K. Yu. Denisov, Asymptotic local lower deviations of strictly supercritical branching process in a random environment with geometric distributions of descendants,
Diskr. Mat., 2022, Volume 34, Issue 4, 14–27

https://www.mathnet.ru/eng/dm1725

Дискретная математика

том 34 выпуск 4 * 2022

УДК 519.214.8 DOI https://doi.org/10.4213/dm1725

Локальная асимптотика вероятностей нижних уклонений строго надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическими распределениями чисел потомков

© 2022 г. К. Ю. Денисов*

Рассматриваются вероятности нижних уклонений ветвящегося процесса $Z_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,Z_{n-1}}$ в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$, представляющей собой последовательность независимых одинаково распределенных величин. В предположении, что случайные величины $X_{i,j}$ при фиксации среды имеют геометрические распределения, а приращения ξ_i сопровождающего случайного блуждания имеют среднее $\mu > 0$ и удовлетворяют левостороннему условию Крамера $\mathbf{E}\exp(h\xi_i) < \infty$ при $h^- < h < 0$ для некоторого $h^- < -1$, найдена асимптотика локальных вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor\exp(\theta n)\rfloor)$, $n \to \infty$, при $\theta \in (\max(m^-, 0); m(-1))$, а также в некоторой окрестности $m(-1)$, где m^- и $m(-1)$ — некоторые константы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111, https://rscf.ru/project/19-11-00111/.

Ключевые слова: ветвящиеся процессы, случайная среда, случайные блуждания, условие Крамера, нижние уклонения, большие уклонения, локальные теоремы

1. Введение

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределённых (н. о. р.) случайных величин (с. в.), а $\{\phi_y\}_{y\in\mathbb{R}}$ — семейство производящих функций (п. ф.). При фиксированной среде $\boldsymbol{\eta}$ рассмотрим набор независимых случайных величин $(X_{i,j}, i, j \in \mathbb{N})$, где $X_{i,j}$ имеют п. ф. ϕ_{η_i}.

Ветвящимся процессом $(Z_n, n \geqslant 0)$ в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ (ВПСС) назовём последовательность случайных величин, заданную соотношениями

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = X_{n+1,1} + \cdots + X_{n+1,Z_n}, \qquad n \geqslant 0.$$

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: denisovkonstan@yandex.ru

Положим $\xi_i = \ln \phi'_{\eta_i}(1)$, $\mathbf{E}\xi_i = \mu$. Сопровождающим случайным блужданием ВПСС назовём последовательность случайных величин $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geqslant 1$.

В работе рассматривается случай геометрического семейства п. ф.:

$$\phi_y(s) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\phi'_y(1)(1-s)}\right)^{-1}. \tag{1}$$

ВПСС, в котором п. ф. числа потомков одной частицы задаются соотношением (1), будем называть ветвящимся процессом в случайной среде с геометрическим числом потомков (ВПССГ).

Напомним, что с. в. ζ называется решётчатой, если существуют такие вещественные числа a и b, $b > 0$, что

$$\mathbf{P}(\zeta \in \{a + bn, n \in \mathbb{Z}\}) = 1,$$

и нерешетчатой в ином случае. В работе рассматриваются ВПСС, шаги ξ сопровождающих блужданий S_n которых имеют нерешетчатые распределения.

Для ВПСС хорошо изучена задача о больших уклонениях размера популяции, т. е. исследована асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n > \exp(\theta n))$, где $\theta > \mu$. В частности, для ВПССГ асимптотика такого рода вероятностей была получена М. В. Козловым ([1], [2]). В общем случае (без предположения о геометрическом распределении числа потомков одной частицы) известны как логарифмическая асимптотика таких вероятностей ([3]), так и точная асимптотика ([4], [5]). Для вероятностей нижних уклонений $\mathbf{P}(1 \leqslant Z_n < \exp(\theta n))$, где $\theta < \mu$, исследована логарифмическая асимптотика ([6]). Локальная асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ для нижних уклонений в первой зоне уклонений, т. е. при $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (m(-1); \mu)$, где $m(-1)$ — определенная ниже константа, получена в [9].

В данной работе рассматривается задача об асимптотике вероятностей нижних уклонений в локальной форме $\mathbf{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ во второй зоне уклонений, т. е. для $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (m^-; m(-1))$, где m^- — константа, которая будет определена далее. Помимо этого рассматривается также случай, когда θ находится в некоторой окрестности $m(-1)$. Таким образом, частично исследуются переходные явления в точке $m(-1)$.

Работа организована следующим образом: в разделе 2 даются предварительные сведения о сопряженных распределениях и ВПСС, а также необходимая нам теорема 1, в разделе 3 сформулирована основная теорема 2 об асимптотике локальных вероятностей нижних уклонений ВПССГ, в разделе 4 приведены доказательства основной теоремы и вспомогательной леммы 2.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим случайное блуждание $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные нерешетчатые случайные величины с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющие условию $0 < \mu := \mathbf{E}\xi < \infty$. Здесь и далее мы будем использовать символ ξ для обозначения случайной величины, имеющей такое же распределение, что и ξ_i.

