

6. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977, с. 1—455.
7. Никольский С. М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе.— Труды МИАН СССР, 1979, 150, с. 212—238.
8. Troisi M. Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso.— Ric. mat., 1969, 18, p. 49—74.
9. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980, с. 1—664.

УДК 517

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Настоящая работа посвящена выводу соотношений двойственности между наилучшими константами и экстремальными функциями в неравенствах для производных вида

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(I)} \leq K \|x\|_{L_p(I)}^\alpha \|x^{(n)}\|_{L_r(I)}^{1-\alpha}, \quad (1)$$

где $I = R$ либо $R_+ = [0, \infty)$, $n \geq 1$ и $0 \leq k < n$ — целые числа, $1 \leq p, r \leq \infty$ и $\alpha \geq 0$, и аналогичными объектами в неравенствах, двойственных (в некотором смысле) к (1). Как следствия получен ряд новых точных констант, а также соотношения двойственности между величинами наилучших приближений линейных функционалов на классах функций.

Доказательство основных утверждений работы опирается на методы теории двойственности выпуклых функций. Схема рассуждений при этом следующая. Неравенству (1) сопоставляется некоторая задача выпуклого программирования так, что вычисление наилучшей константы и нахождение экстремальных функций в этом неравенстве (т. е. функций, на которых оно обращается в равенство) равносильно вычислению нижней грани и нахождению точного решения данной задачи. Далее, так подбирается «возмущение» указанной задачи, что двойственная к ней задача таким же образом, как и исходная, оказывается связанной с некоторым другим неравенством типа (1). Известные связи между двойственными задачами приводят к соответствующим утверждениям относительно неравенств для производных.

Работа состоит из двух частей. В первой из них вводится понятие двойственности двух неравенств, приводится общая схема построения двойственной задачи к данной, формулируются основные результаты (теоремы 1 и 2) и следствия из них. Вторая часть посвящена доказательствам.

1. Пусть $I = R$, либо $R_+ = [0, \infty)$, либо $[0, T]$, $T > 0$. Как обычно, $L_p^r(I)$ обозначает совокупность всех измеримых функций на I , суммируемых в p -й степени при $1 \leq p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$. Норму $x \in L_p(I)$ обозначим $\|x\|_{L_p(I)}$ или просто $\|x\|_p$, если ясна или неважна область определения x .

Пусть, далее, $n \geq 1$ — целое и $1 \leq p, r \leq \infty$. Обозначим $W_{p,r}^n(I)$ множество функций $x \in L_p(I)$, у которых $(n-1)$ -я производная $x^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна на I (т. е. абсолютно непрерывных на каждом отрезке на I), а n -я производная $x^{(n)} \in L_r(I)$. Это нормированное пространство с нормой $\|x\|_p + \|x^{(n)}\|_r$.

Как известно (см. [1]), неравенство (1) с $\alpha = (n - k - 1/r)/(n + 1/p - 1/r)$ ($\alpha = 1$, если $n + 1/p - 1/r = 0$) имеет место для всех $x \in W_{p,r}^n(I)$ ($I = R$ или R_+) с некоторой константой $K > 0$. Наименьшую из таких констант будем называть наилучшей и обозначим $K_n(k; p, r; I)$.

Пусть $J = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $J_m = J \setminus \{m\}$, если $m \in J$. Подмножества (возможно, пустые) J_m обозначим Q_m, P_m, \dots . Если $Q \subset J$, то положим

$$W_{p,r}^n(I; Q) = \{x \in W_{p,r}^n(I) \mid x^{(i)}(0) = 0, i \in Q\} \quad (W_{p,r}^n(I; \emptyset) = W_{p,r}^n(I)).$$

Наряду с неравенствами (1) рассматриваем также неравенства вида

$$|x^{(k)}(0)| \leq K \|x\|_{L_p(I)}^\alpha \|x^{(n)}\|_{L_r(I)}^{1-\alpha}, \quad x \in W_{p,r}^n(I; Q_k), \quad (2)$$

где α то же, что и выше.

Наилучшую константу в (2) обозначим $K_n(k; p, r; I; Q_k)$. Легко видеть, что если $Q_k = \emptyset$, то неравенства (1) и (2) (с одинаковыми параметрами) существуют или не существуют одновременно и $K_n(k; p, r; I; \emptyset) = K_n(k, p, r; I)$. Таким образом, неравенства типа (2) образуют более широкий класс, чем неравенства (1).

Экстремальной функцией в (2) называем любую нетривиальную функцию из $W_{p,r}^n(I; Q_k)$, на которой это неравенство с $K = K_n(k; p, r; I; Q_k)$ обращается в равенство. Ясно, что если $Q_k = \emptyset$, то экстремальная функция в неравенстве (2) экстремальна и в неравенстве (1).

Для каждого фиксированного $n \geq 1$ неравенство (2), очевидно, полностью определяется заданием набора $\xi = (k; p, r; I; Q_k)$, а наилучшую константу в нем можно рассматривать как функцию на множестве M_n всех таких наборов.

Основная цель настоящей работы — доказать, что на некотором (достаточно широком) подмножестве $L_n \subset M_n$ можно определить такое инволютивное отображение $\Phi_n: L_n \rightarrow L_n$, что наилучшие константы и экстремальные функции (если они существуют) в неравенствах, отвечающих наборам ξ и $\xi' = \Phi_n(\xi)$, связаны вполне определенными соотношениями.

Приведем точные определения. Пусть $k \in J$. Положим

$$\mathfrak{A}_k = \left\{ k + 2m \mid m = - \left[\frac{k}{2} \right], \dots, -1, 1, \dots, \left[\frac{n-k-1}{2} \right] \right\}.$$

Тогда

$$L_n = \{ \xi = (k; p, r; I; Q_k) \in M_n \mid Q_k \subset \mathfrak{A}_k, 1 + 1/p - 1/r > 0 \}.$$

Второе условие здесь означает, что из множества всех пар (p, r) $1 \leq p, r \leq \infty$, исключается лишь одна точка $(\infty, 1)$.

Пусть, далее, $\mathfrak{G}: J \rightarrow J$ — подстановка такая, что $\mathfrak{G}(m) = n - m - 1$, $m \in J$ и $\mathfrak{G}(\emptyset) = \emptyset$. Определим для каждого $k \in J$ отображение $2^{\mathfrak{A}_k} \rightarrow J$ по правилу

$$\mathfrak{A}_k \supset Q_k \rightarrow Q'_k = \mathfrak{G}(\mathfrak{A}_k \setminus Q_k).$$

Легко видеть, что $Q'_k \subset \mathfrak{A}_{n-k-1}$ и $Q''_k = (Q'_k)' = Q_k$, т. е. отображение инволютивно.

