И. И. Чистяков, Замечания к отделу о квадратных уравнениях,
Матем. просв., 1935, выпуск 3, 7–15

Из этого уравнения найдем, вообще говоря, n значений отношения $\frac{x}{y}$:

$$\frac{x}{y}=\frac{p_i}{q_i} \quad (i=1,\ 2, \ldots,\ n).$$

Следовательно, можно положить $x=p_i z$ и $y=q_i z$. Внеся эти выражения в первое уравнение системы (F), найдем:

$$z^n F(p_i,\ q_i)=a,$$

или

$$z_k=\sqrt[n]{\frac{a}{F(p_i,\ q_i)}} \quad (k=1,\ 2, \ldots,\ n),$$

а потому

$$x_k=p_i\sqrt[n]{\frac{a}{F(p_i,\ q_i)}},\quad y_k=q_i\sqrt[n]{\frac{a}{F(p_i,\ q_i)}}.$$

Таким образом данная система уравнений имеет n^2 корней.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОТДЕЛУ О КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

И. И. Чистяков (Москва)

1. Учению о квадратных уравнениях в учебниках алгебры обычно предшествует глава об извлечении квадратного корня из чисел, причем излагаются способы извлечения квадратного корня, как точного, так и приближенного, из целых чисел, простых и десятичных дробей. Изложение же собственно отдела о квадратных уравнениях начинается с указания на то, что в самом общем случае уравнение второй степени[1]) с одним неизвестным может быть приведено к виду:

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b и c — целые числа и $a>0$. Эта форма уравнения часто называется неприведенной; разделяя все члены уравнения на a и обозначая $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, ему дают форму приведенного уравнения:

$$x^2+px+q=0.$$

Далее рассматриваются так называемые неполные квадратные уравнения видов:

$$ax^2+bx=0,$$
$$ax^2+c=0,$$

или

$$ax^2=-c,$$

которые получаются из неприведенного уравнения соответственно при $c=0$ и $b=0$, и указываются способы для их решения: первого — с помощью разложения левой части его на множители и приравнивания каждого из них к нулю, а второго — с помощью извлечения

---

[1]) С рациональными коэфициентами. (*Прим. ред.*)

квадратного корня из обеих частей уравнения $x^2 = -\frac{c}{a}$. Наконец, излагается классический вывод формулы для решения приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$, основанный на представлении его в виде:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

и последующем извлечении квадратного корня из обеих его частей, причем получается:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

вставляя здесь $p = \frac{b}{a}$ и $q = \frac{c}{a}$, получают формулу для решения неприведенного квадратного уравнения в виде:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Таким образом при обычном изложении между предшествующим материалом — об извлечении квадратного корня из чисел — и последующим — о квадратных уравнениях — не оказывается прямой и непосредственной связи. Поэтому более естественным и методически выдержанным является иное изложение отдела о квадратных уравнениях, именно его следует начинать с рассмотрения двучленного квадратного уравнения в виде:

$$x^2 = m,$$

решение которого непосредственно приводится к извлечению квадратного корня из обеих его частей; следует только указать учащимся, что здесь обязательно брать оба знака при извлечении корня, так что это уравнение всегда имеет два корня: $x_1 = \sqrt{m}$ и $x_2 = -\sqrt{m}$, которые будут действительны при $m > 0$, оба равными нулю при $m = 0$ и мнимыми при $m < 0$. К указанному виду приводится и уравнение типа $kx^2 = l$. Переходя затем к приведенному уравнению $x^2 + px + q = 0$, можно показать, что его решение приводится к решению вышеприведенного двучленного уравнения. С этой целью воспользуемся методом подстановки; именно, положим $x = y - \frac{p}{2}$, тогда получим:

$$\left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(y - \frac{p}{2}\right) + q = 0,$$

что после упрощения дает:

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Отсюда

$$y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

и, следовательно,

$$x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2}.$$

Иначе

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

или окончательно:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Этот вывод формулы для решения неприведенного квадратного уравнения, не встречающийся в учебниках алгебры, заслуживает, по нашему мнению, внимания как вариант к классическому выводу, получаемый с помощью важного общего метода — подстановки. Получив его, следует, конечно, указать, что и в этом случае оба корня уравнения будут действительными и неравными, когда $p^2 > 4q$; действительными и равными каждый $-\frac{p}{2}$, когда $p^2 = 4q$, и мнимыми при $p^2 < 4q$.