Будем предполагать, что выполнено левостороннее условие Крамера: существует такое число $h^- < 0$, что $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$. Для указанных значений параметра h положим

$$m(h) = (\ln R(h))' = \mathbf{E}\xi e^{h\xi}/R(h), \quad \sigma^2(h) = m'(h),$$
$$F^{(h)}(x) = R^{-1}(h) \int\limits_{-\infty}^{x} e^{hu}\mathbf{P}(\xi \in du).$$

Распределение, порожденное функцией $F^{(h)}$, назовем сопряженным к распределению с. в. ξ с параметром h. Независимые одинаково распределённые величины, имеющие сопряженное распределение с параметром h, будем обозначать $\xi_i^{(h)}$. Нам также понадобится обозначение $S_n^{(h)} = \xi_1^{(h)} + \dots + \xi_n^{(h)}$.

Из определения сопряженного распределения следует, что

$$\mathbf{E}\xi_i^{(h)} = m(h), \quad \mathbf{D}\xi_i^{(h)} = \sigma^2(h) > 0.$$

Следовательно, функция $m(h)$ монотонно возрастает при $h \in (h^-; 0)$. Обозначим $m^- := \lim_{h\downarrow h^-} m(h)$. Таким образом, при всех $\theta \in (m^-; \mu)$ найдётся такое единственное число h_θ, принадлежащее $(h^-, 0)$, что $m(h_\theta) = \theta$. Положим $\Lambda(\theta) = h_\theta\theta - \ln R(h_\theta)$. Функцию Λ назовем функцией уклонений.

Величины с сопряженным распределением также удовлетворяют условию Крамера. А именно, если $\widetilde{h} \in (h^-, 0)$, то

$$R^{(\widetilde{h})}(h) := \mathbf{E}\exp\bigl(h\xi^{(\widetilde{h})}\bigr) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{hx}\mathbf{P}\bigl(\xi^{(\widetilde{h})} \in dx\bigr) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{(h+\widetilde{h})x}\frac{\mathbf{P}(\xi \in dx)}{R(\widetilde{h})} = \frac{R(\widetilde{h}+h)}{R(\widetilde{h})}$$

при $h \in (h^- - \widetilde{h}; -\widetilde{h})$. Положим

$$m^{(\widetilde{h})}(h) = \bigl(\ln R^{(\widetilde{h})}(h)\bigr)'_h = \bigl(\ln R(h+\widetilde{h}) - \ln R(\widetilde{h})\bigr)'_h = m(h+\widetilde{h}).$$

По определению при каждом $\widetilde{h} \in (h^- - h_\theta; -h_\theta)$ величина $h_\theta^{(\widetilde{h})}$ должна удовлетворять уравнению

$$m^{(\widetilde{h})}(h_\theta^{(\widetilde{h})}) = \theta = m(h_\theta^{(\widetilde{h})} + \widetilde{h}).$$

Таким образом,

$$h_\theta^{(\widetilde{h})} = h_\theta - \widetilde{h}, \quad m^{(\widetilde{h})}(h_\theta^{(\widetilde{h})}) = m(h_\theta), \quad \sigma^{(\widetilde{h})}(h_\theta^{(\widetilde{h})}) = \sigma(h_\theta).$$

В дальнейшем будем говорить, что некоторое соотношение выполнено для всех последовательностей $\triangle_n$, достаточно медленно стремящимихся к 0, если существует такая последовательность $\widetilde{\triangle}_n$, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$, что интересующее нас соотношение выполнено при всех таких $\triangle_n$, что $\triangle_n \geqslant \widetilde{\triangle}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\triangle_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1 ([7]). *Пусть ξ — нерешетчатая случайная величина с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = \mu < \infty$, для которой выполнено условие Крамера: $R(h) < \infty$ при $h^- < h < 0$. Пусть $\xi_i^{(h)}$ — н.о.р. с.в., сопряженные к ξ с параметром h, $\mathbf{E}\xi^{(h)} = m(h)$ и $\mathbf{D}\xi^{(h)} = \sigma^2(h) < \infty$. Тогда при любом фиксированном $\triangle > 0$ и $n \to \infty$*

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} \in [x; x + \triangle)) = \frac{\triangle}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} \exp\left(\frac{-(x - m(h)n)^2}{2n\sigma^2(h)}\right) + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

где $o(1)$ равномерно мало по всем действительным x и $h \in [h_1; h_2] \subset (h^-; 0)$.

Теорема 1 доказана в более общем виде в [7] (теорема 1.5.3, § 1.5, с. 53), где также рассмотрен и случай сопряженных величин ([7], теорема 2.2.1, § 2.2, с. 61). Из теоремы 1 вытекает следующее необходимое нам обобщение центральной предельной теоремы.