Всюду в дальнейшем, если $1 \leq s \leq \infty$, s' обозначает сопряженный к s показатель, т. е. $1/s + 1/s' = 1$ и $s' = \infty$ при $s = 1$, $s' = 1$ при $s = \infty$.

Пусть теперь $\xi = (k; p, r; I; Q_k) \in L_n$. Положим по определению

$$\xi' = \Phi_n(\xi) = (n - k - 1; r', p'; I'; Q'_k),$$

где r' и p' — сопряженные показатели к r и p соответственно, $I' = R_+$, если $I = R$ и $I' = R$, если $I = R_+$. Инволютивность Φ_n очевидна.

Следует отметить, что можно указать и другие подмножества и инволютивные отображения на них, где наилучшие константы и экстремальные функции, отвечающие соответствующим неравенствам, будут связаны некоторыми соотношениями. Однако лишь только в рассматриваемом случае отображение оказывается инвариантным (для некоторых $n > 1$ и $k \in J$) относительно множества тех $\xi \in L_n$, у которых $Q_k = \emptyset$ (т. е. тех ξ , которые отвечают неравенствам типа (1)), и поэтому в этом случае удастся получить как следствие новые точные константы в неравенстве (1) (см. следствие 1).

Неравенства, отвечающие наборам $\xi \in L_n$ и $\xi' = \Phi_n(\xi)$ (или просто неравенства ξ и ξ'), будем называть двойственными друг к другу.

Т е о р е м а 1. Пусть $\xi = (k; p, r; R; Q_k)$ и $\xi' = (n - k - 1; r', p'; R_+; Q'_k)$ — два неравенства в двойственности. Тогда

а) наилучшие константы в ξ и ξ' связаны соотношением

$$K_n(\xi) K_n(\xi') = \alpha^{-\alpha} (1 - \alpha)^{-(1-\alpha)} 2^{-\gamma},$$

где

$$\alpha = \frac{n - k - 1/r}{n + 1/p - 1/r}, \quad \gamma = \frac{(n - k)/p + k/r}{n + 1/p - 1/r};$$

б) если $p < \infty$ и $r > 1$, то существуют такие экстремальные функции \hat{x} и \hat{y} в ξ и ξ' соответственно, что \hat{x} четна (нечетна), если k четно (нечетно) и п. в. на R_+

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(n)}(t) &= (-1)^{n-k} \|\hat{x}^{(n)}\|_{L_r(R)} |\hat{y}(t)|^{r'-1} \text{sign } \hat{y}(t), \\ \hat{y}^{(n)}(t) &= (-1)^{k+1} \|\hat{x}^{(n)}\|_{L_p(R)}^{1-p} |\hat{x}(t)|^{p-1} \text{sign } \hat{x}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

С л е д с т в и е 1. Справедливы следующие соотношения:

$$K_2(0; p, 1; R) = \left(\frac{p+1}{8}\right)^{\frac{1}{p+1}}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad (4)$$

$$K_2(0; p, 1; R_+) = (p+1)^{\frac{1}{p+1}}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad (5)$$

$$K_3(1; p, 1; R) = \begin{cases} \kappa(p) K_3^{-1}(1; \infty, p'; R_+), & 1 < p < \infty, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{36}}, & p = 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$K_3(1; p, 1; R_+) = \begin{cases} \frac{1}{8^{\frac{1}{2p+1}}} \kappa(p) K_3^{-1}(1; \infty, p'; R), & 1 < p < \infty, \\ \sqrt[3]{6}, & p = 1, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\kappa(p) = 2^{-\frac{p+2}{2p+1}} \left(\frac{2p+1}{p}\right)^{\frac{p}{2p+1}} \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{2p+1}},$$

а $K_3(1; \infty, p'; R_+)$ и $K_3(1; \infty, p'; R)$, $1 < p < \infty$, — известные величины.

Перед формулировкой второго следствия приведем постановку частной задачи С. Б. Стечкина о приближении линейных операторов [2]. Пусть, как и раньше, $n \geq 1$ и $0 \leq k < n$ — целые числа; $1 \leq p, r \leq \infty$, $I = R$ либо R_+ и $Q_k \subset J_k$. Пусть, далее,

$$B_{p,r}^n(I; Q_k) = \{x \in W_{p,r}^n(I; Q_k) \mid \|x^{(n)}\|_r \leq 1\},$$

$L_p^*(I)$ — сопряженное к $L_p(I)$ (норму элемента $l \in L_p^*(I)$ обозначим $\|l\|$)

и $N > 0$. Величина

$$E_n(N; k; p, r; I; Q_k) = \inf_{\substack{\|l\| \leq N, \\ l \in L_p^*(I)}} \sup_{x \in B_{p,r}^n(I; Q_k)} (x^{(k)}(0) - \langle l, x \rangle) \quad (8)$$

характеризует наилучшее приближение линейного функционала $x \rightarrow x^{(k)}(0)$ всевозможными линейными непрерывными функционалами на $L_p(I)$ с нормой, не превосходящей N , на заданном классе $B_{p,r}^n(I; Q_k)$.

Задача (8), очевидно, полностью определяется заданием набора $\eta = (N; \xi) = (N; k; p, r; I; Q_k)$ (для каждого фиксированного $n \geq 1$).

С л е д с т в и е 2. Пусть наборы $\eta = (N; \xi) = (N; k; p, r; I; Q_k)$ и $\eta' = (N'; \xi') = (N'^{\alpha/(1-\alpha)}; n-k-1; r', p'; R_+; Q'_k)$ таковы, что $\xi \in L_n$. Тогда

$$E_n^{1-\alpha}(\eta) E_n^\alpha(\eta') = \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} 2^{-\gamma},$$

где α и γ те же, что и в теореме 1.

Утверждения теоремы 1 являются следствием связей между экстремальными задачами, соответствующими двойственным неравенствам. Эти связи указаны в теореме 2, для формулировки которой понадобятся дополнительные определения.

Приведем, прежде всего, общую схему построения двойственной задачи к данной (подробнее см. [3, 4]). Пусть X и X^* — вещественные векторные пространства в двойственности относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : X^* \times X \rightarrow \mathbf{R}$ и $f : X \rightarrow \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — некоторая функция.

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in X, \quad (9)$$

закрывающуюся в минимизации f на всем пространстве X . Пусть, далее, Y, Y^* — другая пара пространств в двойственности относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : Y^* \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ и функция $F : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ такая, что $F(x, 0) = f(x)$ для всех $x \in X$.