3. Переходя далее к решению числовых уравнений приведенного типа, полезно остановиться отдельно на тех случаях, когда коэфициент p — четное, и когда p — нечетное число. В первом случае $p = 2p'$, уравнение получает вид:

$$x^2 + 2p'x + q = 0,$$

а решением его будет целое выражение:

$$x = -p' \pm \sqrt{p'^2 - q}.$$

Заслуживает особого внимания тот случай, когда коэфициент p оканчивается нулем. В этом случае $\frac{p}{2}$ оканчивается цифрой 5, а такие числа, как можно показать, особенно легко возводить в квадрат, делая это даже в уме. В самом деле, пусть

$$N = 10m + 5;$$

тогда

$$N^2 = (10m + 5)^2 = 100m^2 + 100m + 25,$$

или

$$N^2 = 100m(m + 1) + 25.$$

Следовательно, N^2 содержит $m(m+1)$ сотен и 25 единиц. Отсюда вытекает такое правило для возведения чисел, оканчивающихся цифрою 5, в квадрат: надо умножить число десятков, заключающихся в данном числе, т. е. m, на число, превышающее его на 1 (т. е. на $m + 1$), и к полученному произведению приписать 25.

Например, чтобы возвысить в квадрат число 35, надо число содержащихся в нем десятков, т. е. 3, умножить на число, единицею большее, т. е. на 4, и к полученному произведению 12 приписать 25; будем иметь в результате $35^2 = 1\,225$; подобным же образом найдем: $85^2 = 7\,225$; $695^2 = 483\,025$ и т. п.

Обратно, может случиться, что требуется извлечь квадратный корень из числа, оканчивающегося на 25 и обладающего тем свойством, что число сотен в нем может быть разложено на два множителя, из которых один на единицу более другого. Тогда, на основании сказанного выше, для извлечения квадратного корня из данного числа достаточно взять меньший из полученных сомножителей и приписать к нему 5.

Например, $\sqrt{5\,625} = 75$; $\sqrt{990\,025} = 995$ и т. п.

Ясно, что изложенные приемы возведения в степень и извлечения квадратного корня могут быть прилагаемы и к десятичным дробям, а также к целым числам с десятичною дробью, оканчивающейся на 5.

Например:

$$0{,}45^2 = 0{,}2025; \qquad 8{,}5^2 = 72{,}25$$

и т. п. Точно так же

$$\sqrt{0{,}2025} = 0{,}55; \qquad \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$$

и пр.

На основании всего изложенного выше является возможность легко решать квадратные уравнения приведенного типа в том случае, когда коэфициент p оканчивается нечетной цифрою, так как половина его будет представляться целым числом с десятичною дробью, оканчивающейся на 5, и, следовательно, легко может быть возведена в квадрат.

Например, решая уравнение

$$x^2 - 17x + 66 = 0,$$

получим:

$$x = 8{,}5 \pm \sqrt{72{,}25 - 66},$$

или

$$x = 8{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}.$$

Следовательно,

$$x = 8{,}5 \pm 2{,}5,$$

т. е.

$$x_1 = 11; \quad x_2 = 6.$$

4. Формула для решения неприведенного квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

в учебниках алгебры обычно выводится при помощи разделения обеих частей его на коэфициент a, причем получается уравнение приведенного вида:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

решая которое получаем:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Однако и эту формулу можно получить иначе, пользуясь способом подстановки. Именно, умножим обе части неприведенного уравнения на a; получим:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0,$$

затем положим $ax = y$; будем иметь приведенное уравнение:

$$y^2 + by + ac = 0;$$

решение его будет:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2},$$

а так как $x = \frac{y}{a}$, то

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Этот вывод также не встречается в учебниках алгебры. Полагая, что b — четное число, $b = 2b'$, можно придать предыдущей формуле по сокращении на 2 более простой вид:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Этой формулой и следует пользоваться при решении числовых уравнений, когда b — четное число.

