Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. А. Жукова, А. В. Шутов, Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи, *Чебышевский сб.*, 2022, том 23, выпуск 2, 88–105

DOI: 10.22405/2226-8383-2022-23-2-88-105

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
23 января 2025 г., 23:10:03

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 23. Выпуск 2.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-88-105

Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации (Владимирский филиал) (г. Владимир).
e-mail: georg967@mail.ru
Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Гельфонд доказал равномерность распределения сумм цифр двоичных разложений натуральных чисел по арифметическим прогрессиям. В дальнейшем этот результат был обобщен на многие другие системы счисления, в том числе, на систему счисления Фибоначчи.

Эминян нашел асимптотическую формулу для количества натуральных чисел n, не превосходящих заданного, у которых n и $n+1$ имеют заданную четность суммы цифр двоичного разложения. Недавно данный результат был обобщен Шутовым на случай разложений натуральных чисел в систему счисления Фибоначчи.

В настоящей работе мы рассматриваем более общую задачу о количестве натуральных чисел n, не превосходящих заданного X, у которых n и $n+l$ имеют заданную четность суммы цифр разложения в систему счисления Фибоначчи. Приведен метод, позволяющий получить асимптотическую формулу для данного количества при всех l. В основе метода – изучение некоторых специальных сумм, связанных с задачей и рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют эти суммы. Показано, что при всех l и при всех вариантах четности главный член асимптотики отличен от ожидаемого значения $\frac{X}{4}$. Также доказано, что остаточный член имеет порядок $O(\log X)$. В случае $l \leq 10$ константы в главном члене асимптотической формулы найдены в явном виде.

В заключении работы сформулирован ряд открытых проблем для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, задача Эминяна, суммы цифр.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
А. А. Жукова, А. В. Шутов. Об аналоге задачи Эминяна для системы счисления Фибоначчи // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 2, с. 88–105.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 23. No. 2.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-2-88-105

An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Presidental Russian Academy of National Economy and Public Administration (Vladimir branch) (Vladimir).
e-mail: georg967@mail.ru
Shutov Anton Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs (Vladimir).
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

Gelfond proved the uniformity of distribution of the sums of binary digits expansions of natural numbers in arithmetic progressions. Later, this result was generalized to many other numeration systems, including Fibonacci numeration system.

Eminyan find an asymptotic formula for the number of natural n, not exceeding a given one, such that n and $n+1$ have a given parity of the sum of digits of their binary expansions. Recently, this result was generalized by Shutov to the case of Fibonacci numeration system.

In the paper we consider quite more general problem about the number of natural n, not exceeding X, such that n and $n+l$ have a given parity of the sum of digits of their representations in Fibonacci numeration system. A method is presented that allows to obtain asymptotic formula for a given quantity for all l. It is based on the study of some special sums associated with the problems and recurrence relations for these sums. It is shown that for any l and all variants of parity the leading term of the asymptotic is different from the expected value $\frac{X}{4}$. Als it is proved that the remainder has the order $O(\log X)$. For $l \le 10$ constants in the leading term of asymptotic formulas are found explicitly.

In the conclusion of the work, some open problems for further research are formulated.

Keywords: Fibonacci numers, Eminyan's problem, sums of digits.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2022, "An analogue of Eminian's problem for the Fibonacci number system" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 2, pp. 88–105.

1. Введение

Представим натуральное число n в двоичной системе счисления:

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} n_i 2^i,$$

где $n_i \in \{0,1\}$ и определим множества

$$\mathbb{N}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{\infty} n_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0.$$

Изучение множеств $\mathbb{N}_i$ было начато А.О. Гельфондом в статье [2], в которой была показана равномерность распределения чисел из данных множеств по арифметическим прогрессиям. Дальнейшие многочисленные теоретико-числовые результаты о множествах $\mathbb{N}_i$ были получены К.М. Эминяном [13], [14], [15], А.А. Карацуба [8], [9], А.П. Науменко [10], [11] и рядом других авторов.

Теперь рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи $\{F_i\}$:$F_0 = F_1 = 1$,$F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ и напомним, что любое натуральное число n имеет представление Цеккендорфа [6]

$$n = \sum_{i=1}^{lf(n)} f_i F_i,$$

где $f_i \in \{0,1\}$, $f_i f_{i+1} = 0$, $lf(n) = \min\{k : F_{k+1} > n\}$. Очевидно, что $lf(n) = O(\log n)$. Будем кратко записывать разложение n в систему счисления Фибоначчи как $n = (f_{lf(n)} f_{lf(n)-1} \ldots f_1)_F$.