Двойственной задачей к (9) (относительно тройки (Y, Y^*, F)) называется задача

$$-F^*(0, y^*) \rightarrow \sup, \quad y^* \in Y^*, \quad (10)$$

где $F^* : X^* \times Y^* \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ — сопряженная функция к F , т. е.

$$F^*(x^*, y^*) = \sup_{x \in X, y \in Y} \{ \langle x^*, x \rangle_1 + \langle y^*, y \rangle_2 - F(x, y) \}.$$

Отметим, что если X — нормированное пространство, X^* — его сопряженное и $\langle x^*, x \rangle$ — значение линейного функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$, то, как известно, X и X^* находятся в двойственности относительно билинейной формы $(x^*, x) \rightarrow \langle x^*, x \rangle$.

Значениями S и S^* задач (9) и (10) будем называть соответственно величины нижней и верхней грани в этих задачах, а решениями — любые элементы из X и Y^* , на которых эти грани достигаются.

Из определений легко следует, что всегда $S^* \leq S$ (в смысле естественного порядка на $\bar{\mathbf{R}}$). Приведем удобные для наших целей условия совпадения этих величин (см. [4]).

П р е д л о ж е н и е. Пусть Y — нормированное пространство и Y^* — его сопряженное. Тогда если S конечно, функция $F : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ выпукла и существует такое $x_0 \in X$, что отображение $F(x_0, \cdot) : Y \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ непрерывно в нуле, то $S = S^*$ и в задаче (10) существует решение.

Пусть $n \geq 1$, $0 \leq k, l < n$ — целые числа, $1 \leq p, r, s, t \leq \infty$, $I = \mathbf{R}$ либо \mathbf{R}_+ , $Q_k \subset J_k$, $P_l \subset J_l$ и a, b, c, d — положительные числа. Рассмотрим задачи:

$$a \|x\|_{L_p(I)} + b \|x^{(n)}\|_{L_r(I)} \rightarrow \inf, \quad x^{(k)}(0) = 1, \quad x \in W_{p,r}^n(I; Q_k), \quad (11)$$

$$y^{(l)}(0) \rightarrow \sup, \quad \|y\|_{L_s(I)} \leq c, \quad \|y^{(n)}\|_{L_t(I)} \leq d, \quad y \in W_{s,t}^n(I; P_l). \quad (12)$$

Для каждого фиксированного $n \geq 1$ задачи (11) и (12) полностью определяются наборами $\zeta = (k; p, r; I; Q_k; a, b)$ и $\zeta^* = (l; s, t; I; P_l; c, d)$ соответственно. В дальнейшем сами эти наборы будем иногда называть задачами, понимая под ζ именно задачу (11), а под ζ^* — задачу (12).

Обозначим $S_n = S_n(\zeta)$ и $S_n^* = S_n^*(\zeta^*)$ значения задач (11) и (12). Определим еще для каждого $k \in J$ отображение $2^{J_k} \rightarrow J$ по правилу

$$J_k \supset Q_k \rightarrow \tilde{Q}_k = \mathfrak{G}(J_k \setminus Q_k),$$

где $\mathfrak{G}: J \rightarrow J$ — та же подстановка, что и раньше, т. е. $\mathfrak{G}(m) = n - m - 1$, $m \in J$ и $\mathfrak{G}(\emptyset) = \emptyset$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) если $p < \infty$, то двойственной задачей к $\zeta = (k; p, r; \mathbf{R}_+; Q_k; a, b)$ является задача $\zeta^* = (n - k - 1; r', p'; \mathbf{R}_+; \tilde{Q}_k; b, a)$ и $0 < S_n(\zeta) = S_n^*(\zeta^*) < \infty$;
- б) если $r, t > 1$, то в задачах (11) и (12) существуют решения;
- в) если $p < \infty, r > 1$ и \hat{x} и \hat{y} — решения задач $\zeta = (k; p, r; \mathbf{R}_+; Q_k; a, b)$ и (двойственной к ней) $\zeta^* = (n - k - 1; r', p'; \mathbf{R}_+; \tilde{Q}_k; b, a)$ соответственно, то п. в. на \mathbf{R}_+

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(n)}(t) &= (-1)^{n-k} b^{1-r'} \| \hat{x}^n \|_r | \hat{y}(t) |^{r'-1} \text{sign } \hat{y}(t), \\ \hat{y}^{(n)}(t) &= (-1)^{k+1} a \| \hat{x} \|_p^{1-p} | \hat{x}(t) |^{p-1} \text{sign } \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

и при этом $\| \hat{y} \|_{r'} = b$, $\| \hat{y}^{(n)} \|_{p'} = a$.

2. В этом пункте дополнительно будут рассматриваться следующие пространства функций. Пусть $I = \mathbf{R}$, либо \mathbf{R}_+ , либо $[0, T]$, $T > 0$. Обозначим через $C(I)$ совокупность всех действительных непрерывных функций на I , стремящихся к нулю на бесконечности, если $I = \mathbf{R}$ или \mathbf{R}_+ , с нормой $\|x\|_{C(I)} = \max \{ |x(t)| \mid t \in I \}$ (или просто пишем $\|x\|_C$). $V(I)$ — совокупность всех действительных конечных борелевских мер μ на I с нормой, равной полной вариации μ (пишем $\| \mu \|_{V(I)}$, или $\| \mu \|_V$). Если $\mu \in V(I)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на I , то ее плотность обозначим $\dot{\mu}$. $C_0^n([0, T])$, $n \geq 1$, — это совокупность всех n раз непрерывно дифференцируемых функций x на $[0, T]$, таких, что $x^{(i)}(0) = x^{(i)}(T) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Доказательству теорем 1 и 2 предположим четыре леммы.

Лемма 1. Пусть $n \geq 1$, $T > 0$, $y \in L_1([0, T])$ и $\mu \in V([0, T])$ такие, что

$$\int_0^T xydt + \int_0^T x^{(n)}d\mu = 0$$

для всех $x \in C_0^n([0, T])$. Тогда μ абсолютно непрерывна, $\dot{\mu} \in W_{1,1}^n([0, T])$ и $(\dot{\mu})^{(n)}(t) = (-1)^{n+1}y(t)$ п. в. на $[0, T]$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству обобщенной леммы Дюбуа-Реймона (см. [5, с. 306]).

