В. А. Юрко, Об обратной задаче для дифференциальных операторов на графе-еже,
Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, 2014, том 14, выпуск 1, 65–72

complex variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, 317 p. (Rus. ed. : Gunning R., Rossi Kh. Analiticheskie funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh. Moscow, Mir, 1969, 395 p.)
12. Hermander L. *An introduction to the theory of functions of several complex variables* (Rus. ed. : Hermander L. Vvedenie v teoriyu funktsii neskol'kikh kompleksnykh peremennykh. Moscow, Mir, 1968, 279 p.)
13. Krasichkov-Ternovskii I. F. Local description of closed ideals and submodules of analytic functions of one variable. II. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1980, vol. 14, no. 2, pp. 289–316.

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ-ЕЖЕ

В. А. Юрко

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Приведена теорема единственности восстановления потенциалов по заданным спектральным характеристикам, получено конструктивное решение обратной задачи.

Ключевые слова: граф-еж, операторы Штурма–Лиувилля, обратные спектральные задачи.

1. В статье исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов второго порядка на графе-еже, имеющих цикл и произвольное число граничных ребер. При этом рассматриваются обобщенные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Прямые и обратные задачи для дифференциальных операторов на графах (пространственных сетях) часто возникают в естествознании и технике (см. [1–4]). Отметим, что обратные спектральные задачи восстановления дифференциальных операторов *на деревьях* (т. е. на графах без циклов) исследовались в [3–4]. Более сложные задачи на графах с циклом изучались в [5–7] и других работах, но только в весьма частном случае так называемых *стандартных условий склейки*. В частности, задачи на графе-еже рассматривались в [6]. В данной статье рассматриваются операторы Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки (см. определения в п. 2). Этот класс условий склейки встречается в приложениях и порождает новые качественные трудности в исследовании нелинейных коэффициентных обратных задач. Для изучения этого класса обратных задач мы развиваем идеи метода спектральных отображений [8–9]. Кроме того, важную роль в исследовании играет вспомогательная обратная задача для квазипериодических операторов с условиями разрыва во внутренних точках. Основными результатами данной работы являются теорема единственности и конструктивная процедура построения решения обратной задачи для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах.

2. Рассмотрим компактный граф G в $\mathbf{R^m}$ с множеством ребер $\mathscr{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 — цикл, $\mathscr{E}' = \{e_1, \dots, e_r\}$ — граничные ребра. Пусть $\{v_1, \dots, v_{r+N}\}$ — множество вершин, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$, $v_k \in e_k$ — граничные вершины, а $U = \{v_{r+1}, \dots, v_{r+N}\}$ — внутренние вершины, $U = \mathscr{E}' \cap e_0$. Цикл e_0 состоит из N частей: $e_0 = e_{r+1} \cup \ldots \cup e_{r+N}$, $e_{r+k} = [v_{r+k}, v_{r+k+1}]$, $k = \overline{1, N}$, $v_{r+N+1} := v_{r+1}$. Каждое граничное ребро e_j, $j = \overline{1, r}$ имеет начальную точку в v_j и конечную точку на множестве U. Множество $\mathscr{E}'$ состоит из N групп ребер: $\mathscr{E}' = \mathscr{E}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{E}_N$, $\mathscr{E}_k \cap e_0 = v_{r+k}$. Пусть r_k — число ребер в $\mathscr{E}_k$; $r = r_1 + \cdots + r_N$. Обозначим $m_0 = 1$, $m_k = r_1 + \cdots + r_k$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $\mathscr{E}_k = \{e_j\}$, $j = \overline{m_{k-1} + 1, m_k}$. Ребро $e_j \in \mathscr{E}_k$ представляет собой отрезок $e_j = [v_j, v_{r+k}]$. Например, граф G с $N = 3$ и $r = 4$ изображен на рис. 1.