Определим множества

$$\mathbb{F}_0 = \{n : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{lf(n)} f_i \equiv 0 \pmod 2\},$$

$$\mathbb{F}_1 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}_0,$$

то есть множества натуральных чисел с четной и нечетной суммой цифр представления в системе счисления Фибоначчи. Результаты, аналогичные результатам Гельфонда для системы счисления Фибоначчи, были получены в работе [3].

Положим

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n \in \mathbb{F}_0, \\ -1, & n \in \mathbb{F}_1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\varepsilon(n) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{lf(n)} f_i}.$$

Рассмотрим множество

$$N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \sharp\{n < X \,:\, \varepsilon(n) = \varepsilon_1,\, \varepsilon(n+1) = \varepsilon_2\},$$

где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1.

В работе [5] найдена следующая асимптотическая формула для $N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$.

Теорема 1. *Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то*

$$N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{\sqrt{5}}{10} X + O(\log X).$$

Если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, то

$$N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{5-\sqrt{5}}{10} X + O(\log X).$$

Доказательство данной теоремы основывалось на представлении $N_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ в виде двух сумм $\sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)$ и $S_1(X) = \sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+1)$. В свою очередь асимптотическая формула для $S_1(X)$ получена с помощью сведения ее к сумме $S_1^*(k) = S_1(F_k)$ и нахождению явного рекуррентного соотношения для сумм $S_1^*(k)$.

Еще одно доказательство этой теоремы было получено в [12]. Это доказательство основывается на доказанной в [7] теореме о геометризации системы счисления Фибоначчи.

В случае двоичной системы счисления асимптотика аналогичной суммы была найдена в [4] и, независимо, в [15].

Положим
$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \sharp\{n < X \,:\, \varepsilon(n) = \varepsilon_1,\, \varepsilon(n+l) = \varepsilon_2\},$$
где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1, l – фиксированное натуральное число. $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ можно также проинтерпретировать как число решений уравнения
$$n - m = l$$
в натуральных числах с условиями
$$n \le X, \varepsilon(n) = \varepsilon_2, \varepsilon(m) = \varepsilon_1.$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2. *Существует постоянная $C_l \neq 0$ такая, что справедлива асимптотическая формула*
$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{1+\varepsilon_1\varepsilon_2 C_l}{4} X + O(\log X).$$

Получение данной асимптотической формулы состоит из следующих шагов:

1. Сведение $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ к суммам вида $\sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)$ и $S(X) = \sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l)$.

2. Использование оценки для $\sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)$, полученной ранее в работах [1] и [5].

3. Нахождение оценки $S(X)$ начнем с получения рекуррентного соотношения для $S^*(k) = S(F_k)$, которое имеет вид $S^*(k+1) = S^*(k) + S^*(k-1) + \chi_{4,l}(k)$, где $\chi_{4,l}(k)$ – периодическая функция с периодом, равным 4.

4. Последнее уравнение является неоднородным, поэтому его общее решение находим как сумму общего решения однородного $\overline{S^*}(k)$ и частного решения неоднородного $\widetilde{S^*}(k)$, причем $\widetilde{S^*}(k)$ – это периодическая функция с периодом 4.

5. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид $\overline{S^*}(k) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$.

6. Затем доказываем, что $C_1 \neq 0$ и записываем оценку для $S^*(k)$ как $C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + O(1)$.

7. Представляя $X = \sum_{j=1}^t F_{k_j}$, где $k_i \geqslant k_{i+1} + 2$, а $S(X)$ как сумму значений $S^*(k_j) + O(t)$, находим асимптотическую формулу для $S(X) = \frac{5-\sqrt{5}}{2} C_1 X + O(\log X)$, и получаем утверждение теоремы.

При $l \le 10$ значения C_l вычислены нами в явном виде.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Имеет место оценка*
$$\sum_{n<X} \varepsilon(n) = O(\log X).$$

Доказательство данного утверждения можно найти в [1], [5].

Лемма 2. *Пусть натуральное m таково, что $m < F_i$, тогда справедливо соотношение*
$$\varepsilon(F_i + m) = \begin{cases} -\varepsilon(m) & \text{при} \quad m < F_{i-1}, \\ \varepsilon(m) & \text{при} \quad F_{i-1} \leqslant m < F_i. \end{cases}$$

Доказательство. Если $m < F_{i-1}$, то $F_i + m < F_{i+1}$ и разложение числа $F_i + m$ в систему счисления Фибоначчи имеет вид $(10f_{i-2}f_{i-3}...f_1)_F$, а числа $F_i = (1\underbrace{00...0}_{i-1})_F$. Представим m как $(F_i + m) - F_i$ и получим, что $\varepsilon(F_i + m) = -\varepsilon(m)$.