Лемма 2. Пусть $n \geq 1$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ и $I = \mathbf{R}$ либо \mathbf{R}_+ . Тогда если $x \in W_{p,r}^n(I)$ и $0 \leq i \leq n-1$, то $x^{(i)}(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $I = \mathbf{R}_+$. В этом случае для $n = 2$ лемма доказана в [6]. При $n = 1$ доказательство совершенно аналогично. Пусть $n > 1$, и предположим, что лемма справедлива для всех функций из $W_{p,r}^{n-1}(I)$. Если теперь $x \in W_{p,r}^n(I)$, то из теоремы В. Н. Габушина [1], в частности, вытекает, что $x^{(n-1)} \in L_q(I)$, где $q = n/(1/p + (n-1)/r)$. Следовательно, по предположению $x^{(i)}(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$, если $i = 0, 1, \dots, n-2$, а так как $x^{(n-1)} \in W_{q,r}^{(1)}(I)$ и, очевидно, $1 \leq q < \infty$, то и $x^{(n-1)}(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть значения S_n и S_n^* задач (11) и (12) конечны и положительны. Тогда справедливы соотношения

$$K_n(k; p, r; I; Q_k) = a^\alpha b^{1-\alpha} [\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} S_n(k; p, r; I; Q_k; a, b)]^{-1}, \quad (14)$$

$$K_n(l; s, t; I; P_l) = c^{-\beta} d^{-(1-\beta)} S_n^*(l; s, t; I; P_l; c, d), \quad (15)$$

где

$$\alpha = \frac{n-k-1/r}{n+1/p-1/r}, \quad \beta = \frac{n-l-1/t}{n+1/s-1/t}$$

и любые решения задач (11) и (12) являются экстремальными функциями в соответствующих неравенствах.

Доказательство. Далее будем предполагать, что $0 < \alpha, \beta < 1$, так как в вырожденных случаях равенства (14), (15) устанавливаются без труда. Докажем первое из них.

Для этого покажем сначала, что для всех $x \in W_{p,r}^n(I; Q_k)$ и каждого $\rho > 0$ справедливо неравенство

$$S_n |x^{(k)}(0)| \leq a \|x\|_p \rho^{-k-1/p} + b \|x^{(n)}\|_r \rho^{n-k-1/r}. \quad (16)$$

Действительно, пусть $x \in W_{p,r}^n(I; Q_k)$. Тогда если $x^{(k)}(0) = 0$, то (16) выполняется очевидным образом. Если же $x^{(k)}(0) \neq 0$, то рассмотрим функцию $\tilde{x}(t) = (x^{(k)}(0))^{-1} \rho^{-k} x(\rho t)$. Ясно, что $\tilde{x} \in W_{p,r}^n(I; Q_k)$ и $\tilde{x}^{(k)}(0) = 1$. Следовательно,

$$S_n \leq a \|\tilde{x}\|_p + b \|\tilde{x}^{(n)}\|_r. \quad (17)$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\|y^{(m)}\|_s = |\gamma| \xi^{m-1/s} \|x^{(m)}\|_s,$$

справедливое, если $y(t) = \gamma x(\xi t)$, $\gamma \in \mathbf{R}$, $\xi > 0$ и $x^{(m)} \in L_s(I)$, где $m \geq 0$, $1 \leq s \leq \infty$ и $I = \mathbf{R}$ либо \mathbf{R}_+ , сразу получим (16).

Пусть теперь $x \in W_{p,r}^n(I; Q_k)$ и $x \neq 0$. Положим в (16)

$$\rho = \left[ab^{-1} \left(\frac{k+1/p}{n-k-1/r} \right) \|x\|_p \|x^{(n)}\|_r^{-1} \right]^{\frac{1}{n+1/p-1/r}}, \quad (18)$$

тогда после несложных преобразований получим неравенство (2) (отвечающее набору $\xi = (k; p, r; I; Q_k)$), справедливое для всех $x \in W_{p,r}^n(I; Q_k)$ и с константой, равной правой части (14). Эта константа (обозначим ее через K_1) — наименьшая из возможных. Действительно, пусть $0 < \varepsilon < K_1$ и $\varepsilon_1 = S_n \varepsilon / (K_1 - \varepsilon)$. Согласно определению S_n найдется такая функция $x_\varepsilon \in W_{p,r}^n(I; Q_k)$, $x_\varepsilon^{(k)}(0) = 1$, что

$$S_n + \varepsilon_1 > a \|x_\varepsilon\|_p + b \|x_\varepsilon^{(n)}\|_r.$$

Следовательно, для функции $\tilde{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon^{(k)}(0) \rho^k x_\varepsilon(\rho^{-1}t)$ будет выполняться неравенство, противоположное (16) с $S_n + \varepsilon_1$ вместо S_n . Подставим теперь в него ρ по формуле (18), где $x = \tilde{x}_\varepsilon$. Тогда получим, что \tilde{x}_ε удовлетворяет неравенству, противоположному (2) с константой $K_1 - \varepsilon$. Вследствие

произвольности ε это доказывает неулучшаемость K_1 и тем самым соотношение (14).

Если x_0 — решение задачи (11), то на этой функции (17) обращается в равенство. Переход от (17) к мультипликативному неравенству, очевидно, сохраняет равенство левых и правых частей, так что x_0 — экстремальная функция в $\xi = (k; p, r; I; Q_k)$.

Аналогичными рассуждениями доказывается и соотношение (15).

Л е м м а 4. Пусть в задачах (11) и (12) $Q_k \subset \mathfrak{A}_k$ и $P_l \subset \mathfrak{A}_l$ (множества \mathfrak{A}_k для всех $k \in J$ определены выше). Пусть, далее, $\mathfrak{B}_k = J_k \setminus \mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_l = J_l \setminus \mathfrak{A}_l$. Тогда справедливы соотношения

$$S_n(k; p, r; \mathbf{R}; Q_k; a, b) = S_n(k; p, r; \mathbf{R}_+; Q_k \cup \mathfrak{B}_k; a2^{1/p}, b2^{1/r}), \quad (19)$$

$$S_n^*(l; s, t; \mathbf{R}; P_l; c, d) = S_n^*(l; s, t; \mathbf{R}_+; P_l \cup \mathfrak{B}_l; c2^{-1/s}, d2^{-1/t}). \quad (20)$$

Равенства понимаются в том смысле, что из конечности левых их частей следует конечность правых и наоборот.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в задаче (11) (которая, очевидно, всегда конечна) $I = \mathbf{R}$ и для определенности k — четное число. Покажем, что значение этой задачи не изменится, если ограничиться рассмотрением лишь четных функций из $W_{p,r}^n(\mathbf{R}; Q_k)$. Действительно, если это не так и f — минимизируемый функционал в (11), а S'_n — значение этой задачи на четных функциях, то найдется функция $x \in W_{p,r}^n(\mathbf{R}; Q_k)$, $x^{(k)}(0) = 1$ такая, что $f(x) < S'_n$. Сопоставим x четную функцию $\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$. Ясно, что $\tilde{x} \in W_{p,r}^n(\mathbf{R}; Q_k)$ и $\tilde{x}^{(k)}(0) = 1$. С другой стороны, $S'_n \leq f(\tilde{x}) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) = f(x)$ вследствие выпуклости f и свойств нормы. Противоречие показывает, что на самом деле $S_n = S'_n$.

Если k — нечетное, то совершенно аналогично доказывается, что в задаче (11) достаточно рассматривать лишь нечетные функции.

