Е. Л. Коротяев, А. Б. Пушницкий, Рассеяние на анизотропном потенциале в постоянном электрическом поле, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1995, том 230, 103–114

Е. Л. Коротяев, А. Б. Пушницкий

РАССЕЯНИЕ НА АНИЗОТРОПНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1. Введение и основные результаты

Рассмотрим рассеяние частицы в присутствии постоянного электрического поля $E \in \mathbf{R}^d$. Оператор энергии имеет вид: $H = H_E + V$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, где $H_E = -\Delta - (E, x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, а вещественный потенциал V удовлетворяет условию:

$$V \in L_\infty(\mathbf{R}^d) \quad \text{и} \quad |V(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{1.1}$$

Волновые операторы определяются стандартным образом:

$$W_\pm(H, H_E) = s - \lim \exp(itH)\exp(-itH_E), \quad t \to \pm\infty.$$

Обычно дополнительно предполагается, что $V(x) = O(|(E,x)|^{-\varepsilon_0})$ при $x \to \infty$, где $\varepsilon_0 > 1/2$. Заметим, что это условие не может быть ослаблено. Действительно, если $\varepsilon_0 \leqslant 1/2$, то становится необходимой модификация волновых операторов (см. [12], [5]). Цель настоящей работы – доказать асимптотическую полноту для случая анизотропного потенциала (см. ниже условие (1.2)). Грубо говоря, мы рассматриваем случай, когда $\varepsilon_0 \leqslant 1/2$, но V убывает по другим направлениям, и при это не требуется модификация волновых операторов. Мы используем комбинированный подход, предложенный в работе [7], применяя метод Энсса к одной части переменных и гладкую технику к другой части.

Имея в виду трехмерную физическую ситуацию, рассмотрим разложение координатного пространства: $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2} \oplus \mathbf{R}^{d_3}$. Мы будем записывать $x \in \mathbf{R}^d$ в виде $x = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_j \in \mathbf{R}^{d_j}$. Пусть V удовлетворяет условию:

$$|V(x)| \leqslant C\langle x_1\rangle^{-\varepsilon_1}\langle x_2\rangle^{-\varepsilon_2}\langle x_3\rangle^{-\varepsilon_3} \tag{1.2}$$

с некоторыми $\varepsilon_j \geqslant 0$, $j = 1,2,3$. Здесь и далее мы обозначаем $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$. Определим неотрицательные числа e_1, e_2, e_3:

$$e_j = \begin{cases} 2\varepsilon_j, & \text{если} \quad E_j \neq 0, \\ \frac{1}{4}\min\{2\varepsilon_j, d_j\}, & \text{если} \quad E_j = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов INTAS-93-1815 и гранта Европейского Сообщества в рамках контракта ESPRIT P9282 ACTS.

Вначале рассмотрим случай, когда электрическое поле E имеет ненулевую компоненту только в $\mathbf{R}^{d_1}$.

Теорема 1.1. *Пусть* $E = (E_1, 0, 0)$, $E_1 \in \mathbf{R}^{d_1}$, $E_1 \neq 0$. *Предположим, что* V *удовлетворяет условиям* (1.1), (1.2), *где*

$$e_1 + e_2 + e_3 > 1 \quad \text{и} \quad \max\{e_1, e_2, e_3\} > 1/2. \tag{1.4}$$

Тогда волновые операторы $W_\pm(H, H_E)$ *полны, сингулярный непрерывный спектр* $\sigma_{sc}(H)$ *отсутствует, все собственные значения* H *имеют конечную кратность и могут накапливаться лишь к* $\pm\infty$.

Замечания. 1. Существование волновых операторов доказывается стандартным образом с помощью метода стационарной фазы (см. например, [9, 8]) при условии $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 1$.

2. Из доказательства теоремы видно, что она остается верной для потенциалов вида $V = \sum_{k=1}^{m} V_k$, где каждый V_k удовлетворяет условиям теоремы.

Примеры. Ниже приводим эквивалентные формулировки условия (1.4) для наиболее важных частных случаев.