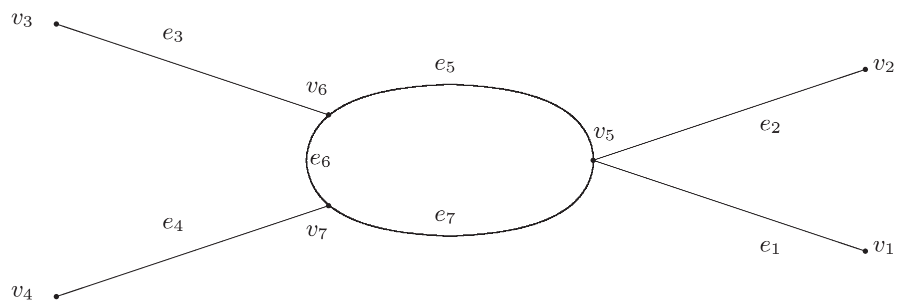

Рис. 1

Пусть T_j — длина ребра e_j, $j = \overline{1, r+N}$, а $T := T_{r+1} + \ldots + T_{r+N}$ — длина цикла e_0. Положим $b_0 = 0$, $b_k = T_{r+1} + \ldots + T_{r+k}$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $b_N = T$. Каждое ребро e_j, $j = \overline{1, r+N}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$, где $x_j = 0$ соответствует вершине v_j. Весь цикл e_0 параметризуется параметром $x \in [0, T]$, где $x = x_{r+j} + b_{j-1}$ при $x_{r+j} \in [0, T_{r+j}]$, $j = \overline{1, N}$.

Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,r+N}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$ определена на ребре e_j. Функция $y(x)$, $x \in [0, T]$, на цикле e_0 имеет вид $y(x) = y_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1,r+N}}$ — интегрируемая вещественная функция на G; Q называется потенциалом. Функция $q(x)$, $x \in [0, T]$, имеет вид $q(x) = q_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на G:

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad x_j \in [0, T_j], \qquad j = \overline{1, r+N}, \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр, функции y_j, y_j', $j = \overline{1, r+N}$ — абсолютно непрерывны на $[0, T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине $v_{\mu+1}$, $\mu = \overline{r+1, r+N}$:

$$\left.\begin{aligned} y_{\mu+1}(0) = \alpha_j y_j(T_j) \qquad &\text{для всех} \qquad e_j \in \mathscr{E}'_{\mu-r+1}, \\ y'_{\mu+1}(0) - h_{\mu+1} y_{\mu+1}(0) = &\sum_{e_j \in \mathscr{E}'_{\mu-r+1}} \beta_j y_j'(T_j), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем $y_{r+N+1} := y_{r+1}$, $h_{r+N+1} := h_{r+1}$, $\mathscr{E}_{N+1} := \mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}'_{\mu-r+1} := \mathscr{E}_{\mu-r+1} \cup e_\mu$. Здесь α_j, b_j и h_j — вещественные числа, $\alpha_j \beta_j \neq 0$. Для определенности пусть $\alpha_j \beta_j > 0$. Условия (2) являются обобщениями, так называемых стандартных условий склейки (см. [6]), где $\alpha_j = \beta_j = 1$, $h_j = 0$.

Рассмотрим краевую задачу B_0 на G для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах $v_1, \ldots, v_r$:

$$y_j(0) = 0, \qquad j = \overline{1, r}.$$

Через $\Lambda_0 = \{\lambda_{n0}\}_{n \geq 0}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задачи B_0. Рассмотрим также краевые задачи $B_{\nu_1, \ldots, \nu_p}$, $p = \overline{1, r}$, $1 \leq \nu_1 < \ldots \nu_p \leq r$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями:

$$y_k'(0) = 0, \qquad k = \nu_1, \ldots, \nu_p, \qquad y_j(0) = 0, \qquad j = \overline{1, r}, \qquad j \neq \nu_1, \ldots, \nu_p.$$

Пусть $\Lambda_{\nu_1, \ldots, \nu_p} := \{\lambda_{n, \nu_1, \ldots, \nu_p}\}_{n \geq 0}$ — спектр задачи $B_{\nu_1, \ldots, \nu_p}$.