Простая проверка показывает, что для соответствующих четных или нечетных функций $x \in W_{p,r}^n(\mathbf{R}; Q_k)$ необходимо $x^{(i)}(0) = 0$; $i \in \mathfrak{B}_k$. Кроме того, из четности или нечетности функции x следует, что

$$\|x^{(m)}\|_{L_s(\mathbf{R})} = 2^{1/s} \|x^{(m)}\|_{L_s(\mathbf{R}_+)},$$

если $x^{(m)} \in L_s(\mathbf{R})$, $m \geq 0$, $1 \leq s \leq \infty$.

Таким образом, каждой допустимой четной (или нечетной) функции в задаче $\zeta_1 = (k; p, r; \mathbf{R}; Q_k; a, b)$ мы сопоставили ее сужение на \mathbf{R}_+ , которое является допустимой функцией в задаче $\zeta_2 = (k; p, r; \mathbf{R}_+; Q_k \cup \mathfrak{B}_k; a2^{1/p}, b2^{1/r})$, и при этом минимизируемые функционалы в ζ_1 и ζ_2 соответственно на функции и ее сужении равны. Отсюда, очевидно, следует, что $S_n(\zeta_1) \geq S_n(\zeta_2)$.

Обратно, если рассматривается задача ζ_2 , то, пользуясь тем, что $x^{(i)}(0) = 0$, $i \in \mathfrak{B}_k$, можно продолжить четным (или нечетным) образом функции на \mathbf{R} . Теперь те же соображения, что и выше (напомним, что $Q_k \cap \mathfrak{B}_k = \emptyset$), приводят к неравенству $S_n(\zeta_2) \geq S_n(\zeta_1)$, которое и доказывает (19). Равенство (20) устанавливается совершенно аналогично. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. 2. а) Пусть $X = W_{p,r}^n(\mathbf{R}_+)$, X^* — сопряженное к X , $A = \{x \in X \mid x^{(k)}(0) = 1, x^{(i)}(0) = 0, i \in Q_k\}$ и $\delta(\cdot \mid A)$ — индикаторная функция A , т. е. функция, равная нулю на A и $+\infty$ вне A . Тогда задачу (11) можно записать в виде

$$a \|x\|_p + b \|x^{(n)}\|_r + \delta(x \mid A) \rightarrow \inf, \quad x \in X. \quad (21)$$

Пользуясь общей схемой из пункта 1, двойственную задачу к (21) выпишем относительно $Y = L_p(\mathbf{R}_+) \times L_r(\mathbf{R}_+)$ с двойственным $Y^* = L_{p'}(\mathbf{R}_+) \times L_{r'}(\mathbf{R}_+)$ (элементы Y и Y^* обозначаем соответственно $y = (y_1, y_2)$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*)$) и функции $F(x, y) = a \|x - y_1\|_p + b \|x^{(n)} - y_2\|_r + \delta(x|A)$.

По определению

$$F^*(0, y^*) = \sup_{x \in X, y \in Y} \{\langle y_1^*, y_1 \rangle + \langle y_2^*, y_2 \rangle - F(x, y)\} = \\ = \sup_{x \in A} \sup_{y \in Y} \{\langle y_1^*, y_1 \rangle + \langle y_2^*, y_2 \rangle - a \|x - y_1\|_p - b \|x^{(n)} - y_2\|_r\}.$$

Положим $z_1 = x - y_1$, $z_2 = x^{(n)} - y_2$, тогда

$$F^*(0, y^*) = \sup_{x \in A} \sup_{z_1 \in L_p} \sup_{z_2 \in L_r} \{\langle y_1^*, x \rangle + \langle y_2^*, x^{(n)} \rangle + \\ + \langle -y_1^*, z_1 \rangle - a \|z_1\|_p + \langle -y_2^*, z_2 \rangle - b \|z_2\|_r\}.$$

Теперь последовательное вычисление верхних граней по z_2 и z_1 приводит к следующему соотношению:

$$F^*(0, y^*) = \begin{cases} \sup_{x \in A} \{\langle y_1^*, x \rangle + \langle y_2^*, x^{(n)} \rangle\}, & \text{если } \|y_1^*\|_{p'} \leq a, \|y_2^*\|_{r'} \leq b, \\ +\infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, двойственная задача к (21) приобретает вид

$$-\sup_{x \in A} \{\langle y_1^*, x \rangle + \langle y_2^*, x^{(n)} \rangle\} \rightarrow \sup, \|y_1^*\|_{p'} \leq a, \|y_2^*\|_{r'} \leq b. \quad (22)$$

Пусть $\varphi : Y^* \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ — максимизируемый функционал в (22) и $\text{dom } \varphi = \{y^* = (y_1^*, y_2^*) \in Y^* \mid \varphi(y^*) > -\infty\}$. Наша ближайшая цель — доказать, что

$$\text{dom } \varphi = \{y^* = (y_1^*, y_2^*) \in Y^* \mid y_2^* \in W_{r', p'}^n(\mathbf{R}_+; \tilde{Q}_k), \\ (y_2^*)^{(n)}(t) = (-1)^{n+1} y_1^*(t) \text{ п. в. на } \mathbf{R}_+\}, \quad (23)$$

$$\varphi(y^*) = (-1)^{n-k-1} (y_2^*)^{(n-k-1)}(0), \quad y^* \in \text{dom } \varphi. \quad (24)$$

Обозначим множество справа в (23) через G , и пусть $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in \text{dom } \varphi$ ($\text{dom } \varphi \neq \emptyset$, так как $0 \in \text{dom } \varphi$). Покажем, что $y^* \in G$. Величина $-\varphi(y^*)$ есть верхняя грань линейного функционала $x \rightarrow \langle y_1^*, x \rangle + \langle y_2^*, x^{(n)} \rangle$ на линейном многообразии A и по условию $-\varphi(y^*) < +\infty$. Следовательно, на самом деле, этот функционал постоянен на A и тем самым равен нулю на подпространстве $A_0 = \{x \in W_{p, r}^n(\mathbf{R}_+) \mid x^{(i)}(0) = 0, i \in Q_k \cup \{k\}\}$, т. е.

$$\langle y_1^*, x \rangle + \langle y_2^*, x^{(n)} \rangle = \int_0^\infty (y_1^* x + y_2^* x^{(n)}) dt = 0 \quad (25)$$

для всех $x \in A_0$.