(i) Пусть $d_3 = 0$ (т.е. $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2}$). Тогда условие (1.4) означает, что $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2/2 > 1$ и, кроме того, a) $\varepsilon_1 > 3/8$ при $d_2 = 1$; b) $\varepsilon_1 > 1/4$ при $d_2 = 2$; c) $\varepsilon_1 > 1/8$ при $d_2 = 3$; d) $\varepsilon_1 > 0$ при $d_2 = 4$.

(ii) Пусть $d_2 = d_3 = 1$. Тогда $e_2 \leqslant 1/4$, $e_3 \leqslant 1/4$ и (1.4) может быть записано в форме: $e_1 + e_2 + e_3 > 1$ и $\varepsilon_1 > 1/4$.

Далее, рассмотрим случай, когда электрическое поле E имеет две ненулевые компоненты.

Теорема 1.2. *Пусть* $E = (E_1, E_2, 0)$, $E_j \in \mathbf{R}^{d_j}$, $E_j \neq 0$, $j = 1, 2$. *Предположим, что* V *удовлетворяет* (1.1), (1.2) *и выполнено одно из следующих условий:*

$$e_1 + e_2 + e_3 > 1 \quad \text{и} \quad e_3 > 1/2 \tag{1.5}$$

или

$$e_1 > 1/2 \quad \text{и} \quad e_2 > 1/2 \tag{1.6}$$

Тогда волновые операторы $W_\pm(H, H_E)$ *полны, сингулярный непрерывный спектр* $\sigma_{sc}(H)$ *отсутствует, все собственные значения* H *имеют конечную кратность и могут накапливаться лишь к* $\pm\infty$.

Замечания. 1. Существование волновых операторов доказывается стандартным образом с помощью метода стационарной фазы (см. например, [9, 8]) при условии $2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 > 1$.

2. В "физическом случае" $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ имеем $e_3 \leqslant 1/4$, и условие (1.5) не может быть выполнено.

2. Доказательство теорем

Напомним, что стандартное доказательство асимптотической полноты для пары операторов (H, H_E) со спектром $\sigma(H) = \sigma(H_E) = \mathbf{R}$ методом Энсса заключается в проверке следующих трех условий для подходящих ограниченных операторов $P_\pm$ таких, что $P_+ + P_- = I$.

Условие 1. *Для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ *операторы* $\varphi(H) - \varphi(H_E)$ *компактны.*

Условие 2. $s - \lim P_\mp^* \exp(-itH_E) = 0$ *при* $t \to \pm\infty$.

Условие 3. *Для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty$ *операторы* $(I - W_\pm(H, H_E))$ φ $(H_E)P_\pm$ *компактны.*

Заметим, что в силу (1.1) V есть относительно компактное возмущение оператора H_E (см. например [10, 8]) и, следовательно, Условие 1 выполнено.

В ходе доказательства теорем мы определим операторы $P_\pm$ подходящим образом для различных комбинаций условий на ε_j (здесь и далее $j \in \{1,2,3\}$). Доказательство Теорем 1.1 и 1.2 будет заключаться в прямой проверке Условий 2 и 3 для каждого выбора $P_\pm$.

Ниже мы определяем стандартные в методе Энсса "проекторы" на множество "приходящих и уходящих состояний" для операторов Шредингера и Штарка.

(i) Рассмотрим оператор Шредингера $(-\Delta)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$. Пусть J – унитарный оператор, $J : L_2(\mathbf{R}^d, dx) \to L_2(\mathbf{R}_+, d\lambda) \otimes L_2(\mathbf{S}^{d-1}, d\omega)$, реализующий спектральное представление $(-\Delta)$. Именно, пусть

$$(Jf)(\lambda,\omega) = (1/\sqrt{2})\lambda^{(d-2)/4}\hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega), \quad \lambda \geqslant 0, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbf{S}^{d-1},$$

где $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f. Определим оператор

$$Q_\pm^0 = J^*\theta\left(\pm\frac{1}{i}\frac{d}{d\lambda}\right)J, \tag{2.1}$$

где θ есть характеристическая функция интервала $(0, +\infty)$.