Важную роль при решении обратных задач на графе играет вспомогательная квазипериодическая краевая задача на цикле с условиями разрыва во внутренних точках. Параметры этой задачи зависят от параметров задачи B_0. Точнее, введем вещественные числа γ_j, η_j $(j = \overline{1, N-1})$, h, α, β по формулам

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_j = \sqrt{\frac{\alpha_{r+j}}{\beta_{r+j}}}, \qquad \eta_j = \gamma_j h_{r+j+1}, \qquad j = \overline{1, N-1}, \qquad h = h_{r+1}, \\ &\alpha = \alpha_{r+N} \prod_{j=1}^{N-1} \gamma_j \prod_{j=1}^{N-1} \beta_{r+j}, \qquad \beta = \prod_{j=1}^{N-1} \gamma_j \prod_{j=1}^{N} \beta_{r+j}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ясно, что $\alpha\beta > 0$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1, N-1}$. Используя эти параметры, рассмотрим краевую задачу B на цикле e_0:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0, T), \tag{4}$$

$$y(0) = \alpha y(T), \qquad y'(0) - hy(0) = \beta y'(T), \tag{5}$$

$$y(b_j + 0) = \gamma_j y(b_j - 0), \qquad y'(b_j + 0) = \gamma_j^{-1} y'(b_j - 0) + \eta_j y(b_j - 0), \qquad j = \overline{1, N-1}. \tag{6}$$

Пусть $S(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$ — решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям разрыва (6) и начальным условиям $S(0,\lambda) = C'(0,\lambda) = 0$, $S'(0,\lambda) = C(0,\lambda) = 1$. Положим $\varphi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + hS(x,\lambda)$. Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$ задачи B совпадают с нулями характеристической функции:

$$a(\lambda) = \alpha\varphi(T,\lambda) + \beta S'(T,\lambda) - (1 + \alpha\beta). \tag{7}$$

Обозначим $d(\lambda) := S(T,\lambda)$, $Q(\lambda) = \alpha\varphi(T,\lambda) - \beta S'(T,\lambda)$. Все нули $\{z_n\}_{n\ge1}$ целой функции $d(\lambda)$ являются простыми, т. е. $\dot{d}(z_n) \ne 0$, где $\dot{d}(\lambda) := \dfrac{d}{d\lambda} d(\lambda)$. Положим $M_n = -d_1(z_n).\dot{d}(z_n)$, где $d_1(\lambda) := C(T,\lambda)$. Последовательность $\{M_n\}_{n\ge1}$ называется последовательностью Вейля. Обозначим $\omega_n = \operatorname{sign} Q(z_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n\ge1}$.

Выберем и зафиксируем по одному ребру $e_{\xi_i} \in \mathscr{E}_i$ из каждого блока $\mathscr{E}_i$, $i = \overline{1, N}$, т. е. $m_{i-1} + 1 \le \xi_i \le m_i$. Через $\xi := \{k : \ k = \xi_1, \ldots, \xi_N\}$ обозначим множество индексов ξ_i, $i = \overline{1, N}$. Пусть α_j и β_j, $j = \overline{1, r+N}$, известны априори. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Даны $2^N + r - N$ спектров Λ_j, $j = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_p \le r$, $\nu_j \in \xi$ и Ω, построить потенциал Q на G и $H := [h_j]_{j=\overline{r+1, r+N}}$.

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля на интервале и на графах.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с q рассмотрим потенциал $\tilde{q}$. Условимся, что если некоторый символ a обозначает объект, относящийся к q, то $\tilde{a}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{q}$.

Теорема 1. *Если* $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j$, $j = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_p \le r$, $\nu_j \in \xi$, $\Omega = \tilde{\Omega}$, *то* $Q = \tilde{Q}$ *и* $H = \tilde{H}$.

Эта теорема будет доказана в п. 4. Мы также дадим там конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В п. 3 мы изучим свойства спектральных характеристик и приведем вспомогательные утверждения.