Лемма 1. *Пусть a_n, b_n — произвольные последовательности, удовлетворяющие условиям $a_n < b_n$, $|b_n| < B\sqrt{n}$, $A < b_n - a_n < B\sqrt{n}$ для всех n и некоторых положительных констант A и B. Пусть ξ_i — нерешетчатые н.о.р. с.в. с математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi = 0$, дисперсией $\mathbf{D}\xi = 1$ и суммой $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \in [a_n; b_n]) = (1 + o(1))\left(\Phi\left(\frac{b_n}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

при $n \to \infty$.

В дальнейшем нам будет удобно обозначать через $\rho_n = \rho_n(\theta, \theta_1, \theta_2)$ величины, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. При этом в разных местах (даже в одной и той же формуле) ρ_n будет, вообще говоря, обозначать различные функции. Надеемся, что это соглашение не приведет в дальнейшем к недоразумениям. Кроме того, в некоторых случаях мы будем использовать это обозначение для величин, стремящихся к нулю при $n \to \infty$ и не зависящих от θ.

3. Основной результат

Теперь можем сформулировать основное утверждение работы.

Теорема 2 (локальная теорема о нижних уклонениях ВПССГ во второй зоне уклонений). *Пусть $(Z_n, n \geqslant 0)$ — ВПССГ со средой $\boldsymbol{\eta}$, порожденной последовательностью н.о.р. величин, $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ — его сопровождающее случайное блуждание, причем величина ξ предполагается нерешетчатой, $\mathbf{E}\xi = \mu > 0$. Предположим, что распределение с.в. ξ удовлетворяет условию Крамера: $R(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty$ при $h^- < h < 0$, где $h^- < -1$. Пусть $k(n) = k \in \mathbb{N}$ таково, что $\theta(n) = \theta := \ln k/n$.*

Пусть $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \theta_2]$, где θ_1 фиксировано, а $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + cn^{-1/2}$ для некоторого фиксированного $c > 0$. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1 + \rho_n) R^n(-1) \mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right),$$

где

$$\widehat{V}_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-S_i^{(-1)}}, \quad r_n = m(-1) - \theta.$$

Величина r_n зависит от n, так как соотношение в теореме 2 выполняется равномерно при $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, и, соответственно, θ можно считать зависящим от n.

Замечание 1. При условиях теоремы 2 верны следующие утверждения:

1) Пусть $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \theta_2]$, где $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) - n^{-1/2}\varepsilon_n$ для некоторой фиксированной положительной последовательности $\varepsilon_n = o(\sqrt{n})$, $\varepsilon_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1 + \rho_n) R^n(-1) \mathbf{E} \widehat{V}_\infty^{-2}.$$

2) Пусть $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$, где $\theta_1 = \theta_1(n) = m(-1) + cn^{-1/2} + r_1(n)$, $\theta_2 = \theta_2(n) = m(-1) + cn^{-1/2} + r_2(n)$ для некоторого фиксированного c и таких фиксированных последовательностей r_1 и r_2, что $r_1(n) < r_2(n)$, $r_1(n) = o(n^{-1/2})$, $r_2(n) = o(n^{-1/2})$ и отрезок $[\exp(\theta_1 n); \exp(\theta_2 n)]$ содержит хотя бы одно целое число при всех n. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n = k) = (1 + \rho_n) R^n(-1) \mathbf{E} \widehat{V}_\infty^{-2} \left(1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma(-1)}\right)\right).$$

4. Доказательство основного результата

В работе Агрести ([8]) для ВПССГ получены следующие соотношения:

$$\mathbf{P}(Z_n > k \mid \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{U_n + V_n} \left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k},$$

$$\mathbf{P}(Z_n = k \mid \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{U_n + V_n} \left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k} \frac{U_n}{V_n}$$

при всех натуральных k, где $U_n = e^{-S_n}$, $V_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i}$. Оценим $\mathbf{P}(Z_n = k)$ при $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \theta_2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z_n = k) &= \mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n + V_n} \frac{U_n}{V_n} \left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\right) \\
&= \frac{R^n(-1)}{R^n(-1)} \mathbf{E}\left(e^{-S_n} \frac{1}{(U_n + V_n)V_n} \left(1 + \frac{U_n}{V_n}\right)^{-k}\right) \\
&= R^n(-1) \mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n} \left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}\right), \quad (2)
\end{aligned}$$

где $\widehat{U}_n = \exp(-S_n^{(-1)})$, $\widehat{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \exp(-S_i^{(-1)})$. Обозначим $\widehat{S}_n := S_n^{(-1)} - m(-1)n$. Зафиксируем положительное $M > c$ и представим математическое ожидание в правой части (2) как сумму математических ожиданий