(ii) Рассмотрим оператор Штарка – $-\Delta - (E, x)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$. Предположим вначале, что E имеет вид: $E = (1, 0, \dots, 0)$, и будем записывать $x \in \mathbf{R}^d$ в виде $x = (x_1, x_\perp)$, где $x_\perp = (x_2, \dots, x_d)$. Пусть U – унитарный оператор, $U : L_2(\mathbf{R}^d, dx) \to L_2(\mathbf{R}, d\lambda) \otimes L_2(\mathbf{R}^{d-1}, dx_\perp)$, определенный равенством

$$(Uf)(\lambda, x_\perp) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Ai(-x_1 - \lambda) f(x_1, x_\perp) dx_1, \tag{2.2}$$

где Ai – функция Эйри. Определим оператор

$$Q_\pm^E = U^* \theta \left(\pm \frac{1}{i} \frac{d}{d\lambda} \right) U. \tag{2.3}$$

Для случая поля E общего вида заменой координат приведем его к виду $E = (1, 0, \dots, 0)$ и далее определим операторы $Q_\pm^E$ по формулам (2.2) и (2.3).

Приступим к определению операторов $Q_\pm^{(j)}$, которые будут играть роль $P_\pm$ в Условиях 2 и 3. Ниже мы существенным образом используем представление $H_E = h_1 + h_2 + h_3$, где $h_j = -\Delta_{x_j} - (E_j, x_j)$ в $L_2(\mathbf{R}^{d_j})$. Здесь и далее мы пользуемся одним и тем же обозначением для операторов A_j в $L_2(\mathbf{R}^{d_j})$ и операторов $A_1 \otimes I \otimes I$, $I \otimes A_2 \otimes I$, $I \otimes I \otimes A_3$ соответственно в $L_2(\mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2} \oplus \mathbf{R}^{d_3})$.

Определим операторы $Q_\pm^{(j)}$:

$$Q_\pm^{(j)} = \begin{cases} Q_\pm^E & \text{для} \quad h_j, \quad \text{если} \quad E_j \neq 0, \\ Q_\pm^0 & \text{для} \quad h_j, \quad \text{если} \quad E_j = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Непосредственно проверяется формула $(Q_\pm^{(j)})^* = Q_\pm^{(j)}$, а с помощью метода стационарной фазы легко установить, что

$$s - \lim Q_\mp^{(j)} \exp(-itH_E) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty \tag{2.5}$$

(см., например, [9, 8]). Как мы увидим впоследствии, формула (2.5) обеспечивает выполнение Условия 2 при любом выборе $P_\pm$.

Таким образом, доказательство Теорем 1.1 и 1.2 фактически сведено к проверке Условия 3. Эта проверка потребует применения некоторых технических результатов (большая часть которых хорошо известна), приведенных ниже.

Нижеследующие Леммы 2.1 и 2.2 дают равномерные по времени оценки (2.8) и (2.9), типичные для метода Энсса. Вначале определим срезающую функцию:

$$\eta \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \leqslant -1 \\ 0 & \text{при} \quad x \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Пусть $F(x_1 < c)$ обозначает характеристическую функцию интервала $(-\infty, c)$.

Лемма 2.1. *Пусть $H_E = -\Delta - (E, x)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, $E = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда для всех $a \in \mathbf{R}$, $\pm t > 0$, $N > 0$ справедлива следующая оценка:*

$$\|F(x_1 < t^2/2 - a)\exp(-itH_E)\eta(H_E - a)Q_\pm^E\| \leqslant C_N \langle t\rangle^{-N}, \qquad (2.7)$$

где константа C_N не зависит от a.

Доказательство потребует довольно громоздких выкладок, и мы приводим его в параграфе 3. Лемма 2.1 выражает интуитивно ясный факт, что множество $\{x_1 < t^2/2 - a\}$ есть классически запрещенная зона для частицы с энергией меньше чем a. Из оценки (2.7) немедленно следует часть (i) следующей Леммы.

Лемма 2.2. *(i) Пусть $H_E = -\Delta - (E, x)$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, $E \neq 0$, а $Q_\pm^E$ определены формулой (2.3). Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $\pm t > 0$ справедлива оценка:*

$$\|\langle x\rangle^{-\varepsilon}\exp(-itH_E)\eta(H_E - a)Q_\pm^E\| \leqslant C(a)\langle t\rangle^{-e}, \quad e = 2\varepsilon \qquad (2.8)$$

с некоторой константой $C(a)$.

