В. И. Пеньковский, Н. К. Корсакова, Модель циркуляции крови в нижних конечностях человека,
Прикл. мех. техн. физ., 2018, том 59, выпуск 3, 88–93

УДК 532.546:533.9.09

МОДЕЛЬ ЦИРКУЛЯЦИИ КРОВИ В НИЖНИХ КОНЕЧНОСТЯХ ЧЕЛОВЕКА

В. И. Пеньковский, Н. К. Корсакова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: penkov@hydro.nsc.ru, kors@hydro.nsc.ru

Предложена математическая модель системы кровообращения в нижних конечностях человека, основанная на законах движения (фильтрации) вязкого флюида в гетерогенной среде, состоящей из двух или более взаимопроникающих континуумов. Предполагается, что кровеносная система состоит из распределительной сети — относительно крупных сосудов (артериол), связанных с мелкими капиллярами, и аналогичной по строению коллекторной сети — мелких капилляров, переходящих в более крупные вены. Получена система дифференциальных уравнений параболического типа, для которой ставится задача без начальных данных. Найдено периодическое во времени решение системы, соответствующее гармоническим колебаниям, задаваемым сердечным ритмом. Получены аналитические решения для частных случаев задач, вытекающих из общей модели циркуляции крови. С использованием метода конечных элементов выполнены численные расчеты и найдено численное решение одномерной задачи с параметрами, близкими к параметрам, соответствующим реальным условиям циркуляции, с учетом площади сечения мышечной ткани нижней конечности.

Ключевые слова: математическая модель, циркуляция крови, нижние конечности, гетерогенная среда, фильтрация, артерии, вены, капилляры, метод конечных элементов.

DOI: 10.15372/PMTF20180309

Введение. Кровоснабжение тканей нижних конечностей обеспечивается многочисленными ветвями артерий, берущими начало от бедренной артерии, которая переходит в подколенную артерию.

Кровоснабжение кожи, мышц, костей и нервных стволов задней поверхности голени и стопы происходит из ветвей задней большеберцовой артерии. Ткани передней поверхности голени и стопы снабжаются кровью ветвями передней большеберцовой артерии.

Кровоснабжение кожи конечностей осуществляется ветвями, отходящими не только от магистральных артерий, но и от артерий, питающих кость. Кровь из капилляров поступает в вены, которые в свою очередь образуют венозное сплетение. Таким образом, система кровоснабжения нижних конечностей, как и других частей тела, представляет собой взаимопроникающие множества артериальных и венозных сосудов, связанных друг с другом разветвленной сетью мелких капилляров, в которых происходит превращение артериальной крови в венозную. Диаметры сосудов и распределение этих сосудов по размерам достаточно хорошо изучены и могут быть представлены в виде соответствующих функций плотностей распределения. Кровоснабжение ноги показано на рис. 1.

Рис. 1. Система сосудов в нижней конечности человека

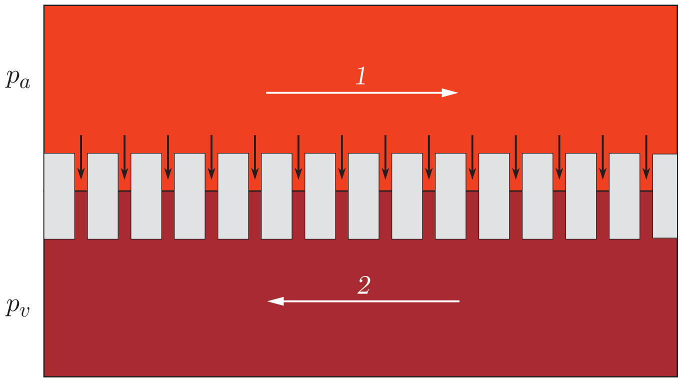

Рис. 2. Схема взаимодействия кровеносных сетей:
1 — артериолы, *2* — венулы

Учет всех взаимосвязей в системе кровоснабжения органов человека представляет собой сложную проблему. В данной работе проводится математическое моделирование взаимодействия двух основных потоков крови в мышцах ноги. Основными будем считать потоки, осредненные по сечению мышечной ткани и направленные вдоль ноги: поток q_a в распределительной (артериальной) сети сосудов и поток q_v в коллекторной (венозной) сети.