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n} \left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}; \widehat{S}_n \leqslant -M\sqrt{n}\right) \\
&\quad + \mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n} \left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}; \widehat{S}_n \in (-M\sqrt{n}; M\sqrt{n})\right) \\
&\quad + \mathbf{E}\left(\frac{1}{(\widehat{U}_n + \widehat{V}_n)\widehat{V}_n} \left(1 + \frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\right)^{-k}; \widehat{S}_n \geqslant M\sqrt{n}\right). \quad (3)
\end{aligned}$$

Обозначим слагаемые из (3) через I_1, I_2 и I_3 соответственно. Заметим, что величина под знаком математического ожидания в I_1 не превосходит единицы. Следовательно, согласно центральной предельной теореме, верна следующая оценка:

$$I_1 \leqslant \mathbf{P}\left(\frac{\widehat{S}_n}{\sqrt{n}\sigma(-1)} + \frac{M}{\sigma(-1)} \leqslant 0\right) = (1+\rho_n)\Phi\left(-\frac{M}{\sigma(-1)}\right). \tag{4}$$

Слагаемое I_3 оценивается аналогичным образом:

$$\begin{aligned} I_3 \leqslant \mathbf{P}&\left(\frac{\widehat{S}_n}{\sqrt{n}\sigma(-1)} - \frac{M}{\sigma(-1)} \geqslant 0\right) \\ &= (1+\rho_n)\left(1-\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)\right) = (1+\rho_n)\Phi\left(-\frac{M}{\sigma(-1)}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

В дальнейшем M будет выбрано достаточно большим, чтобы I_1 и I_3 оказались пренебрежимо малыми по сравнению с рассматриваемой асимптотикой. Далее преобразуем слагаемое I_2:

$$\begin{aligned} I_2 = (1+\rho_n)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{-M\sqrt{n}}^{M\sqrt{n}} &\frac{1}{x(x+e^{-y-m(-1)n})} \\ &\times \exp\left(-\frac{\exp(-y-(m(-1)-\theta)n)}{x}\right)\mathbf{P}(\widehat{S}_n \in dy,\ \widehat{V}_n \in dx). \end{aligned} \tag{6}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1(n,\theta) := \max(-M\sqrt{n}, -nr_n - n^{1/3}), \\ M_2 &= M_2(n,\theta) := \max(-M\sqrt{n}, -nr_n + n^{1/3}). \end{aligned}$$

Разобьем интеграл в (6) на три интеграла J_1, J_2 и J_3 по промежуткам $[-M\sqrt{n}; M_1)$, $[M_1; M_2)$ и $[M_2; M\sqrt{n}]$ соответственно. Некоторые из описанных выше промежутков интегрирования могут быть пустыми множествами, однако доказательству это не мешает. Рассмотрим интеграл J_1:

$$\begin{aligned} J_1 = (1+\rho_n)\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{-M\sqrt{n}}^{M_1} &\frac{1}{x(x+e^{-y-m(-1)n})} \\ &\times \exp\left(-\frac{\exp(-y-(m(-1)-\theta)n)}{x}\right)\mathbf{P}(\widehat{S}_n \in dy, \widehat{V}_n \in dx). \end{aligned} \tag{7}$$

Если n таково, что $-nr_n - n^{1/3} \leqslant -M\sqrt{n}$, то $M_1 = -M\sqrt{n}$. В этом случае $J_1 = 0 = \rho_n$, так как является интегралом по пустому множеству. Пусть n таково, что $-nr_n - n^{1/3} > -M\sqrt{n}$. Тогда

$$M_1 = -nr_n - n^{1/3}, \quad -y-(m(-1)-\theta)n) = -y - nr_n \geqslant n^{1/3},$$

следовательно,

$$J_1 \leqslant 2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \exp\Bigl(-\frac{e^{n^{1/3}}}{x}\Bigr) \mathbf{P}(\widehat{V}_n \in dx)$$

$$\leqslant 2 \max\Bigl(\frac{1}{x^2} \exp\Bigl(-\frac{e^{n^{1/3}}}{x}\Bigr); x \geqslant 1\Bigr) \leqslant \frac{4}{\exp(2n^{1/3}+2)} = \rho_n. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получаем, что

$$J_1 = \rho_n \quad (9)$$

при всех n. Для интеграла J_3 верно представление

$$J_3 = (1+\rho_n) \int\limits_1^{+\infty} \int\limits_{M_2}^{M\sqrt{n}} \frac{1}{x(x+e^{-y-m(-1)n})} \exp\Bigl(-\frac{\exp(-y+nr_n)}{x}\Bigr)$$

$$\times \mathbf{P}(\widehat{S}_n \in dy,\ \widehat{V}_n \in dx) = (1+\rho_n) \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathbf{P}(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}], \widehat{V}_n \in dx). \quad (10)$$

Представим меру в правой части (10) в виде

$$\mathbf{P}(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}],\ \widehat{V}_n \in dx)$$

$$= \mathbf{P}(\widehat{V}_n \in dx \mid \widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]) \mathbf{P}(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]). \quad (11)$$