(ii) Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$, а $Q_\pm^0$ определены формулой (2.1). Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\pm t > 0$ справедлива оценка:

$$\|\langle x\rangle^{-\varepsilon}\exp(-itH_0)Q_\pm^0\| \leqslant C\langle t\rangle^{-e}, \quad e = \frac{1}{4}\min\{2\varepsilon, d\} \qquad (2.9)$$

с некоторой константой C.

Доказательство (i). Без ограничения общности мы предполагаем, что $E = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда, используя Лемму 2.1 с $N > 2\varepsilon$ и элементарную оценку функции $\langle x\rangle^{-\varepsilon}$ при $x_1 > t^2/2 - a$, имеем:

$$\begin{gathered}\|\langle x\rangle^{-\varepsilon}e^{itH_E}\eta(H_E - a)Q_\pm^E\| \leqslant \\ \leqslant \|\langle x\rangle^{-\varepsilon}\| \cdot \|F(x_1 < t^2/2 - a)e^{-itH_E}\eta(H_E - a)Q_\pm^E\| + \\ + \|\langle x\rangle^{-\varepsilon}F(x_1 > t^2/2 - a)\| \cdot \|e^{-itH_E}\eta(H_E - a)Q_\pm^E\| \leqslant \\ \leqslant C_N\langle t\rangle^{-N} + C_1(a)\langle t\rangle^{-2\varepsilon} \leqslant (C_N + C_1(a))\langle t\rangle^{-2\varepsilon}\end{gathered}$$

с некоторой константой $C_1(a)$, что и дает (2.8) с $C(a) = C_N + C_1(a)$.

(ii) было доказано в [11]. •

Следующая Лемма дает "весовой" вариант гладкой техники.

Лемма 2.3. *Пусть $H_E = -\Delta - (E, x)$ в $L_2(\mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2})$ с $E = (E_1, E_2)$, $E_i \in \mathbf{R}^{d_i}$. Для $\varepsilon_i \geqslant 0$ определим e_i формулой (1.3). Пусть для некоторой константы $\gamma \geqslant 0$ выполнено условие $\gamma + e_1 + e_2 > 1/2$. Тогда* *для всех* $f \in L_2(\mathbf{R}^{d_1} \oplus \mathbf{R}^{d_2})$ *справедлива оценка:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle t\rangle^{-2\gamma} \|\langle x_1\rangle^{-\varepsilon_1}\langle x_2\rangle^{-\varepsilon_2} \exp(-itH_E)f\|^2 dt \leqslant C\|f\|^2, \tag{2.10}$$

причем константа C *не зависит от* f.

Доказательство. Пусть вначале $e_1 > 1/2$. Если $E_1 \neq 0$, то (2.10) следует из гладкости оператора $\langle x_1\rangle^{-\varepsilon_1}$ по отношению к оператору Штарка $h_1 = -\Delta_{x_1} - (E_1, x_1)$ при $\varepsilon_1 > 1/4$ (см. [6, 4]). Если $E_1 = 0$, то (2.10) следует из гладкости оператора $\langle x_1\rangle^{-\varepsilon_1}$ по отношению к оператору Шредингера $h_1 = -\Delta_{x_1}$ при $\min\{\varepsilon_1, d_1/2\} > 1$ (см. [7]).

Аналогично, при $e_2 > 1/2$ (2.10) выполнено по тем же причинам. Если $\gamma > 1/2$, то (2.10) становится тривиальным. Общий случай получается с помощью интерполяции между случаями $(e_1 > 1/2, e_2 = 0, \gamma = 0)$, $(e_1 = 0, e_2 > 1/2, \gamma = 0)$ и $(e_1 = 0, e_2 = 0, \gamma > 1/2)$. •

Комбинируя Леммы 2.2 и 2.3, мы получаем следующий результат.

Лемма 2.4. *(i) Пусть* $e_1 + e_2 + e_3 > 1$, $E_j \neq 0$ *и* $e_j > 1/2$ *для некоторого* j. *Тогда для любых* $a \in \mathbf{R}$, $r > 0$ *и* $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ *справедлива оценка:*

$$\int_r^{\infty} \|V \exp(\pm itH_E)\eta(h_j - a)Q_{\pm}^{(j)}\| dt \leqslant C(r,a)\|f\| \tag{2.11}$$

с некоторой константой $C(r,a)$, *не зависящей от* f *и такой, что* $C(r,a) \to 0$ *при* $r \to \infty$ *для любого фиксированного* a.