В работах [1, 2] предложена модель замкнутой циркуляции крови в тканях мозга человека, основанная на методах сплошной гетерогенной пористой среды, поровое пространство которой состоит из системы сосудов различного диаметра. Гетерогенная среда представляет собой два или более вложенных друг в друга континуума. Схема взаимодействия континуумов показана на рис. 2 (p_a — артериальное давление, p_v — давление в венах).

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение однородной несжимаемой жидкости (крови) в двух континуумах: 1) сети артерий; 2) сети вен. Эти континуумы не пересекаются, однако перетекание крови из артерий в вены происходит через разветвленную сеть мелких капилляров. Движение в континуумах 1 и 2 аналогично движению вязкой жидкости в пористой среде и подчиняется закону Дарси [3]

$$v_i = -\frac{k_i}{\mu}\,\mathrm{grad}\,p_i, \qquad i = 1, 2 \tag{1}$$

(v_i, p_i, k_i, μ — скорость, давление, проницаемость сред и вязкость флюида) и закону сохранения массы

$$\frac{\partial\,(m_i\rho)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v_i) + q_i = 0 \tag{2}$$

(m_i, ρ, t, q_i — пористость континуумов, плотность жидкости, время и плотность источников (стоков) соответственно). Плотность источников (стоков), действующих в распределительной и коллекторной системах сосудов, зависит от разности давлений крови в этих системах.

Основанная на законах (1), (2) система уравнений имеет вид

$$\frac{k_i}{\mu}\,\Delta p_i = \beta_i\,\frac{\partial p_i}{\partial t} + q_i, \qquad i = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь $\beta_i = dm_i/dp_i$ — коэффициенты сжимаемости порового пространства вложенных сред; Δ — оператор Лапласа. Если в порах содержится сжимаемая жидкость, то уравнения (3) становятся нелинейными. В модели циркуляции крови коэффициенты β_i характеризуют общую эластичность сетей сосудов.

Уравнения системы (3) связаны условием сохранения удельных объемов перетекания крови в системах сосудов $q_2 = -q_1 = q$. Следуя [4, 5], величину перетоков зададим формулой

$$q = \frac{\alpha}{\mu}\,(p_1 - p_2),$$

где α — параметр капиллярного обмена между континуумами 1 и 2.

Для учета действия силы тяжести заменим в уравнениях движения (1) давления на величины напора крови в артериальном (индекс a) и венозном (индекс v) руслах:

$$h_a = p_a - \rho g z, \quad h_v = p_v - \rho g z, \quad v_a = -\frac{\partial h_a}{\partial z}, \quad v_v = -\frac{\partial h_v}{\partial z}$$

(ось z направлена от бедра к стопе).

Пусть $s(z)$ — площадь сечения мышечной ткани ноги. Тогда удельные потоки и величины перетоков пропорциональны площади сечения:

$$q_a = s(z) v_a, \qquad q_v = s(z) v_v, \qquad q = s(z)\eta_1(h_a - h_v).$$

Предположим, что проводимости артериальных и венозных русел, а также их эластичности одинаковы. После ряда преобразований система (2) принимает вид

$$\begin{gathered} -\beta_1\,\frac{\partial h_a}{\partial t} + \frac{1}{s(z)}\,\frac{\partial}{\partial z}\Big(s(z)\,\frac{\partial h_a}{\partial z}\Big) = \eta_1(h_a - h_v), \\ -\beta_1\,\frac{\partial h_v}{\partial t} + \frac{1}{s(z)}\,\frac{\partial}{\partial z}\Big(s(z)\,\frac{\partial h_v}{\partial z}\Big) = -\eta_1(h_a - h_v) \end{gathered} \tag{4}$$

($\eta_1 = \alpha/(k_1\mu)$).

Для того чтобы определить пульсовый режим движения крови в артериальном и венозном руслах крови, необходимо задать краевые условия на уровне бедра (при $z = 0$) и условия непротекания на уровне стопы (при $z = z_p$):

$$z = 0\colon \quad p_a = h_a = A\cos(\omega t) + B, \quad p_v = h_v = p_0, \qquad z = z_p\colon \quad \frac{\partial h_a}{\partial z} = \frac{\partial h_v}{\partial z} = 0.$$

Здесь $A = (p_s - p_d)/2$, $B = (p_s + p_d)/2$ — полуразность и полусумма систолического и диастолического давлений; p_0 — давление в венах на уровне бедра; ω — частота пульса.