Применим лемму 1 к последней вероятности в (11):

$$\mathbf{P}(\widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]) = \mathbf{P}\Bigl(\frac{\widehat{S}_n}{\sqrt{n}\sigma(-1)} \in \Bigl[\frac{M_2}{\sqrt{n}\sigma(-1)}; \frac{M}{\sigma(-1)}\Bigr]\Bigr)$$

$$= (1+\rho_n)\Bigl(\Phi\Bigl(\frac{M}{\sigma(-1)}\Bigr) - \Phi\Bigl(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\Bigr)\Bigr). \quad (12)$$

Для формулировки еще одной леммы нам понадобятся следующие обозначения:

$$\widetilde{S}_n := S_n^{(h_\theta)} - \theta n, \quad \widetilde{V}_n := \sum_{i=0}^{n-1} \exp(-S_i^{(h_\theta)}).$$

Заметим, что

$$\widetilde{V}_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-S_i^{(h_\theta)}) < \infty$$

с вероятностью 1.

Лемма 2. *В условиях теоремы 2 для произвольной константы a и любых последовательностей g_n и d_n, удовлетворяющих условиям $g_n < d_n$, $|g_n| < D\sqrt{n}$ и $G < d_n - g_n < D\sqrt{n}$ при всех n и некоторых положительных константах D и G,*

$$\mathbf{P}(\widetilde{V}_n < a \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]) \to \mathbf{P}(\widetilde{V}_\infty < a)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Доказательство этой леммы схоже с доказательством леммы 2 из [9] за некоторыми исключениями. Пусть $r \in 2,\dots,n-2$ и

$$\widetilde{V}_{r,n} = \sum_{i=r}^{n-1} \exp\bigl(-S_i^{(h_\theta)}\bigr).$$

Доказательство того, что

$$\mathbf{P}\bigl(\widetilde{V}_{r,n} > \gamma \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr) \leqslant \sum_{i=r}^{n-1} \mathbf{P}\biggl(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \frac{\theta i}{2} \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\biggr) \tag{13}$$

при всех всех положительных γ и достаточно больших n и r, без изменений повторяет доказательство оценки (24) из [9]. Доказательство того, что

$$\mathbf{P}\biggl(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \frac{\theta i}{2},\ \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\biggr) \leqslant \exp\biggl(-\frac{\sqrt[6]{n}\theta}{4}\biggr) \tag{14}$$

при $i \in (n^{2/3}; n)$, достаточно больших n и всех рассматриваемых $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, без изменений повторяет доказательство оценки (27) из [9]. Покажем, что при $i \in [r; n^{2/3}]$ для некоторого положительного фиксированного q выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\biggl(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \frac{\theta i}{2} \biggm| \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\biggr) \leqslant C(D)\exp(-iq) \tag{15}$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$, где $C(D) > 0$ и зависит только от D. Для этого представим вероятность в (15) в виде интеграла:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\biggl(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \frac{\theta i}{2} \biggm| \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\biggr) &= \frac{\mathbf{P}\bigl(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \theta i/2, \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr)}{\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr)} \\
&= \frac{1}{\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr)} \int_{-\infty}^{\theta i/2} \mathbf{P}\bigl(S_i^{(h_\theta)} \in dx, \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr) \\
&= \int_{-\infty}^{-\theta i/2} \mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_i \in dx\bigr) \frac{\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [g_n - x, d_n - x]\bigr)}{\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Докажем, что для некоторой константы $C(D)$

$$\frac{\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [g_n - x, d_n - x]\bigr)}{\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr)} \leqslant C(D) \tag{17}$$

при $i \leqslant n^{2/3}$ и $x \in (-\infty; -\theta i/2]$. Представим вероятности из (17) в виде сумм:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [g_n - x, d_n - x]\bigr) = \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} \mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [\widetilde{g_j} - x, \widetilde{d_j} - x]\bigr), \\
\mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\bigr) = \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} \mathbf{P}\bigl(\widetilde{S}_n \in [\widetilde{g_j}, \widetilde{d_j}]\bigr),
\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$\widetilde{g_j} = g_n + \frac{j(d_n - g_n)}{\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1}, \quad \widetilde{d_j} = g_n + \frac{(j+1)(d_n - g_n)}{\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1}$$

для всех j. Согласно теореме 1

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [\widetilde{g_j} - x, \widetilde{d_j} - x]\big) = \frac{\widetilde{d_j} - \widetilde{g_j}}{\sqrt{2\pi(n-i)}\sigma(h_\theta)} \exp\left(-\frac{(\widetilde{g_j} - x)^2}{2(n-i)\sigma^2(h_\theta)}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n-i}},$$
$$\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n \in [\widetilde{g_j}, \widetilde{d_j}]\big) = \frac{\widetilde{d_j} - \widetilde{g_j}}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} \exp\left(-\frac{\widetilde{g_j}^{\,2}}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n}}. \tag{19}$$