3. Пусть $S_j(x_j,\lambda)$, $C_j(x_j,\lambda)$, $j = \overline{1, r+N}$, $x_j \in [0, T_j]$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях:

$$S_j(0,\lambda) = C_j'(0,\lambda) = 0, \qquad S_j'(0,\lambda) = C_j(0,\lambda) = 1. \tag{8}$$

При каждом $x_j \in [0, T_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)$, $j = \overline{1, r+N}$, $\nu = 0, 1$ являются целыми по λ порядка $1/2$.

Теорема 2. *При* $k = \overline{1, N-1}$, $\nu = 0, 1$ *справедливы соотношения*

$$S^{(\nu)}(b_{k+1} - 0, \lambda) = \gamma_k S(b_k - 0, \lambda) C_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) + \gamma_k^{-1} S'(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) +$$

$$+\eta_k S(b_k-0,\lambda)S^{(\nu)}_{r+k+1}(T_{r+k+1},\lambda), \tag{9}$$

$$C^{(\nu)}(b_{k+1}-0,\lambda)=\gamma_k C(b_k-0,\lambda)C^{(\nu)}_{r+k+1}(T_{r+k+1},\lambda)+\gamma_k^{-1}C'(b_k-0,\lambda)S^{(\nu)}_{r+k+1}(T_{r+k+1},\lambda)+$$
$$+\eta_k C(b_k-0,\lambda)S^{(\nu)}_{r+k+1}(T_{r+k+1},\lambda). \tag{10}$$

В самом деле, зафиксируем $k=\overline{1,N-1}$. Let $x\in[b_k,b_{k+1}]$, т. е. $x=x_{r+k+1}+b_k$, $x_{r+k+1}\in\in[0,T_{r+k+1}]$. Используя фундаментальную систему решений $S_{r+k+1}(x_{r+k+1},\lambda)$, $C_{r+k+1}(x_{r+k+1},\lambda)$, на e_{r+k+1}, получаем:

$$S^{(\nu)}(x,\lambda)=A(\lambda)C^{(\nu)}_{r+k+1}(x_{r+k+1},\lambda)+B(\lambda)S^{(\nu)}_{r+k+1}(x_{r+k+1},\lambda), \qquad \nu=0,1.$$

Учитывая условия (8) при $j=r+k+1$, находим коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ и приходим к (9). Соотношение (10) доказывается аналогично.

Пусть $\lambda=\rho^2$, $\tau:=\operatorname{Im}\rho\ge 0$, $\Pi:=\{\rho:\ \tau\ge 0\}$, $\Pi_\delta:=\{\rho:\ \arg\rho\in[\delta,\pi-\delta]\}$, $\delta\in(0,\pi/2)$. Следующая теорема описывает асимптотическое поведение $S(x,\lambda)$ и $C(x,\lambda)$ на каждом интервале $x\in(b_j,b_{j+1})$ (см. [10]).

Теорема 3. *Фиксируем $j=\overline{1,N-1}$. При $x\in(b_j,b_{j+1})$, $\nu=0,1$, $m=1,2$, $|\rho|\to\infty$ имеем:*

$$S^{(\nu)}(x,\lambda)=\Big(\prod_{k=1}^{j}\xi_k^+\Big)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\Big(\frac{\sin\rho x}{\rho}+\sum_{k=1}^{j}\sum_{1\le\mu_1<\ldots<\mu_k\le j}\Big(\prod_{i=1}^{k}\frac{\xi^-_{\mu_i}}{\xi^+_{\mu_i}}\Big)\frac{\sin(\rho\alpha_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x))}{\rho}\Big)+O(\rho^{\nu+m-3}e^{\tau x}),$$

$$C^{(\nu)}(x,\lambda)=\Big(\prod_{k=1}^{j}\xi_k^+\Big)\frac{d^\nu}{dx^\nu}\Big(\cos\rho x+\sum_{k=1}^{j}\sum_{1\le\mu_1<\ldots<\mu_k\le j}\Big(\prod_{i=1}^{k}\frac{\xi^-_{\mu_i}}{\xi^+_{\mu_i}}\Big)\cos(\rho\alpha_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x))\Big)++O(\rho^{\nu+m-3}e^{\tau x}),$$