Вводя новые искомые функции $S^{\pm}(z,t) = h_a \pm h_v$, систему (4) расщепляем на два уравнения

$$-\beta_1\,\frac{\partial S^-}{\partial t} + \frac{1}{s(z)}\,\frac{\partial}{\partial z}\Big(s(z)\,\frac{\partial S^-}{\partial z}\Big) - 2\eta_1 S^- = 0, \quad -\beta_1\,\frac{\partial S^+}{\partial t} + \frac{1}{s(z)}\,\frac{\partial}{\partial z}\Big(s(z)\,\frac{\partial S^+}{\partial z}\Big) = 0 \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$z = 0\colon \quad S^{\pm} = A^{\pm} = A\cos\omega t + B^{\pm}, \qquad z = z_p = l\colon \quad \frac{\partial S^{\pm}}{\partial z} = 0 \quad (B^{\pm} = B \pm p_0). \tag{6}$$

Рассмотрим частные случаи задачи (5), (6), для которых можно получить аналитические решения.

1.1. *Случай постоянного сечения* $s(z) = \mathrm{const}$. Периодическим решением второго уравнения системы является функция

$$S^+ = X_1^+(z)\cos\omega t - X_2^+(z)\sin\omega t + B + p_0,$$

где

$$X_1^+ = 2A[\mathrm{ch}\,(\gamma l)\cos(\gamma l)\,\mathrm{ch}\,(\gamma(l-z))\cos(\gamma(l-z)) + \\ + \mathrm{sh}\,(\gamma l)\sin(\gamma l)\,\mathrm{sh}\,(\gamma(l-z))\sin(\gamma(l-z))]/[\mathrm{ch}\,(2\gamma l)+\cos(2\gamma l)],$$

$$X_2^+ = -2A[\mathrm{sh}\,(\gamma l)\sin(\gamma l)\,\mathrm{ch}\,(\gamma(l-z))\cos(\gamma(l-z)) - \\ - \mathrm{ch}\,(\gamma l)\cos(\gamma l)\,\mathrm{sh}\,(\gamma(l-z))\sin(\gamma(l-z))]/[\mathrm{ch}\,(2\gamma l)+\cos(2\gamma l)]$$

$(\gamma = \sqrt{\omega\beta_1/2})$.

Функцию S^- будем искать в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых представляет собой частное решение первого уравнения системы (5)

$$S^- = S_1(z) + S_2(z,t)$$

с краевыми условиями

$$z=0\colon\quad S_1 = B^-,\quad S_2 = A\cos\omega t,\qquad z=l\colon\quad \frac{\partial S_{1,2}}{\partial z} = 0.$$

Нетрудно показать, что первое слагаемое определяется формулой

$$S_1 = B^-\frac{\mathrm{ch}\,\sqrt{2\eta_1}\,(l-z)}{\mathrm{ch}\,\sqrt{2\eta_1}\,l}.$$

Второе слагаемое, являющееся решением задачи без начальных данных, представим в виде

$$S_2 = \mathrm{e}^{i\omega t}\,Z(z).$$

Функция $Z(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \gamma_-^2 Z = 0,$$

где

$$\gamma_-^2(\eta_1) = 2\eta_1 + i\omega\beta_1 = \sqrt{4\eta_1^2 + (\omega\beta_1)^2}\,\mathrm{e}^{2i\theta},\quad \theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega\beta_1}{2\eta_1},\quad \gamma_+ = \gamma_-(0).$$

С учетом краевых условий (6) для функции S_2 находим

$$Z(z) = A\frac{\mathrm{ch}\,\gamma_-(l-z)}{\mathrm{ch}\,\gamma_- l} = Z_1 + iZ_2,\qquad \gamma_- = [4\eta_1^2 + (\omega\beta_1)^2]^{1/4}(\cos\theta + i\sin\theta) = \gamma_c + i\gamma_s,$$

$$\gamma_c = \gamma\cos\theta,\qquad \gamma_s = \gamma\sin\theta,\qquad \gamma = (4\eta_1^2 + (\omega\beta_1)^2)^{1/4},$$

$$Z_1 = 2A[\mathrm{ch}\,(\gamma_c l)\cos(\gamma_s l)\,\mathrm{ch}\,(\gamma_c(l-z))\cos(\gamma_s(l-z)) + \\ + \mathrm{sh}\,(\gamma_c l)\sin(\gamma_s l)\,\mathrm{sh}\,(\gamma_c(l-z))\sin(\gamma_s(l-z))]/[\mathrm{ch}\,(2\gamma_c l)+\cos(2\gamma_s l)],$$

$$Z_2 = -2A[\mathrm{sh}\,(\gamma_c l)\sin(\gamma_s l)\,\mathrm{ch}\,(\gamma_c(l-z))\cos(\gamma_s(l-z)) - \\ - \mathrm{ch}\,(\gamma_c l)\cos(\gamma_s l)\,\mathrm{sh}\,(\gamma_c(l-z))\sin(\gamma_s(l-z))]/[\mathrm{ch}\,(2\gamma_c l)+\cos(2\gamma_s l)].$$

Отделяя действительную часть, получаем $S_2 = Z_1\cos\omega t - Z_2\sin\omega t$.