Обозначим

$$a_j(x) := \exp\left(-\frac{(\widetilde{g_j} - x)^2}{2(n-i)\sigma^2(h_\theta)}\right), \quad b_j := \exp\left(-\frac{\widetilde{g_j}^{\,2}}{2n\sigma^2(h_\theta)}\right).$$

Тогда из (19) следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [\widetilde{g_j} - x, \widetilde{d_j} - x]\big) &= \frac{a_j(x)(d_n - g_n)/(\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1) + \rho_n}{\sqrt{2\pi(n-i)}\sigma(h_\theta)}, \\ \mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n \in [\widetilde{g_j}, \widetilde{d_j}]\big) &= \frac{b_j(d_n - g_n)/(\lfloor d_n - g_n \rfloor + 1) + \rho_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)}.\end{aligned} \tag{20}$$

Используя (20) и (18), получаем, что

$$\frac{\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [g_n - x, d_n - x]\big)}{\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big)}$$
$$= \frac{\sqrt{n}\left(\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} (a_j(x) + \rho_n)\right)}{\sqrt{n-i}\left(\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} (b_j + \rho_n)\right)} = \frac{n^{-1/2}\left(\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} (a_j(x) + \rho_n)\right)}{(1+\rho_n)n^{-1/2}\left(\sum\limits_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} (b_j + \rho_n)\right)}. \tag{21}$$

Так как $a_j(x)$ и b_j лежат в полуинтервале $(0;1]$ и

$$b_j \geqslant \exp\left(\frac{-D^2}{2\sigma^2(-1)}\right)$$

для любых j, то отношение в левой части (21) ограничено некоторой величиной $C(D)$ при всех n и x, откуда следует (17). Подставляя (17) в (16), получаем, что

$$\mathbf{P}\left(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \frac{\theta i}{2} \;\middle|\; \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\right) \leqslant C(D)\mathbf{P}\left(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \frac{\theta i}{2}\right). \tag{22}$$

Согласно оценке (30) из [9]

$$\mathbf{P}\left(S_i^{(h_\theta)} \leqslant \frac{\theta i}{2}\right) \leqslant \exp(-iq) \tag{23}$$

при некотором положительном q. Объединяя (22) и (23), получаем (15). Далее, подставляя (15) и (14) в (13), так же, как в лемме 2 из [9], находим, что

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{V}_{r,n} > \gamma \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) \leqslant C(D)\frac{e^{-qr}}{1-e^{-q}} + \rho_n.$$

Отсюда, аналогично (31) из [9], получаем, что

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{V}_r < a - \gamma \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) - \frac{C(D)e^{-qr}}{1-e^{-q}} + \rho_n \\ \leqslant \mathbf{P}\big(\widetilde{V}_n < a \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\widetilde{V}_r < a \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) \quad (24)$$

при всех положительных γ и всех достаточно больших n и r. Покажем теперь, что при условиях теоремы 2 справедлива лемма 3 из [9]. А именно, что при условиях теоремы 2 при любом натуральном r

$$\mathbf{P}\big(\xi_1^{(h_\theta)} \in [a_1, b_1], \dots, \xi_r^{(h_\theta)} \in [a_r, b_r] \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) \\ \to \mathbf{P}\big(\xi_1^{(h_\theta)} \in [a_1, b_1], \dots, \xi_r^{(h_\theta)} \in [a_r, b_r]\big) \quad (25)$$

равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \mu)$ при $n \to \infty$. Для этого введём обозначения $\vec{\xi}^{(h_\theta)} = (\xi_1^{(h_\theta)}, \dots, \xi_r^{(h_\theta)})$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_r)$. Положим для краткости $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_r, b_r]$. Аналогично (16) получим, что

$$\mathbf{P}\big(\vec{\xi}^{(h_\theta)} \in B \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) = \frac{1}{\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big)} \\ \times \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} \mathbf{P}\left(\vec{\xi}^{(h_\theta)} \in d\vec{x}, S_n^{(h_\theta)} - S_r^{(h_\theta)} - \theta n \in \left[g_n - \sum_{i=1}^r x_i, d_n - \sum_{i=1}^r x_i\right]\right) \\ = \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_r}^{b_r} \mathbf{P}\big(\vec{\xi}^{(h_\theta)} \in d\vec{x}\big) \frac{\mathbf{P}\big(S_n^{(h_\theta)} - S_r^{(h_\theta)} - \theta n \in \big[g_n - \sum_{i=1}^r x_i, d_n - \sum_{i=1}^r x_i\big]\big)}{\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big)}. \quad (26)$$

Докажем, что

$$\frac{\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n - \widetilde{S}_i \in [g_n - x, d_n - x]\big)}{\mathbf{P}\big(\widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big)} = 1 + \rho_n \quad (27)$$