где

$$\xi_j^\pm:=\frac{\gamma_j+\gamma_j^{-1}}{2}, \qquad \alpha_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x):=2\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}b_{\mu_i}+(-1)^k x.$$

Используя теорему 1, получаем при $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\Pi_\delta$:

$$a(\lambda)=\frac{(\alpha+\beta)\xi}{2}\,e^{-i\rho T}[1], \qquad d(\lambda)=-\frac{\xi}{2i\rho}\,e^{-i\rho T}[1], \qquad \xi:=\prod_{j=1}^{N-1}\xi_j^+\,. \tag{11}$$

Кроме того,

$$a(\lambda)=O(e^{\tau T}), \qquad d(\lambda)=O(\rho^{-1}e^{\tau T}), \qquad |\rho|\to\infty, \qquad \rho\in\Pi. \tag{12}$$

Фиксируем $k=\overline{1,r}$. Пусть $\Phi_k=\{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{1,r+N}}$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее (2) и краевым условиям:

$$\Phi_{kj}(0,\lambda)=\delta_{jk}, \qquad j=\overline{1,r}, \tag{13}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Обозначим $M_k(\lambda):=\Phi'_{kk}(0,\lambda)$, $k=\overline{1,r}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k. Положим $M^1_{kj}(\lambda):=\Phi_{kj}(0,\lambda)$, $M^0_{kj}(\lambda):=\Phi'_{kj}(0,\lambda)$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j,\lambda)=M^1_{kj}(\lambda)C_j(x_j,\lambda)+M^0_{kj}(\lambda)S_j(x_j,\lambda), \qquad x_j\in[0,T_j], \qquad j=\overline{1,r+N}, \qquad k=\overline{1,r}. \tag{14}$$

В частности, $M^1_{kk}(\lambda)=1$, $M^0_{kk}(\lambda)=M_k(\lambda)$. Подставляя (14) в (2) и (13), получаем линейную алгебраическую систему D_k относительно $M^\nu_{kj}(\lambda)$, $\nu=0,1$, $j=\overline{1,r+N}$. Определитель $\Delta_0(\lambda)$ системы D_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda)=\sigma(\lambda)\Big(a_0(\lambda)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{1\le\mu_1<\ldots<\mu_k\le N}a_{\mu_1\ldots\mu_k}(\lambda)\prod_{i=1}^{k}\Big(\sum_{e_j\in\mathscr{E}_{\mu_i}}\Omega_j(\lambda)\Big)\Big), \tag{15}$$

где

$$\sigma(\lambda)=\prod_{j=1}^{r}(\alpha_j S_j(T_j,\lambda)),\qquad \Omega_j(\lambda)=\frac{\beta_j S_j'(T_j,\lambda)}{\alpha_j S_j(T_j,\lambda)}\,, \tag{16}$$

$$a_0(\lambda)=a(\lambda),\qquad a_1(\lambda)=\alpha d(\lambda). \tag{17}$$

Отметим, что коэффициенты $a_0(\lambda)$ и $a_{\mu_1\ldots\mu_k}(\lambda)$ в (17) зависят только от $S_j^{(\nu)}(T_j,\lambda)$ и $C_j^{(\nu)}(T_j,\lambda)$ при $j=\overline{r+1,r+N}$, и (17) следует из теоремы 2. Нам не потребуется конкретных формул для остальных коэффициентов $a_{\mu_1\ldots\mu_k}(\lambda)$. Функция $\Delta_0(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B_0. Функция $\Delta_0(\lambda)$ называется характеристической функцией для B_0. Пусть $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)$, $p=\overline{1,r}$, $1\le\nu_1<\ldots<\nu_p\le r$ получаются из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $S_j^{(\nu)}(T_j,\lambda)$ на $C_j^{(\nu)}(T_j,\lambda)$ при $j=\nu_1,\ldots,\nu_p$, $\nu=0,1$. Точнее,

$$\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)=\sigma_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)\Big(a_0(\lambda)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{1\le\mu_1<\ldots<\mu_k\le N}a_{\mu_1\ldots\mu_k}(\lambda)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{k}\Big(\sum_{e_j\in\mathscr{E}_{\mu_i},\,j\ne\nu_1,\ldots,\nu_p}\Omega_j(\lambda)+\sum_{e_j\in\mathscr{E}_{\mu_i},\,j=\nu_1,\ldots,\nu_p}\Omega_j^0(\lambda)\Big)\Big), \tag{18}$$