(ii) Пусть $e_1 + e_2 + e_3 > 1$, $E_j = 0$ *и* $e_j > 1/2$ *для некоторого* j. *Тогда для всех* $r > 0$ *и* $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ *справедлива оценка:*

$$\int_r^{\infty} \|V \exp(\pm itH_E)Q_{\pm}^{(j)} f\| dt \leqslant C(r)\|f\| \tag{2.12}$$

с некоторой константой $C(r)$, *не зависящей от* f *и такой, что* $C(r) \to 0$ *при* $r \to \infty$.

Доказательство. Без ограничения общности положим $j = 1$ и будем рассматривать знак "+".

(i) Пользуясь условием (1.2) и оценкой (2.8) из Леммы 2.2, получаем:

$$\|V \exp(-itH_E)\eta(h_1 - a)Q_+^{(1)} f\| \leqslant C(a)\langle t\rangle^{-e_1}\|\langle x_2\rangle^{-\varepsilon_2}\langle x_3\rangle^{-\varepsilon_3} e^{-it(h_2+h_3)} f\|.$$

Пользуясь строгим неравенством $e_1+e_2+e_3>1$, выберем $\delta>0$, такое что $e_1+e_2+e_3>1+\delta$. Разобьем e_1 на слагаемые в виде $e_1=1/2+\delta+\gamma$, $\gamma>0$, и применим неравенство Гельдера, а затем воспользуемся Леммой 2.3 при $\gamma=e_1-1/2-\delta$:

$$\int_r^\infty \langle t\rangle^{-e_1}\|\langle x_2\rangle^{-\varepsilon_2}\langle x_3\rangle^{-\varepsilon_3}e^{-it(h_2+h_3)}f\|dt$$
$$\leqslant \left(\int_r^\infty \langle t\rangle^{-1-2\delta}dt\right)^{1/2}\left(\int_r^\infty \langle t\rangle^{-2\gamma}\|\langle x_2\rangle^{-\varepsilon_2}\langle x_3\rangle^{-\varepsilon_3}e^{-it(h_2+h_3)}f\|^2dt\right)^{1/2}$$
$$\leqslant C_1r^{-\delta}\|f\|$$

с некоторой константой C_1. Тогда (2.11) выполнено с $C(r,a)=C_1C(a)r^{-\delta}$.

(ii) Как и в случае (i), пользуясь Леммой 2.2 (ii), имеем оценку

$$\|V\exp(-itH_E)Q_+^{(1)}f\|\leqslant C\langle t\rangle^{-e_1}\|\langle x_2\rangle^{-\varepsilon_2}\langle x_3\rangle^{-\varepsilon_3}e^{-it(h_2+h_3)}f\|,$$

и далее доказательство аналогично. •

Как будет видно из дальнейшего, приведенное ниже Следствие гарантирует выполнение Условия 3.

Следствие 2.5. (i) *Пусть $e_1+e_2+e_3>1$, и для некоторого j $E_j\neq 0$ и $e_j>1/2$. Тогда для любых $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ и $a\in\mathbf{R}$ операторы $(W_\pm-I)\varphi(H_E)\eta(h_j-a)Q_\pm^{(j)}$ компактны.*

(ii) *Пусть $e_1+e_2+e_3>1$, и для некоторого j $E_j=0$ и $e_j>1/2$. Тогда для любых $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ операторы $(W_\pm-I)\varphi(H_E)Q_\pm^{(j)}$ компактны.*

Доказательство следует стандартной схеме метода Энсса (см. [8]).

(i) Имеем

$$(W_\pm-I)\varphi(H_E)\eta(h_j-a)Q_\pm^{(j)}$$
$$=\varphi(H)(W_\pm-I)\eta(h_j-a)Q_\pm^{(j)}+(\varphi(H)-\varphi(H_E))\eta(h_j-a)Q_\pm^{(j)}.$$

Таким образом, учитывая компактность оператора $\varphi(H)-\varphi(H_E)$, остается проверить компактность второго слагаемого, которая, в свою очередь, следует из компактности его аппроксимаций

$$\varphi(H)(e^{itH}e^{-itH_E}-I)\eta(h_j-a)Q_\pm^{(j)}=\varphi(H)\int_0^t e^{itH}Ve^{-i\tau H_E}\eta(h_j-a)Q_\pm^{(j)}d\tau,$$

и их равномерной сходимости, даваемой Леммой 2.4 (ii).