при $i < n$ и $|x| \leqslant c_0$, где c_0 — некоторая фиксированная константа. Соотношения (17)–(21) также верны для этих i и x, следовательно, нам нужно показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} a_j(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{\lfloor d_n - g_n \rfloor} b_j + \rho_n$$

при $|x| \leqslant c_0$. Это следует из определений $a_j(x)$ и b_j, а также из того, что $|\widetilde{g_j}| \leqslant 2D\sqrt{n}$, а $|b_j| \leqslant 1$:

$$a_j(x) = \exp\left(-\frac{(\widetilde{g_j} - x)^2}{2(n-i)\sigma^2(h_\theta)}\right) = \exp\left(-\frac{\widetilde{g_j}^{\,2}}{2n\sigma^2(h_\theta)} + \rho_n\right) = b_j + \rho_n.$$

Таким образом, утверждение (27) верно, а тогда из (27) и (4) следует, что

$$\mathbf{P}\big(\vec{\xi}^{(h_\theta)} \in B \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) = (1+\rho_n)\mathbf{P}\big(\vec{\xi}^{(h_\theta)} \in B\big).$$

Значит, при условиях теоремы 2 верно соотношение (25) — аналог леммы 3 из [9]. Используя (25) и (24), получаем, что для любого положительного γ

$$\mathbf{P}\big(\widetilde{V}_r < a-\gamma\big) - \frac{C(D)e^{-qr}}{1-e^{-q}} + \rho_n \leqslant \mathbf{P}\big(\widetilde{V}_n < a \mid \widetilde{S}_n \in [g_n, d_n]\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\widetilde{V}_r < a\big) + \rho_n$$

при всех достаточно больших n и r. Отсюда, аналогично утверждению леммы 2 из [9], следует утверждение леммы 2. Лемма 2 доказана. □

Используя лемму 2 при $\theta = -1$, $g_n = M_2$, а $d_n = M\sqrt{n}$, находим, что

$$\mathbf{P}\big(\widehat{V}_n < a \mid \widehat{S}_n \in [M_2; M\sqrt{n}]\big) \to \mathbf{P}\big(\widehat{V}_\infty < a\big) \tag{28}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1; \theta_2] \subset (\max(m^-, 0); \theta_2]$. Подставляя (12) и (28) в (10), получаем, что

$$J_3 = (1+\rho_n)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}. \tag{29}$$

Интеграл J_2 можно оценить суммой интегралов:

$$\begin{aligned} J_2 = (1+\rho_n) \int\limits_1^{+\infty}\int\limits_{M_1}^{M_2} &\frac{1}{x(x+e^{-y-m(-1)n})} \\ &\times \exp\left(-\frac{\exp(-y-(m(-1)-\theta)n)}{x}\right)\mathbf{P}\big(\widehat{S}_n \in dy, \widehat{V}_n \in dx\big) \\ &\leqslant 2\sum_{\lfloor M_1 \rfloor}^{\lceil M_2 \rceil}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\big(\widehat{S}_n \in [i; i+1), \widehat{V}_n \in dx\big) \end{aligned} \tag{30}$$

при достаточно больших n. В силу леммы 2 из (30) следует оценка

$$J_2 \leqslant 2\sum_{\lfloor M_1 \rfloor}^{\lceil M_2 \rceil}\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathbf{P}\big(\widehat{S}_n \in [i; i+1)\big)\mathbf{P}\big(\widehat{V}_\infty \in dx\big) \leqslant 4\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\sum_{\lfloor M_1 \rfloor}^{\lceil M_2 \rceil}\mathbf{P}\big(\widehat{S}_n \in [i; i+1)\big) \tag{31}$$

при достаточно больших n. Применяя теорему 1 к вероятности в правой части (31) и учитывая, что $\widehat{S}_n = S_n^{(-1)} - m(-1)n$, получаем, что

$$J_2 \leqslant 8\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\frac{2n^{1/3}+2}{\sqrt{2\pi n}\sigma(-1)} = \rho_n \tag{32}$$

при достаточно больших n. Подстановка (29), (32) и (9) в (6) приводит к равенству

$$I_2 = (1+\rho_n)\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right) - \Phi\left(\frac{\max(-M, -\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} + \rho_n \tag{33}$$

при достаточно больших n. Подставляя (33), (5) и (4) в (3), получаем, что

$$(1+\rho_n)\biggl(\Phi\biggl(\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\biggr)\biggr)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \leqslant \mathbf{E}\biggl(\frac{1}{(\widehat{U}_n+\widehat{V}_n)\widehat{V}_n}\biggl(1+\frac{\widehat{U}_n}{\widehat{V}_n}\biggr)^{-k}\biggr) \leqslant 2(1+\rho_n)\Phi\biggl(-\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr) + (1+\rho_n)\biggl(\Phi\biggl(\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\biggr)\biggr)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}. \quad (34)$$