где

$$\sigma_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)=\prod_{j=1,\,j\ne\nu_1,\ldots,\nu_p}^{r}(\alpha_j S_j(T_j,\lambda))\prod_{j=\nu_1,\ldots,\nu_p}(\alpha_j C_j(T_j,\lambda)),\qquad \Omega_j^0(\lambda)=\frac{\beta_j C_j'(T_j,\lambda)}{\alpha_j C_j(T_j,\lambda)}\,. \tag{19}$$

Функция $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи $B_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$. Функция $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)$ называется характеристической функцией для $B_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$.

Решая алгебраическую систему D_k по формулам Крамера, получаем $M_{kj}^s(\lambda)=\Delta_{kj}^s(\lambda)/\Delta_0(\lambda)$, $s=0,1$, $j=\overline{1,r+N}$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой столбца при $M_{kj}^s(\lambda)$ на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda)=-\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)},\qquad k=\overline{1,r}. \tag{20}$$

Равномерно по $x_j\in[0,T_j]$ имеем (см. [8]):

$$S_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)=\frac{1}{2i\rho}\Big((i\rho)^\nu\exp(i\rho x_j)[1]-(-i\rho)^\nu\exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\qquad \rho\in\Pi,\qquad |\rho|\to\infty, \tag{21}$$

$$C_j^{(\nu)}(x_j,\lambda)=\frac{1}{2}\Big((i\rho)^\nu\exp(i\rho x_j)[1]+(-i\rho)^\nu\exp(-i\rho x_j)[1]\Big),\qquad \rho\in\Pi,\qquad |\rho|\to\infty. \tag{22}$$

Кроме того, при каждом фиксированном $x_k\in[0,T_k)$:

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k,\lambda)=(i\rho)^\nu\exp(i\rho x_k)[1],\qquad \rho\in\Pi_\delta,\qquad |\rho|\to\infty.$$

В частности, $M_k(\lambda)=(i\rho)[1]$, $\rho\in\Pi_\delta$, $|\rho|\to\infty$.

Используя (15), (21), (22), (11) и (12), известным методом (см., например, [9]) получаем следующие свойства характеристической функции $\Delta_0(\lambda)$ и собственных значений Λ_0 краевой задачи B_0.

1. При $\rho\in\Pi$, $|\rho|\to\infty$,

$$\Delta_0(\lambda)=O\Big(|\rho|^{-r}\exp\Big(\tau\sum_{j=1}^{r+N}T_j\Big)\Big).$$

2. Существуют $h>0$, $C_h>0$, такие, что

$$|\Delta_0(\lambda)|\ge C_h|\rho|^{-r}\exp\Big(\tau\sum_{j=1}^{r+N}T_j\Big)$$

при $\tau \geq h$. Следовательно, собственные значения $\lambda_{n0} = \rho_{n0}^2$ лежат в области $0 \leq \tau < h$.

3. При $n \to \infty$

$$\rho_{n0} = \rho_{n0}^0 + O\Big(\frac{1}{\rho_{n0}^0}\Big),$$

где $\lambda_{n0}^0 = (\rho_{n0}^0)^2$ — собственные значения краевой задачи B_0 с $Q = 0$ и $H = 0$.

Характеристические функции $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)$ имеют аналогичные свойства. В частности, при $\rho \in \Pi$, $|\rho| \to \infty$, имеем:

$$\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda) = O\Big(|\rho|^{p-r} \exp\Big(\tau \sum_{j=1}^{r+N} T_j\Big)\Big).$$

Используя свойства характеристических функций и теорему Адамара, получаем, что задание спектра Λ_0 однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_0(\lambda)$, т.е. если $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0$, то $\Delta_0(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_0(\lambda)$. Аналогично, если $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, то $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)$. Характеристические функции могут быть построены с помощью соответствующих бесконечных произведений (подробнее см. [8]).