(ii) доказывается аналогично. •

Теперь мы готовы доказать Теоремы 1.1 и 1.2.

Доказательство Теоремы 1.1. Ниже мы определим операторы $P_\pm$ для различных $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^3$ и проверим Условия 2 и 3, пользуясь формулой (2.5) и Следствием 2.5 (как было отмечено выше, Условие 1 выполнено благодаря (1.1)).

(i) Вначале рассмотрим случай $e_1+e_2+e_3>1$ и $e_1>1/2$. Положим $P_\pm=Q_\pm^{(1)}$. Условие 2 выполнено благодаря (2.5). Поскольку $H_E=h_1+h_2+h_3$ и $\sigma(h_2)=\sigma(h_3)=[0,+\infty)$, то для заданной $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ можно записать: $\varphi(H_E)=\varphi(H_E)\eta(h_1-a)$ с некоторым $a\geqslant 1+\sup\operatorname{supp}\varphi$ (η определено формулой (2.6)). Тогда

$$(I-W_\pm)\varphi(H_E)P_\pm=(I-W_\pm)\varphi(H_E)\eta(h_1-a)Q_\pm^{(1)}$$

и Условие 3 вытекает из Следствия 2.5 (i) с $j=1$.

(ii) Далее, пусть $e_1+e_2+e_3>1$ и $e_2>1/2$. Тогда положим $P_\pm=Q_\pm^{(2)}$. Условие 2 выполнено благодаря (2.5), а Условие 3 вытекает из Следствия 2.5 (ii) с $j=2$.

(iii) Наконец, в случае $e_1+e_2+e_3>1$ и $e_3>1/2$ нужно взять $P_\pm=Q_\pm^{(3)}$, и далее доказательство проводится в точности как и в предыдущем случае. •

Доказательство Теоремы 1.2.

(i) Вначале рассмотрим случай $e_1+e_2+e_3>1$ и $e_3>1/2$. Положим $P_\pm=Q_\pm^{(3)}$. Условие 2 выполнено благодаря (2.5), а компактность оператора $(I-W_\pm)\varphi(H_E)P_\pm$ вытекает из Следствия 2.5 (ii) с $j=3$, как и в случаях (ii) и (iii) Теоремы 1.1.

(ii) Пусть $e_1>1/2$ и $e_2>1/2$. В этом случае доказательство основано на представлении:

$$\varphi(H_E)=\varphi(H_E)\eta(h_1-a)+\varphi(H_E)\eta(h_2-a)(I-\eta(h_1-a))$$

с некоторым $a\in\mathbf{R}$, $a=a(\varphi)$. По Следствию 2.5 (i) с $j=1,2$ операторы $(I-W_\pm)\varphi(H_E)\eta(h_1-a)Q_\pm^{(1)}$ и $(I-W_\pm)\varphi(H_E)\eta(h_2-a)(I-\eta(h_1-a))Q_\pm^{(2)}$ компактны. Далее доказательство следует стандартной схеме метода Энсса с учетом формулы (2.5) (см. [2, 8]). •

3. Доказательство Леммы 2.1

В этом параграфе мы доказываем Лемму 2.1, которая описывает движение квантовой частицы в постоянном электрическом поле. Некоторые утверждения, близкие к этой Лемме, содержатся в работах [8] и [5].

Доказательство Леммы 2.1.

1. Вначале рассмотрим одномерный случай. Без ограничения общности будем рассматривать знак "+" и считать, что $t > 1$. Определим разбиение единицы класса C^∞ для интервала $(-\infty, a)$ следующим образом. Положим $\eta_k(\lambda) = \eta(\lambda - a + k) - \eta(\lambda - a + k + 1)$; тогда $\operatorname{supp} \eta_k \subset [a - k - 2, a - k]$ и $\eta(\lambda - a) = \sum_{k=0}^\infty \eta_k(\lambda)$.

Ниже мы докажем оценку для $t > 1$:

$$\|F(x < t^2/2 - a)\exp(-itH_E)\eta_k(H_E)Q_+^E\| \leqslant C_N(1+k)^{-N}\langle t\rangle^{-N} \quad (3.1)$$

из которой суммированием по k легко получить (2.7).

