. Rabotinskaya, and N.A. Babaitseva

A priori estimation of solutions of a boundary problem for a pseudodifferential equation with degeneration

Abstract. In this paper, we obtain a coercive a priori estimation of solutions to the boundary value problem in a half-space for a degenerate psedodifferential equation. The left part of the equation is the sum of the pseudo-differential operator with degeneracy, constructed by a special integral transformation, and the differentiation operator. A priori estimation is obtained in special weight spaces of the type of S. L. Sobolev spaces, the norms in which are constructed using a special integral transformation.

Keywords: a priori estimation, degenerate equation, pseudo-differential operator with degeneration, S. L. Sobolev weight spaces.

$\boxed{\text{Alexander Dmitrievich Baev}}$

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

`e-mail:` alexsandrbaev@mail.ru

Dmitry Alexandrovich Chechin

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

`e-mail:` alexsandrbaev@mail.ru

Sergey Alexandrovich Shabrov

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

`e-mail:` shaspoteha@mail.ru

Natalya Ivanovna Rabotinskaya

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

`e-mail:` rabotinskaya@math.vsu.ru

Natalia Alexandrovna Babaitseva

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,

`e-mail:` babaytseva.nata 73@mail.ru