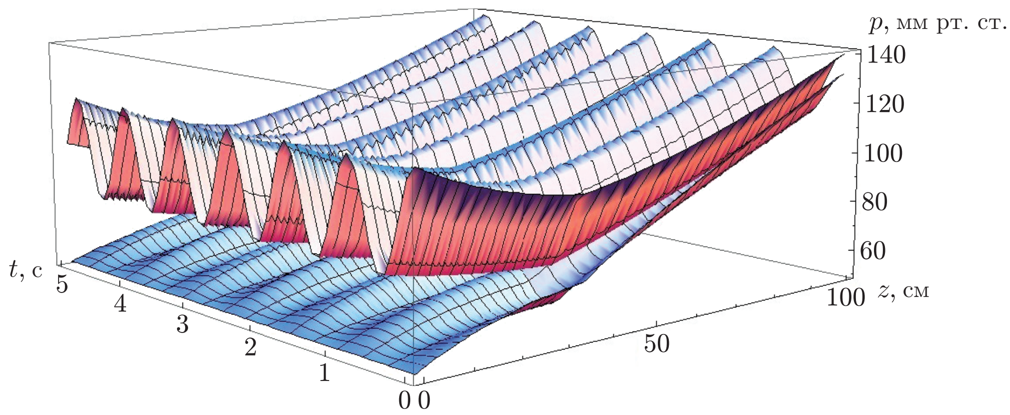

Рис. 3. Распределения артериального (*1*) и венозного (*2*) давлений вдоль оси z в зависимости от времени, полученные в результате аналитического решения

Артериальное и венозное давления крови в соответствующих руслах вычисляются по формулам

$$p_a = (S^+ + S^-)/2 + \rho g z, \qquad p_v = (S^+ - S^-)/2 + \rho g z.$$

В отсутствие силы тяжести в этих формулах следует положить $g = 0$.

1.2. *Сечение в виде кусочно-постоянной функции. Жесткий режим циркуляции крови.* Пусть функция $s(z)$ задана в виде ступеньки: $s_1 = 116$ см^2 при $z \in (0, z_1)$ и $s_2 = 44$ см^2 при $z \in (z_1, z_p)$, и имеет место жесткий режим циркуляции крови в руслах. Такой режим, по-видимому, может возникать при действии на нижнюю конечность компрессионного трикотажа. В этом случае в уравнениях системы (5) можно положить $\beta_1 = 0$. Из второго уравнения системы и краевых условий (6) следует, что для всех z $S^+ = A\cos\omega t + B^+$.

Вводя обозначения $S^- = S_1^-$, $z \in (0, z_1)$, $S^- = S_2^-$, $z \in (z_1, z_p)$, $z_p = 100$, получаем общие решения первого уравнения системы (5):

$$S_1^- = M_1 \operatorname{sh}(az) + N_1 \operatorname{ch}(az), \qquad S_2^- = M_2 \operatorname{sh}(az) + N_2 \operatorname{ch}(az) \qquad (a = \sqrt{2\eta_1}\,).$$

Входящие в эти формулы постоянные определяются из краевых условий

$$z = 0\colon \quad S_1^- = A\cos\omega t + B^-, \qquad z = z_1\colon \quad S_1^- = S_2^-, \quad \frac{\partial S_1^-}{\partial z} = \delta\,\frac{\partial S_2^-}{\partial z} \quad \Big(\delta = \frac{44}{116} \approx 0{,}38\Big)$$

и имеют вид

$$N_1 = A\cos\omega t + B^-, \qquad N_2 = \frac{2N_1}{\operatorname{sh}(2az_1)[-(1-\delta)\operatorname{th}(az_p) + \operatorname{cth}(az_1) - \delta\operatorname{th}(az_1)]},$$

$$M_2 = -N_2 \operatorname{th}(az_p), \qquad M_1 = M_2 + (N_2 - N_1)\operatorname{cth}(az_1).$$

На рис. 3 представлены зависимости артериального и венозного давлений в кровеносной системе человека в положении сидя от времени при значениях параметров $\eta_1 = 0{,}0005$, $p_0 = 50$, $p_d = 80$, $p_s = 120$, $z_1 = 35$ см, $\omega = 7{,}85$ 1/с.