Фиксируем теперь некоторое $T > 0$ и обозначим A_0^T совокупность тех функций из A_0 , носители которых сосредоточены на $[0, T]$. Ясно, что $C_0^n([0, T]) \subset A_0^T$, и поэтому по лемме 1 (где μ абсолютно непрерывна и $\dot{y} = y_2^*$) сразу получаем, что $(y_2^*)^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и п. в. на этом отрезке $(y_2^*)^{(n-1)}(t) = (-1)^{n+1} y_1^*(t)$. Поскольку это верно для любого $T > 0$, то $(y_2^*)^{(n-1)}$ локально абсолютно непрерывна на \mathbf{R}_+ и $(y_2^*)^{(n)}(t) = (-1)^{n+1} y_1^*(t)$ п. в. на \mathbf{R}_+ . В частности, $y_2^* \in W_{r', p'}^n(\mathbf{R}_+)$.

Для доказательства включения $\text{dom } \varphi \subset G$ осталось проверить, что $(y_2^*)^{(j)}(0) = 0, j \in \tilde{Q}_k$. Используя уже доказанные свойства y^* , подсчитаем

величину $\varphi(y^*)$. Так как $y_2^* \in W_{r', p'}^n(\mathbf{R}_+)$, то по теореме Габушина [1] функции $(y_2^*)^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, ограничены на \mathbf{R}_+ . Далее по лемме 2 $x^{(i)}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $i = 0, \dots, n-1$, если только $x \in W_{p, r}^n(\mathbf{R}_+)$. Следовательно, для каждого $x \in A \subset W_{p, r}^n(\mathbf{R}_+)$ будем иметь после n -кратного интегрирования по частям второго слагаемого под знаком интеграла в (25):

$$\langle y_1^*, x \rangle + \langle y_2^*, x^{(n)} \rangle = (-1)^{n+1} \int_0^\infty (y_2^*)^{(n)} x dt + (-1)^{n-k} (y_2^*)^{(n-k-1)}(0) + \\ + \sum_{i \notin Q_k \cup \{k\}} (-1)^{n-i} (y_2^*)^{(n-i-1)}(0) x^{(i)}(0) + (-1)^n \int_0^\infty (y_2^*)^{(n)} x dt.$$

По условию верхняя грань этого выражения по всем $x \in A$ конечна, и поэтому необходимо $(y_2^*)^{(n-i-1)}(0) = 0$, $i \in J \setminus (Q_k \cup \{k\}) = J_k \setminus Q_k$, или, что то же, $(y_2^*)^{(i)}(0) = 0$, $j \in \bar{Q}_k$. Кроме того, получаем, что $\varphi(y^*) = (-1)^{n-k-1} (y_2^*)^{(n-k-1)}(0)$. Этим доказано (24) и то, что $\text{dom } \varphi \subset G$.

Обратно, если $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in G$, то после интегрирования по частям получим, что $\varphi(y^*) = (-1)^{(n-k-1)} (y_2^*)^{(n-k-1)}(0)$, т. е. $y^* \in \text{dom } \varphi$.

Ясно, что задачу (22) достаточно рассматривать лишь на $\text{dom } \varphi$. Но тогда, если обозначить $y = (-1)^{n-k-1} y_2^*$, то это в точности задача (12) и тем самым она двойственна к задаче (11) в условиях а).

Покажем теперь, что $S_n = S_n^*$. Рассмотрим отдельно два случая:

1) $1 \leq p, r < \infty$. В этой ситуации очевидным образом выполнены все условия предложения из пункта 1 (в качестве x_0 можно взять любой элемент из A), и поэтому $S_n = S_n^*$.

2) $1 \leq p < \infty, r = \infty$. Здесь уже нельзя воспользоваться упомянутым предложением, так как Y^* не является сопряженным к Y . Поступаем следующим образом. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$a \|x\|_p + b \|x^{(n)}\|_C \rightarrow \inf, x^{(k)}(0) = 1, x \in W_{p, C}^n(\mathbf{R}_+; Q_k), \quad (26)$$

где $W_{p, C}^n(\mathbf{R}_+)$ определяется аналогично пространству $W_{p, r}^n(\mathbf{R}_+)$ ($L_r(\mathbf{R}_+)$ заменяется на $C(\mathbf{R}_+)$). Двойственная к ней относительно $\tilde{Y} = L_p(\mathbf{R}_+) \times C(\mathbf{R}_+)$, $\tilde{Y}^* = L_{p'}(\mathbf{R}_+) \times V(\mathbf{R}_+)$ (с элементами $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ и $\tilde{y}^* = (\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*)$) и функции \tilde{F} , отличающейся от F заменой $L_r(\mathbf{R}_+)$ на $C(\mathbf{R}_+)$, выписывается точно так же, как и выше. В результате получаем задачу (22) с $V(\mathbf{R}_+)$ вместо $L_r(\mathbf{R}_+)$.

Далее, если $\tilde{\varphi}: \tilde{Y}^* \rightarrow \bar{R}$ — максимизируемый функционал в этой задаче, то по лемме 1, совершенно аналогично предыдущему, проверяется, что мера \tilde{y}_2^* абсолютно непрерывна, когда $\tilde{\varphi}(\tilde{y}^*) > -\infty$. Это значит, что задачу (22) достаточно рассматривать на $Y^* = L_{p'}(\mathbf{R}_+) \times L_1(\mathbf{R}_+) \subset \tilde{Y}^*$ (т. е. ее значение \tilde{S}_n^* при этом не изменяется). Но в этом случае (22) двойственна к исходной задаче при $1 \leq p < \infty, r = \infty$ и, таким образом, $S_n^* = \tilde{S}_n^*$.

Поскольку \tilde{Y}^* является сопряженным к \tilde{Y} , то из предложения п. 1 сразу получаем, что $\tilde{S}_n = \tilde{S}_n^*$, и так как, очевидно, $S_n \leq \tilde{S}_n$, то $S_n \leq \tilde{S}_n = \tilde{S}_n^* = S_n^*$. Противоположное неравенство $S_n^* \leq S_n$ верно всегда (см. п. 1) и тем самым пункт а) теоремы доказан.

б) Докажем существование решения в задаче (11). Пусть $\{x_m\}$ — минимизирующая последовательность в (11). Тогда, очевидно, $\|x_m\|_p \leq c_1$ и $\|x_m^{(n)}\|_r \leq c_2$ для некоторых $c_i > 0, i = 1, 2$. Так как $r > 1$, то можно считать что $\{x_m^{(n)}\}$ слабо сходится к некоторому $z \in L_r(I)$.