Используя (34) и (2), находим:

$$(1+\rho_n)R^n(-1)\biggl(\Phi\biggl(\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\biggr)\biggr)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \leqslant \mathbf{P}(Z_n=k) \leqslant (1+\rho_n)R^n(-1)\biggl(2\Phi\biggl(-\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr) + \biggl(\Phi\biggl(\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\biggr)\biggr)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\biggr). \quad (35)$$

Положим

$$P_n(k)=R^n(-1)\biggl(1-\Phi\biggl(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\biggr)\biggr), \quad (36)$$

где $r_n = m(-1)-\ln k/n$. Заметим, что последовательность $1-\Phi(-\sqrt{n}r_n/\sigma(-1))$ по условию теоремы 2 ограничена и отделена от 0. Следовательно, $P_n^{-1}(k)R^n(-1)$ имеет конечный верхний предел. Отсюда следует, что с помощью выбора M можно сделать так, чтобы

$$\limsup_{n\to\infty} P_n^{-1}(k)R^n(-1)\Phi\biggl(-\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr)\leqslant\gamma \quad (37)$$

для любого наперёд заданного $\gamma>0$. Далее, заметим, что

$$\biggl(\Phi\biggl(\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\biggr)\biggr)\bigg/\biggl(1-\Phi\biggl(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\biggr)\biggr)\leqslant 1, \quad (38)$$

так как

$$\Phi\biggl(\frac{M}{\sigma(-1)}\biggr)\leqslant 1, \quad \Phi\biggl(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\biggr)\geqslant\Phi\biggl(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\biggr)$$

при всех n. Используя (35), (37) и (38), получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty} P_n^{-1}(k)\mathbf{P}(Z_n=k)\leqslant 2\gamma+\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \quad (39)$$

при достаточно больших M.

Пусть n таково, что $-\sqrt{n}r_n<-M$. Тогда

$$\Phi\biggl(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\biggr)\leqslant\Phi\biggl(\frac{-M}{\sigma(-1)}\biggr),$$

следовательно, с помощью выбора M можно сделать так, чтобы

$$\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)-\Phi\left(\frac{-M}{\sigma(-1)}\right)\right)\Big/\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\geqslant 1-\gamma. \tag{40}$$

Пусть n таково, что $-\sqrt{n}r_n \geqslant -M$. Тогда, аналогично (40), с помощью выбора M можно сделать так, чтобы

$$\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\Big/\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\geqslant 1-\gamma. \tag{41}$$

Поэтому из (40) и (41) следует, что

$$\left(\Phi\left(\frac{M}{\sigma(-1)}\right)-\Phi\left(\frac{\max(-M,-\sqrt{n}r_n)}{\sigma(-1)}\right)\right)\Big/\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right)\geqslant 1-\gamma \tag{42}$$

для любого n. Используя (35) и (42), находим, что

$$\liminf_{n\to\infty} P_n^{-1}(k)\mathbf{P}(Z_n=k)\geqslant(1-\gamma)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2} \tag{43}$$

при достаточно больших M. Устремляя γ к 0, а M, соответственно, к ∞, из (39) и (43) получаем, что

$$\mathbf{P}(Z_n=k)=(1+\rho_n)R^n(-1)\mathbf{E}\widehat{V}_\infty^{-2}\left(1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}r_n}{\sigma(-1)}\right)\right) \tag{44}$$

при $\theta\in[\theta_1;\theta_2]\subset(\max(m^-,0);\theta_2]$. Теорема 2 доказана.

Автор выражает признательность А. В. Шкляеву за постоянное внимание и полезные обсуждения.

Список литературы

1. Козлов М. В., “О больших уклонениях ветвящихся процессов в случайной среде: геометрическое распределение числа потомков”, *Дискретная математика*, **18**:2 (2006), 29–47.
2. Козлов М. В., “О больших уклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **54**:3 (2009), 439–465.
3. Bansaye V., Berestycki J., “Large deviations for branching processes in random environment”, *Markov Process. Related Fields*, **15**:3 (2009), 493–524.
4. Buraczewski D., Dyszewski P., *Precise large deviation estimates for branching process in random environment*, 2017, arXiv: 1706.03874.
5. Шкляев А. В., “Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде.II”, *Дискретная математика*, **32**:1 (2020), 135–156.
6. Bansaye V., Böinghoff C., “Lower large deviations for supercritical branching processes in random environment”, *Ветвящиеся процессы, случайные блуждания и смежные вопросы*, Труды МИАН, **282**, М: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2013, 22–41.
7. Боровков А. А., *Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстроубывающие распределения приращений*, М.: Физматлит, 2013, 447 с.

8. Agresti A., “On the extinction times of varying and random environment branching processes”, *J. Appl. Prob.*, **12**:1 (1975), 39–46.
9. Денисов К. Ю., “Асимптотика локальных вероятностей нижних уклонений ветвящегося процесса в случайной среде при геометрических распределениях чисел потомков”, *Дискретная математика*, **32**:3 (2020), 24–37.

Статья поступила 29.05.2022.