2. Численные расчеты. На рис. 4 приведены результаты численных расчетов, полученные с помощью метода конечных элементов, при указанных выше параметрах и коэффициенте упругоемкости $\beta_1 = 0{,}001$. Площадь сечения вдоль ноги представлена в виде кусочно-линейных функций:

$$z \in [0, 35]\colon\ s(z) = 154 - 2{,}17z, \quad z \in [35, 75]\colon\ s(z) = 137{,}5 - 1{,}7z, \quad z \in [75, 100]\colon\ s(z) = 10.$$

На рис. 4 показано распределение давления крови в момент времени, когда во входном сечении достигается максимальное значение артериального давления.

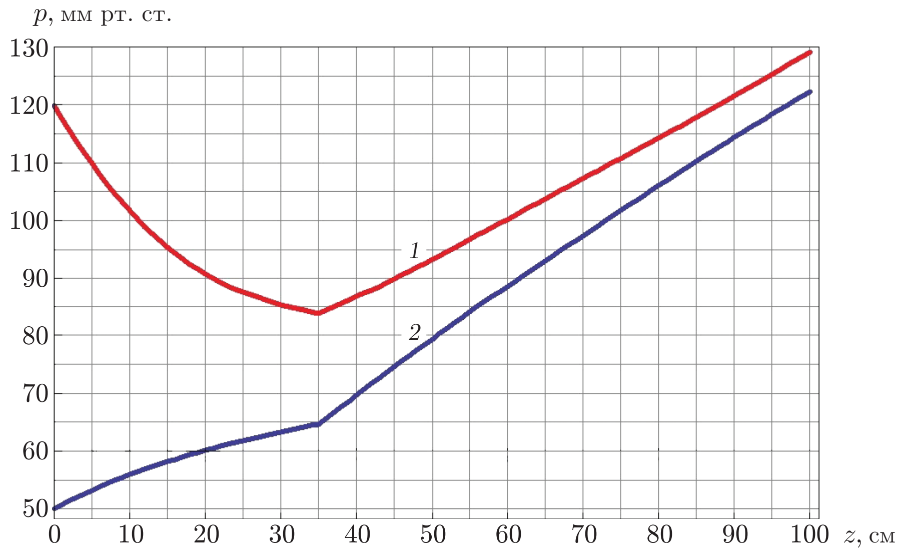

Рис. 4. Распределения артериального (*1*) и венозного (*2*) давлений вдоль оси z, полученные с использованием метода конечных элементов

Заключение. Предложена система уравнений, описывающих одномерный поток артериальной и венозной крови в нижней конечности человека. Математическая модель основана на законах движения и сохранения массы крови, движущейся в двух взаимопроникающих континуумах, представляющих собой непересекающиеся сети сосудов. Превращение крови из артериальной в венозную происходит во множестве мелких капилляров, обеспечивающих перетекание крови из одной сети в другую.

Скорость перетекания пропорциональна разности локальных давлений крови в руслах. Таким образом, модель циркуляции крови содержит пять параметров, характеризующих проводимость русел, эластичность сосудов и капиллярную проводимость.

Приведены аналитические решения задачи для частных случаев аппроксимации мышечной массы в нижней конечности и результаты численного расчета, которые качественно согласуются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пеньковский В. И., Корсакова Н. К.** Модели гидравлического разрыва пласта и циркуляции крови в мозге на основе механики и фильтрации в гетерогенных средах // Тр. 14-го Всерос. семинара “Динамика многофазных сред”, Новосибирск, 2–5 нояб. 2015 г. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО РАН, 2015. С. 73–75.
2. **Korsakova N., Pen’kovskij V., Shilova A., Shevchenko V.** Model of blood circulation in the cerebral cortex on the theory of fluid flow in heterogeneous medium // Ser. Biomech. 2016. V. 30, N 2. P. 24–31.
3. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
4. **Рубинштейн Л. И.** К вопросу о распространении тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1948. Т. 12, № 1. С. 27–45.
5. **Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.** Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 25. С. 852–864.

Поступила в редакцию 31/VII 2017 г.