Все функции $x_m^{(n-1)}$, $m = 1, 2, \dots$, — локально абсолютно непрерывны на I , и, следовательно, для каждого $t \in I$

$$x_m(t) = \frac{t^k}{k!} + \sum_{i \in Q_k \cup \{k\}} \frac{t^i}{i!} x_m^{(i)}(0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} x_m^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (27)$$

По теореме Габушина [1] последовательности $\{x_m^{(i)}(0)\}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, равномерно ограничены по m , и поэтому можно считать, что $x_m^{(i)}(0) \rightarrow \xi_i$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда, переходя к пределу в (27) при $m \rightarrow \infty$, получим функцию $x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t)$ со свойствами: $x^{(i)}(0) = 0$, $i \in Q_k$; $x^{(k)}(0) = 1$; $x^{(n-1)}$ — локально абсолютно непрерывна и $x^{(n)}(t) = z(t)$ п. в. на I (т. е. $x^{(n)} \in L_r(I)$). Проверим, что $x \in L_p(I)$. Если $p = \infty$, то это очевидно. Если $p < \infty$, то по лемме Фату

$$\int_I |x|^p dt = \int_I \lim_{m \rightarrow \infty} |x_m|^p dt \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I |x_m|^p dt \leq C_1^p. \quad (28)$$

Итак, установлено, что $x \in W_{p,r}^n(I; Q_k)$ и $x^{(k)}(0) = 1$. Покажем, что x — решение задачи (11). Действительно, так как $x_m^{(n)}$ сходится слабо к $x^{(n)}$, то $\|x^{(n)}\|_r \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m^{(n)}\|_r$, и поэтому с учетом (28) будем иметь!

$$S_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (a \|x_m\|_p + b \|x_m^{(n)}\|_r) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} a \|x_m\|_p + \lim_{m \rightarrow \infty} b \|x_m^{(n)}\|_r \geq a \|x\|_p + b \|x^{(n)}\|_r.$$

Доказательство существования решения в задаче (12) проводится аналогично. Но можно также воспользоваться предложением из п. 1, рассматривая (12) как двойственную задачу к (11) при $p = t'$ и $r = s'$.

в) По предыдущему существуют решения \hat{x} и \hat{y} задач (11) и (12) соответственно и значения этих задач равны. Из редукции задачи (22) к (12) сразу следует, что пара $\hat{y}^* = (\hat{y}_1^*, \hat{y}_2^*)$, где $\hat{y}_1^* = (-1)^k \hat{y}^{(n)}$ и $\hat{y}_2^* = (-1)^{n-k-1} \hat{y}$, — решение задачи (22). Далее, так как $\varphi(\hat{y}^*) > -\infty$, то было показано, что $\varphi(\hat{y}^*) = -(\langle \hat{y}_1^*, x \rangle + \langle \hat{y}_2^*, x^{(n)} \rangle)$ для любого $x \in A$. Положив теперь $x = \hat{x}$, будем иметь

$$a \|\hat{x}\|_p + b \|\hat{x}^{(n)}\|_r = (-1)^{k+1} \int_0^\infty \hat{x} \hat{y}^{(n)} dt + (-1)^{n-k} \int_0^\infty \hat{x}^{(n)} \hat{y} dt. \quad (29)$$

По неравенству Гельдера

$$(-1)^{k+1} \int_0^\infty \hat{x} \hat{y}^{(n)} dt \leq \int_0^\infty |\hat{x}| |\hat{y}^{(n)}| dt \leq \|\hat{x}\|_p \|\hat{y}^{(n)}\|_{p'} \leq a \|\hat{x}\|_p, \quad (30)$$

$$(-1)^{n-k} \int_0^\infty \hat{x}^{(n)} \hat{y} dt \leq \int_0^\infty |\hat{x}^{(n)}| |\hat{y}| dt \leq \|\hat{x}^{(n)}\|_r \|\hat{y}\|_{r'} \leq b \|\hat{x}^{(n)}\|_r. \quad (31)$$

Вследствие (29) все неравенства в (30) и (31) являются равенствами. В частности, $\|\hat{y}^{(n)}\|_{p'} \hat{y} = a$, $\|\hat{y}\|_{r'} = b$.

Пусть сначала $p > 1$. Тогда, как известно, второе равенство в (30) означает, что $|\hat{y}^{(n)}|^{p'} = \lambda |\hat{x}|^p$ для некоторого $\lambda > 0$. Интегрируя, получим, что $\lambda = a^{p'} \|\hat{x}\|_p^{-p}$. Далее, так как $(-1)^{k+1} \hat{x} \hat{y}^{(n)} \leq |\hat{x}| |\hat{y}^{(n)}| = \lambda^{1/p'} |\hat{x}|^{p/p'} |\hat{x}| = \lambda^{1/p'} |\hat{x}|^p$, то функция $f = \lambda^{1/p'} |\hat{x}|^p - (-1)^{k+1} \hat{x} \hat{y}^{(n)} \geq 0$ п. в. на R_+ . С другой стороны, из первого равенства в (30) вытекает, что интеграл от f равен нулю и, следовательно, $(-1)^{k+1} \hat{x} \hat{y}^{(n)} = \lambda^{1/p'} |\hat{x}|^p = \lambda^{1/p'} |\hat{x}|^{p-1} \hat{x} \operatorname{sign} \hat{x}$

п. в. на R_+ . Деля теперь это равенство на $(-1)^{k+1}\hat{x}(t)$, если $\hat{x}(t) \neq 0$, и учитывая выражение для λ , получим второе соотношение в (13). Это соотношение верно и при $\hat{x}(t) = 0$, так как $|\hat{x}|^p$ и $|\hat{y}^{(n)}|^{p'}$ пропорциональны.

Пусть $p = 1$. Тогда $(-1)^{k+1}\hat{x}\hat{y}^{(n)} \leq |\hat{x}| |\hat{y}^{(n)}| \leq |\hat{x}| \|\hat{y}^{(n)}\|_\infty \leq a |\hat{x}|$ и, следовательно, $g = a |\hat{x}| - (-1)^{k+1}\hat{x}\hat{y}^{(n)} \geq 0$ п. в. на R_+ . Интеграл от g равен нулю вследствие равенства первого и последнего членов в (30), и поэтому точно так же, как и выше, получаем, что второе равенство в (13) имеет место и при $p = 1$.