2. Для доказательства оценки (3.1) выпишем в явном виде оператор Q_+^E. Пусть Φ обозначает преобразование Фурье в $L_2(\mathbf{R})$. Для любого $f \in L_2(\mathbf{R})$ имеем:

$$Q_+^E f = U^*\Phi^*\theta(p)\Phi U f = U^*\Phi^*\theta(p)g(p),$$

где $g = \Phi U f$, $\|g\| = \|f\|$, а U определено формулой (2.2). Таким образом, для того, чтобы доказать (3.1), достаточно показать, что для любого $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$:

$$\|F(x < t^2/2 - a)U^* e^{-it\lambda}\eta_k(\lambda)\Phi^* g\| \leqslant C_N(1+k)^{-N}\langle t\rangle^{-N}\|g\|. \quad (3.2)$$

Но для $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ мы имеем:

$$[F(x < t^2/2 - a)U^* e^{-it\lambda}\eta_k(\lambda)\Phi^* g](x) = \int_0^\infty M_{t,k}(x,p)g(p)dp,$$

с ядром

$$M_{t,k}(x,p) = F(x < t^2/2 - a)\int_{-\infty}^\infty Ai(-x-\lambda)e^{-i(p+t)\lambda}\eta_k(\lambda)d\lambda \quad (3.3)$$

при $t > 1$ и $p > 0$. Ниже мы доказываем оценку для любого $N > 0$:

$$|M_{t,k}(x,p)| \leqslant F(x < t^2/2 - a)C_N'(t^2 - x - a + k)^{-N} \quad (3.4)$$

(с некоторой константой C_N'), из которой легко получить (3.2).

3. Докажем оценку (3.4). Меняя обозначения в формуле (3.3), мы видим, что (3.4) будет следовать из оценки для любого $b < t^2/2$:

$$\left|\int_{-\infty}^\infty Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\omega(\lambda - b)d\lambda\right| \leqslant C_N'(t^2 - b)^{-N}, \quad (3.5)$$

где $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp}\omega \in [-2,0]$. Для доказательства (3.5) мы проделаем следующее простое вычисление. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$. Интегрируя по частям и используя уравнение Эйри для $Ai(\lambda)$, легко получить:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi(\lambda)d\lambda = (1/t^2)\int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi(\lambda)d\lambda$$
$$+ (2i/t)\int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi'(\lambda)d\lambda + (1/t^2)\int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\varphi''(\lambda)d\lambda.$$

Положим $\varphi(\lambda) = \omega(\lambda - b)(1-\lambda/t^2)^{-1}$. Тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\omega(\lambda-b)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}[(2i/t)\omega'(\lambda-b)(1-\lambda/t^2)^{-1}$$
$$+ (2i/t^3)\omega(\lambda-b)(1-\lambda/t^2)^{-2} + (1/t^2)\omega''(\lambda-b)(1-\lambda/t^2)^{-1}$$
$$+ (2/t^4)\omega'(\lambda-b)(1-\lambda/t^2)^{-2} + (2/t^6)\omega(\lambda-b)(1-\lambda/t^2)^{-3}]d\lambda.$$

Вновь применяя последнюю формулу к каждому слагаемому в правой части, и повторяя это вычисление $2N$ раз, видим, что (3.5) будет следовать из оценки:

$$t^{-m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} Ai(-\lambda)e^{-it\lambda}\omega^{(l)}(\lambda-b)(1-\lambda/t^2)^{-n}d\lambda\right| \leqslant C_N''(t^2-b)^{-N} \quad (3.6)$$

с некоторыми константами C_N'' для всех $n \geqslant 2N$, $m \geqslant 2N$, и $l \leqslant 4N$. Но для $(\lambda - b) \in \operatorname{supp}\omega$ имеем $t^2(1-\lambda/t^2) \geqslant t^2 - b$, и (3.6) выполнено.