Так, решая с ее помощью уравнение

$$5x^2 + 6x - 11 = 0,$$

имеем:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 55}}{5},$$

т. е.

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{11}{5}.$$

Но той же формулой можно пользоваться и в тех случаях, когда b — число нечетное, применяя соображения, приведенные в предыдущем параграфе относительно возведения в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5.

Так, имея уравнение

$$3x^2 + 5x - 22 = 0,$$

видим, что здесь $b' = \frac{5}{2} = 2{,}5$ а потому

$$x = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 + 66}}{3}$$

или

$$x = \frac{-2{,}5 \pm \sqrt{72{,}25}}{3},$$

т. е.

$$x_1 = \frac{-2{,}5 + 8{,}5}{3} = 2; \quad x_2 = \frac{-2{,}5 - 8{,}5}{3} = -\frac{11}{3}.$$

5. После вывода основных формул для решения квадратных уравнений приведенного и неприведенного типов и общего их исследования в курсах алгебры обычно выводятся выражения для суммы и произведения корней приведенного квадратного уравнения:

$$x^2 + px + q = 0,$$

т. е. формулы Виета:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

Эти формулы затем используются для дальнейшего исследования корней уравнения, именно для определения их знаков в том случае, когда они действительны и различны. Однако такой способ исследования является несколько искусственным и обычно затрудняет учащихся. Вместо него можно пользоваться непосредственным исследованием корней приведенного уравнения, т. е.

$$x_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; \quad x_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Имея в виду, что здесь $p^2 > 4q$, рассмотрим два случая:

1) $q > 0$. Тогда $\sqrt{p^2-4q}$ будет по абсолютной величине не менее p; поэтому, если при этом $p > 0$, то x_1 и x_2 будут оба отрицательны, если же $p < 0$, то оба положительны.

2) $q < 0$. В этом случае $\sqrt{p^2-4q} > p$, а потому как при p положительном, так и при p отрицательном x_1 будет положительным, а x_2 отрицательным. Результаты этого исследования могут быть представлены следующей таблицей:

p	q	x_1	x_2
+	+	—	—
—	+	+	+
+	—	+	—
—	—	+	—

Подобно этому можно сделать исследование знаков корней неприведенного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

в том случае, когда они действительны и различны, т. е. когда $b^2 > 4ac$. Действительно, в этом случае $a > 0$ и

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Рассматривая, подобно предыдущему, эти выражения, разберем отдельно два случая:

1) $c > 0$. Тогда $\sqrt{b^2-4ac}$ будет менее b по абсолютной величине, а потому при $b > 0$, x_1 и x_2 будут оба отрицательны, а при $b < 0$ оба положительны.

2) $c < 0$. В этом случае $\sqrt{b^2-4ac}$ будет по абсолютной величине более b, а потому каков бы ни был знак b, корень x_1 будет положитель-

ным, а x_2 — отрицательным. Результаты этого исследования можно представить такою таблицею:

b	c	x_1	x_2
+	+	−	−
−	+	+	+
+	−	+	−
−	−	+	−

6. Полезным упражнением является нахождение учащимися выражений для разности и частного корней приведенного квадратного уравнения.

Далее можно указать, что любая симметрическая функция корней квадратного уравнения x_1 и x_2, т. е. такое выражение, в котором x_1 и x_2 можно переставить без изменения величины этого выражения, может быть выражена через p и q. Так, кроме суммы корней x_1+x_2 и произведения их x_1x_2 симметрическими функциями корней будут: сумма их квадратов, сумма кубов, сумма обратных величин корней и т. п., т. е.

$$x_1^2+x_2^2; \quad x_1^3+x_2^3; \quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

и т. д.

Формулы Виета обычно используются в учебниках алгебры только для составления квадратного уравнения по его данным корням и, как уже было упомянуто, для исследования знаков корней, когда они действительны. Между тем с их помощью могут быть решаемы интересные задачи числового характера, в которых требуется найти два числа, если вопрос может быть приведен к выражению их суммы и произведения.