Справедливость первого соотношения в (13) проверяется совершенно аналогично с использованием равенств (31). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. а). Пусть сначала $p < \infty$. Так как $Q_k \subset \mathfrak{M}_k$ и $\mathfrak{B}_k = J_k \setminus \mathfrak{M}_k$, то $\overline{Q_k \cup \mathfrak{B}_k} = \mathfrak{G}[J_k \setminus (Q_k \cup \mathfrak{B}_k)] = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}_k \setminus Q_k) = Q'_k$. Применяя теперь последовательно равенства (14) и (19), утверждение а) теоремы 2 и равенство (15), получим

$$\begin{aligned} K_n(k; p, r; \mathbf{R}; Q_k) &= [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} S_n(k; p, r; \mathbf{R}; Q_k; 1, 1)]^{-1} = \\ &= [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} S_n(k; p, r; \mathbf{R}_+; Q_k \cup \mathfrak{B}_k; 2^{\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{r}})]^{-1} = \\ &= [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} S_n^*(n - k - 1; r', p'; \mathbf{R}_+; Q'_k; 2^{\frac{1}{r}}, 2^{\frac{1}{p}})]^{-1} = \\ &= [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} 2^\nu K_n(n - k - 1; r', p'; \mathbf{R}_+; \tilde{Q}'_k)]^{-1}. \end{aligned}$$

Пусть $r > 1$. Тогда $r' < \infty$, и, учитывая простое соотношение $\tilde{Q}'_k = Q_k \cup \mathfrak{B}_k$, будем иметь последовательным применением равенств (14), теоремы 2 и равенств (20) и (15)

$$\begin{aligned} K_n(n - k - 1; r', p'; \mathbf{R}_+; \tilde{Q}'_k) &= [(1 - \alpha)^{1-\alpha} \alpha^\alpha S_n(n - k - 1; r', p'; \\ \mathbf{R}_+; \tilde{Q}'_k; 1, 1)]^{-1} &= [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} S_n^*(k; p, r; \mathbf{R}_+; Q_k \cup \mathfrak{B}_k; 1, 1)]^{-1} = \\ &= [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} S_n^*(k; p, r; \mathbf{R}; Q_k; 2^{\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{r}})]^{-1} = \\ &= [\alpha^\alpha (1 - \alpha)^{1-\alpha} 2^\nu K_n(k; p, r; \mathbf{R}; Q_k)]^{-1}. \end{aligned}$$

Этим доказано утверждение а) теоремы.

б). Поскольку $r > 1$, то по теореме 2 существует решение \hat{x} задачи $\zeta_1 = (k; p, r; \mathbf{R}; Q_k; 1/2, 1/2)$. По лемме 4 (см. ее доказательство) можно считать что \hat{x} четная или нечетная функция в зависимости от четности или нечетности k , и ее сужение на R_+ является решением задачи $\zeta_2 = (k; p, r; \mathbf{R}_+; Q_k \cup \mathfrak{B}_k; 2^{-1/p'}, 2^{-1/r'})$. Далее, так как $p < \infty$, то существует решение \hat{y} двойственной задачи $\zeta_2^* = (n - k - 1; r', p'; \mathbf{R}_+; Q'_k; 2^{-1/r'}, 2^{-1/p'})$, связанное с \hat{x} соотношениями (13), которые в данном случае есть в точности (3). Остается теперь только заметить, что по лемме 3 решения ζ_1 и ζ_2^* суть экстремальные функции в неравенствах $\xi = (k; p, r; \mathbf{R}; Q_k)$ и $\xi' = (n - k - 1; r', p'; \mathbf{R}_+; Q'_k)$ соответственно. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Множество $\mathfrak{M}_k = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $n \leq 2$ или $n = 3$ и $k = 1$. Следовательно, только в этих случаях $K_n(\xi)$ и $K_n(\xi')$ (одновременно) — наилучшие константы в неравенствах типа (1). Величины $K_2(1; \infty, p'; I)$ при $1 \leq p' \leq \infty$ и $K_3(1; \infty, p'; I)$ при $1 \leq p' < \infty$ ($I = R$ или $I = R_+$) найдены В. В. Арестовым [7], причем первые две — в явном виде (случай $p' = \infty$ соответствует известным неравенствам Э. Ландау ($I = R_+$) и Д. Адамара ($I = R$)). Последние две константы вычислены А. Н. Колмогоровым [8] ($I = R$) и А. П. Маториным [9] ($I = R_+$). Теперь соотношения (4)–(7) сразу следуют из этих результатов и пункта а) теоремы 1. Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2. По теореме Фань Цзы о минимаксе [10] можно переставить \inf и \sup местами в формуле (8). Тогда легко видеть, что E_n есть значение следующей задачи:

$$x^{(k)}(0) - N \|x\|_p \rightarrow \sup, \quad \|x^{(n)}\|_r \leq 1, \quad x \in W_{p,r}^n(I; Q_k).$$

Далее, точно так же как в лемме 3, устанавливается, что

$$K_n(k; p, r; I; Q_k) = \alpha^{-\alpha} (1 - \alpha)^{-(1-\alpha)} N^\alpha E_n^{1-\alpha}(N; k; p, r; I; Q_k). \quad (32)$$

Это соотношение при $Q_k = \emptyset$ ранее доказано В. Н. Габушиным [11].

Требуемое равенство есть теперь простое следствие формулы (32) и первого утверждения теоремы 1. Следствие 2 доказано.

Сделаем несколько замечаний.

1) Теорема 2 остается справедливой для задачи (11) и (12), рассматриваемых на конечном отрезке (например, для периодических функций). Так что и в этом случае получаются некоторые двойственные соотношения между верхними гранями промежуточных производных (вообще говоря, в точке) при ограничениях на сами функции и их старшие производные.

2) Можно показать, что теорема 1 верна и для пар неравенств вида $\xi = (k; \infty, 1; I; Q_k)$ и $\xi' = (n - k - 1; \infty, v; I'; Q'_k)$, где $Q_k \subset \mathfrak{A}_k$, а v симметризирует пространство $V(I')$.

3) Соотношения (3) могут быть получены в ряде случаев и из других соображений, например применение принципа максимума Понтрягина к задаче (11) (см. по этому поводу работу автора [12], где вычислены точные константы и найдены экстремальные функции в паре двойственных неравенств $\xi = (k; p, \infty; I; \emptyset)$ и $\xi' = (2 - k - 1; 1; p'; I'; \emptyset)$, $1 \leq p < \infty$, $k = 0, 1$.

В заключение автор благодарит В. М. Тихомирова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габушин В. Н. Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p . — Мат. заметки, 1967, 1, № 3, с. 291—298.
2. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов. — Мат. заметки, 1967, 1, № 2, с. 137—148.
3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
4. Экланд Н., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
5. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
6. Berkovitz L. D., Pollard H. A non-classical variational problem arising from an optimal filter problem. — J. Arch. Rat. Mech. Anal., 1967, 26, p. 281—304.
7. Арестов В. В. О точных неравенствах между нормами функций и их производных. — Acta sci. math., 1972, № 33, с. 243—267.
8. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. — Учен. зап. Моск. ун-та, 1939, 30, кн. 3, с. 3—16.
9. Маторин А. П. О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой. — Укр. мат. журн., 1955, № 7, с. 262—266.
10. Фань Цзы. Теорема о минимаксе. — В кн.: Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963.
11. Габушин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах. — Мат. заметки, 1970, 8, № 5, с. 551—562.
12. Магарил-Ильяев Г. Г. О неравенствах Колмогорова на полупрямой — Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика, 1976, № 5, с. 33—41.