4. Наконец, мы обращаемся к многомерному случаю. Пусть $\Phi_\perp$ обозначает преобразование Фурье по переменным $x_\perp$ в $L_2(\mathbf{R}^d)$. Тогда

$$H_E = \Phi_\perp^*(h_1 + \mathbf{p}_\perp^2)\Phi_\perp,$$

где $h_1 = -d^2/dx_1^2 - x_1$ в $L_2(\mathbf{R}, dx_1)$, а $\mathbf{p}_\perp^2$ обозначает оператор умножения на $p_\perp^2$ в $L_2(\mathbf{R}^{d-1}, dp_\perp)$. Для $f \in L_2(\mathbf{R}^d)$ будем писать $\hat f = \Phi_\perp f$ и $\hat f(\cdot, p_\perp) = f_{p_\perp} \in L_2(\mathbf{R}, dx_1)$ для п.в. $p_\perp \in \mathbf{R}^{d-1}$. Для $\pm t > 0$, используя (2.7) при $d = 1$, имеем:

$$
\begin{aligned}
&\|F(x_1 < t^2/2 - a)\exp(-itH_E)\eta(H_E - a)Q_\pm^E f\|^2 \\
&= \int\limits_{\mathbf{R}^{d-1}} \|F(x_1 < t^2/2 - a)\exp(-it(h_1 + p_\perp^2))\eta(h_1 + p_\perp^2 - a)Q_\pm^E f_{p_\perp}\|^2_{L_2(\mathbf{R})} dp_\perp \\
&= \int\limits_{\mathbf{R}^{d-1}} \|F(x_1 < t^2/2 - a)F(x_1 < t^2 - (a - p_\perp^2))\exp(-it(h_1 + p_\perp^2)) \\
&\qquad \times \eta(h_1 - (a - p_\perp^2))Q_\pm^E f_{p_\perp}\|^2_{L_2(\mathbf{R})} dp_\perp \\
&\qquad \leqslant C_N \langle r\rangle^{-N} \int\limits_{\mathbf{R}^{d-1}} \|f_{p_\perp}\|^2_{L_2(\mathbf{R})} dp_\perp = C_N \langle t\rangle^{-N} \|f\|^2,
\end{aligned}
$$

что и завершает доказательство. •

Литература

1. J. E. Avron, I. W. Herdst, *Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to Stark effect.* — Comm. Math. Phys. **52** (1977), 239–254.
2. V. Enss, *Asymptotic completeness for quantum-mechanical potential scattering. I. Short-range potentials.* — Comm. Math. Phys. **61** (1978), 285–291.
3. I. W. Herbst, *Unitary equivalence of Stark Hamiltonians.* — Math. Z. **155** (1977), 55–70.
4. I. Herbst, J. S. Moller, E. Skibsted, *Spectral analysis of N-body Stark Hamiltonians.* — Preprint, Aarhus Universitet, Mathematisk Institut No. 15 (1994).
5. I. Herbst, J. S. Moller, E. Skibsted, *Asymptotic completeness of N-body Stark Hamiltonians.* — Preprint, Aarhus Universitet, Mathematisk Institut No. 14 (1994).
6. Е. Л. Коротяев, *К теории рассеяния многих частиц во внешнем электрическом поле.* — Матем. Сборник **132(174)**, № 2 (1987), 182-201.
7. Е. Л. Коротяев, *Метод Энсса при учете анизотропии.* — Росс. Акад. Наук Докл. **324**, № 5 (1992), 923–927.
8. P. A. Perry, *Scattering Theory by Enss Method.* — Mathematical Reports **1** (1983), 1–347.
9. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, III.* — N. Y., Acedemic Press (1979).
10. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, IV,.* — N. Y., Acedemic Press (1978).
11. Д. Р. Яфаев, *Подпространства рассеяния и асимптотическая полнота для нестационарного уравнения Шредингера.* — Матем. Сборник **118(160)** (1982), 262–279.
12. D. White, *The Stark effect and long-range scattering in two Hilbert spaces.* — Indiana Univ. Math. J. **39** **No. 2** (1990), 517–546.

Korotyaev E. L., Pushnitskii A. B. Scattering by anisotropic potential in a constant electric field.

The scattering of a particle on anisotropic potential in a constant electric field is considered. The asymptotic completeness without modification of wave operators is proved under some conditions on anisotropic decaying of long-range potential. The mixed approach is used in which the Enss method is applied to one part of variables and the smooth technique is applied to another part.

Санкт-Петербургский
Электротехнический университет

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 сентября 1995 г.