Приведем примеры таких задач:

1) Данное число p разделить на две части так, чтобы их сумма равнялась их произведению.

2) Число p разложить на два слагаемых так, чтобы сумма обратных им чисел равнялась также p.

7. Интересно найти условия, при которых корни квадратного уравнения оказываются рациональными. Такого исследования не дается в курсах алгебры, между тем оно легко может быть выполнено следующим образом. Для приведенного уравнения мы имеем:

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad (p^2>4q).$$

Чтобы найти значения p, при которых x было бы рациональным, допустим, что

$$\sqrt{p^2 - 4q} = p - 2t,$$

где t — некоторое рациональное число; будем иметь:

$$p^2 - 4q = p^2 - 4tp + 4t^2,$$

откуда

$$q = t(p - t).$$

Давая здесь произвольные рациональные значения для числа t, мы можем получить сколько угодно значений q, при которых корни приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$ будут выражаться рациональными числами.

Так, полагая в частности $t = 1$, получим $q = p - 1$, откуда заключаем, что уравнение

$$x^2 + px + p - 1 = 0,$$

в котором свободный член на единицу менее коэфициента при x в первой степени, всегда имеет рациональные корни: $x_0 = -1$; $x_2 = 1 - p$.

Так, уравнения:

$$x^2 + 5x + 4 = 0,$$
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

и т. п. имеют рациональные решения. Полагая, например, $p = 10$, а $t = -3$, получим: $q = -39$, и, следовательно, уравнение

$$x^2 + 10x - 39 = 0$$

будет иметь рациональные решения: $x_1 = 3$, $x_2 = 13$.

Подобным же образом можно вывести и соотношение между коэфициентами неприведенного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, при котором корни его, выражаемые формулой:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a},$$

будут рациональными. С этой целью положим

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = b - 2at,$$

где t — некоторое неопределенное рациональное число. Освобождаясь от радикала, получим:

$$b^2 - 4ac = b^2 - 4abt + 4a^2t^2,$$

откуда по сокращении

$$c = bt - at^2.$$

При таком значении c, x будет иметь вид:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \quad 4a(bt - at^2)}}{2a},$$

или

$$x = \frac{-b \pm (b - 2at)}{2a},$$

откуда

$$x_1 = -t, \quad x_2 = \frac{-b+t}{a}.$$

Придавая в выведенной формуле для c количеству t какие угодно рациональные значения, будем получать квадратные уравнения, имеющие рациональные корни. В частности, полагая $t = 1$ и $t = -1$, найдем для c соответственно значения $(b - a)$ и $-(a + b)$, откуда следует, что квадратные уравнения видов:

$$ax^2 + bx + (b - a) = 0$$

и

$$ax^2 + bx - (a + b) = 0$$

всегда имеют рациональные решения; первое

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = \frac{-b+a}{a},$$

а второе

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = -\frac{b+a}{a}.$$

Полагая же, например, $a = 3$, $b = 2$ и $t = 5$, найдем:

$$c = 10 - 75 = -65,$$

и уравнение примет вид:

$$3x^2 + 2x - 65 = 0.$$

Решая его, получим действительно рациональные корни:

$$x_1 = -5; \qquad x_2 = \frac{13}{3}.$$

ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОСТИ ПРАВИЛЬНЫМИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ

Р. Н. Бончковский (Москва)

В нижеследующей статье мы будем рассматривать такие покрытия плоскости разноименными правильными многоугольниками, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) Плоскость покрыта правильными многоугольниками сплошь, без просветов и двойных покрытий.

2) Вокруг всех вершин правильные многоугольники расположены одним и тем же способом, т. е. вокруг всех вершин в одном и том же порядке следуют многоугольники одних и тех же наименований. Например, если вокруг одной вершины многоугольники расположены в последовательности: треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат, то и вокруг всякой другой вершины того же покрытия многоугольники расположены в той же последовательности: треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат.

Уже в глубокой древности были известны все возможные покрытия плоскости с помощью одноименных правильных многоугольников, именно покрытие с помощью равносторонних треугольников, покрытие с помощью квадратов и покрытие с помощью правильных шестиугольников. Каких-либо других покрытий с помощью одноименных