4. В этом параграфе мы получим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и докажем его единственность.

Фиксируем $k = \overline{1,r}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу IP(k) на ребре e_k.

IP(k). Даны два спектра Λ_0 и Λ_k, построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.

Теорема 4. *Фиксируем $k = \overline{1,r}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k.*

Решение задачи IP(k) может быть получено методом спектральных отображений [8–9].

Теперь изучим следующую вспомогательную обратную задачу IP(0) на цикле e_0. Рассмотрим краевую задачу B вида (4)–(6), где параметры задачи B_0 определяются из (3), причем α, β известны.

IP(0). Даны $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и Ω, построить $q(x)$, $x \in [0, T]$, h, γ_j и η_j, $j = \overline{1, N-1}$.

Эта обратная задача решена в [10], где получено следующее утверждение.

Теорема 5. *Задание $a(\lambda), d(\lambda)$ и Ω однозначно определяет $q(x), h, \gamma_j$ и η_j, $j = \overline{1, N-1}$. Решение задачи IP(0) может быть найдено по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1.

1. Строим $D(\lambda) = a(\lambda) + (1 + \alpha\beta)$.
2. Находим нули $\{z_n\}_{n\geq 1}$ целой функции $d(\lambda)$.
3. Вычисляем $Q(z_n)$ по формуле $Q(z_n) = \omega_n \sqrt{D^2(z_n) - 4\alpha\beta}$.
4. Строим $d_1(z_n) = (D(z_n) + Q(z_n))/(2\alpha)$.
5. Вычисляем последовательность Вейля $\{M_n\}_{n\geq 1}$ по формуле $M_n = -d_1(z_n)/\dot{d}(z_n)$.
6. По данным $\{z_n, M_n\}_{n\geq 1}$ строим $q(x), \gamma_j, \eta_j$, $j = \overline{1, N-1}$, решая разрывную обратную задачу (см. [11]).
7. Находим $S(T, \lambda)$, $S'(T, \lambda)$ и $C(T, \lambda)$.
8. Вычисляем h, используя (7).

Перейдем к решению обратной задачи 1. Сначала дадим доказательство теоремы 1. Пусть $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$ и $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда

$$\Delta_k(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda), \qquad k = \overline{0, r},$$
$$\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda), \qquad p = \overline{2, N}, \qquad 1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_p \leq r, \qquad \nu_j \in \xi.$$

Кроме того, в силу (3) имеем $\gamma_j = \tilde{\gamma}_j$, $j = \overline{1, N-1}$, $\alpha = \tilde{\alpha}$, $\beta = \tilde{\beta}$. Используя теорему 4, получаем $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$, и, следовательно,

$$C_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{C}_k(x_k, \lambda), \qquad S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda), \qquad k = \overline{1, r}. \tag{23}$$

В силу (16), (19) и (23) имеем:

$$\sigma(\lambda) \equiv \tilde{\sigma}(\lambda), \qquad \sigma_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda) \equiv \tilde{\sigma}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda), \qquad \Omega_j(\lambda) \equiv \tilde{\Omega}_j(\lambda), \qquad \Omega_j^0(\lambda) \equiv \tilde{\Omega}_j^0(\lambda), \qquad j = \overline{1,r}.$$

Используя (15) и (18), получаем, в частности, $a_0(\lambda) = \tilde{a}(\lambda)$, $a_1(\lambda) = \tilde{a}_1(\lambda)$. С учетом (17) это дает

$$a(\lambda) = \tilde{a}(\lambda), \qquad d(\lambda) = \tilde{d}(\lambda).$$

Из теоремы 5 следует, что $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п. в. на $[0, T_k]$, $k = \overline{r+1, r+N}$, $h = \tilde{h}$, $\eta_j = \tilde{\eta}_j$, $j = \overline{1, N-1}$. Учитывая (3), получаем $H = \tilde{H}$. Теорема 1 доказана.

Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 2. Даны Λ_k, $k = \overline{0,r}$, $\Lambda_{\nu_1,\ldots,\nu_p}$, $p = \overline{2,N}$, $1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_p \le r$, $\nu_j \in \xi$, Ω.

1. Строим $\Delta_k(\lambda)$ и $\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_p}(\lambda)$.
2. Вычисляем γ_j, $j = \overline{1, N-1}$, α и β, используя (3).
3. При каждом $k = \overline{1,r}$ решаем обратную задачу IP(k) и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.
4. Для $k = \overline{1,r}$ строим $C_k(x_k, \lambda)$ и $S_k(x_k, \lambda)$, $x_k \in [0, T_k]$.
5. Вычисляем $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, используя (15), (17) и (18).
6. По $a(\lambda), d(\lambda)$ и Ω строим $q_k(x_k)$, $[0, T_k]$, $k = \overline{r+1, r+N}$, h и η_j, $j = \overline{1, N-1}$.
7. Используя (3), строим H.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00134).

Библиографический список

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.
2. *Langese J. E., Leugering G., Schmidt J. P. G.* Modelling, analysis and control of dynamic elastic multilink structures. Boston, Birkhäuser, 1994.
3. *Belishev M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 647–672.
4. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.
5. *Yurko V. A.* Inverse problems for Sturm–Liouville operators on graphs with a cycle // Operators and Matrices. 2008. Vol. 2, № 4. C. 543–553.
6. *Юрко В. А.* Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 3. С. 459–471.
7. *Yurko V. A.* Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs // Inverse Problems. 2009. Vol. 25, № 10, 105008. 14 p.
8. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.
9. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
10. *Yurko V. A.* Quasi-periodic boundary value problems with discontinuity conditions inside the interval // Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik, SM–DU–767. Universität Duisburg–Essen, 2013. P. 1–7.
11. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems // Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol. 10, № 2. P. 141–164.

On an Inverse Problem for Differential Operators on Hedgehog-Type Graphs

V. A. Yurko

Saratov State University, 83, Astrahanskaya str., 410012, Saratov, Russia, YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem is studied for Sturm–Liouville differential operators on hedgehog-type graphs with generalized matching conditions in the interior vertices and with Dirichlet boundary conditions in the boundary vertices. A uniqueness theorem of recovering potentials from given spectral characteristics is provided, and a constructive solution for the inverse problem is obtained.

Key words: hedgehog-type graphs, Sturm–Liouville operatos, inverse spectral problems.

References

1. Pokornyj Ju. V., Penkin O. M., Prjadiev V. L., Borovskih A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A. *Differencial'nye uravnenija na geometricheskih grafah* [Differential equations on the geometric graphs]. Moscow, Fizmatlit, 2004 (in Russian).

2. Langese J. E., Leugering G., Schmidt J. P. G. *Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*. Boston, Birkhäuser, 1994. DOI : 10.1007/978-1-4612-0273-8.

3. Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method. *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, pp. 647–672. DOI: 10.1088/0266-5611/20/3/002.

4. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs. *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, pp. 1075–1086. DOI : 10.1088/0266-5611/21/3/017.

5. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on graphs with a cycle. *Operators and Matrices*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 543–553. DOI: 10.7153/oam-02-34.

6. Yurko V. A. Inverse problem for Sturm–Liouville operators on hedgehog-type graphs. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 3, pp. 438–449. DOI : 10.1134/S000143461103014X.

7. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs. *Inverse Problems*, 2009. vol. 25, no. 10, 105008, 14 p. DOI: 10.1088/0266-5611/25/10/105008.

8. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriju obratnyh spektral'nyh zadach* [Introduction to the inverse spectral problems theory]. Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).

9. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002.

10. Yurko V. A. Quasi-periodic boundary value problems with discontinuity conditions inside the interval. *Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik*, SM–DU–767, Universität Duisburg–Essen, 2013, pp. 1–7.

11. Yurko V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 141–164. DOI : 10.1080/10652460008819282.