Если $F_{i-1} \leqslant m < F_i$, то $m = (10f_{i-3}f_{i-4}...f_1)_F$, $F_i = (1\underbrace{00...0}_{i-1})_F$. В таком случае разложение в систему счисления Фибоначчи числа $F_i + m$ имеет вид $(100f_{i-3}f_{i-4}...f_1)_F$, а зачит $\varepsilon(F_i + m) = \varepsilon(m)$.

Таким образом, утверждение леммы 2 полностью доказано.

Лемма 3. *При любом натуральном $i \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$F_i + F_{i-2} + F_{i-4} + \ldots = F_{i+1} - 1.$$

Доказательство. Проверим справедливость утверждения при $i = 1$ и $i = 2$.

При $i = 1$ получаем верное равенство $F_1 = F_2 - 1$, т.е. $1 = 2 - 1$.

При $i = 2$ имеем $F_2 = F_3 - 1$, т.е. $2 = 3 - 1$, что также верно.

В предположении, что равенство справедливо при $i = j$, т.е. $F_j + F_{j-2} + F_{j-4} + \ldots = F_{j+1} - 1$, убедимся в его справедливости при $i = j + 2$:

$$F_{j+2} + F_j + F_{j-2} + F_{j-4} + \ldots = F_{j+2} + F_{j+1} - 1 = F_{j+3} - 1,$$

так как $F_{j+3} = F_{j+2} + F_{j+1}$.

Следовательно, равенство справедливо при всех $i \geqslant 1$.

Лемма 4. *Предположим, что $k_{i-1} - 2 \geqslant k_i$, где $i = 2, 3, \ldots, j$ и $m < F_{k_j - 1}$, тогда справедливо равенство*

$$\varepsilon\left(m + \sum_{i=1}^{j} F_{k_i}\right) = (-1)^j \varepsilon(m).$$

Доказательство.

По условию $k_{i-1} - 2 \geqslant k_i$, где $i = 2, 3, \ldots, j$, значит

$$\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{j} F_{k_i}\right) = (-1)^j.$$

Представим $\sum\limits_{i=1}^{j} F_{k_i}$ в системе счисления Фибоначчи как $(f_r f_{r-1} \ldots f_1 \underbrace{00...0}_{k_j - 1})_F$, где $f_1 = 1$.

В свою очередь известно, что $m < F_{k_j - 1}$, поэтому разложение m в систему счисления Фибоначчи имеет вид $(m_s m_{s-1} \ldots m_1)_F$, где $s \leqslant k_j - 2$, и, соответственно,

$$m + \sum_{i=1}^{j} F_{k_i} = (f_r f_{r-1} \ldots f_1 \underbrace{00...0}_{k_j - s - 1} m_s m_{s-1} \ldots m_1)_F,$$

где $k_j - s - 1 \geqslant 1$, а среди чисел $f_1, f_2, \ldots, f_r$ имеется ровно j единиц и $r - j$ нулей.

Из последнего представления следует утверждение леммы 4.

Лемма 5. *Пусть $l \in \mathbb{N}$, тогда если $n \geqslant lf(l) + 1$ и l фиксированное, то функция $\varepsilon(F_n - l)$ является периодической по n с периодом 4.*

Доказательство. Найдем сумму четырех последовательных значений $\varepsilon(F_n - l)$:

$$\sum_{i=n}^{n+3}\varepsilon(F_i - l) = \varepsilon(F_n - l) + \varepsilon(F_{n+1} - l) + \varepsilon(F_{n+2} - l) + \varepsilon(F_{n+3} - l) =$$

$$= \varepsilon(F_n - l) + \varepsilon(F_{n+1} - l) + \varepsilon(F_{n+1} + (F_n - l)) + \varepsilon(F_{n+2} + (F_{n+1} - l)).$$

Если $n \geqslant lf(l) + 1$, то очевидно, что $F_n - l < F_{n+1}$, $F_{n+1} - l < F_{n+2}$, следовательно, можно воспользоваться леммой 2. Получаем

$$\sum_{i=n}^{n+3}\varepsilon(F_i - l) = \varepsilon(F_n - l) + \varepsilon(F_{n+1} - l) - \varepsilon(F_n - l) - \varepsilon(F_{n+1} - l) = 0.$$

Заменяя в полученном равенстве n на $n+1$, получаем $\sum\limits_{i=n+1}^{n+4}\varepsilon(F_i - l) = 0$. Вычитая данное раенство из предыдущего, получаем, что

$$\varepsilon(F_{n+4} - l) = \varepsilon(F_n - l).$$

Это означает, что функция $\varepsilon(F_n - l)$ является периодической по n с периодом 4. Таким образом утверждение леммы 5 доказано.

3. Доказательство основной теоремы

Обозначим

$$S(X) = \sum_{n<X}\varepsilon(n)\varepsilon(n+l), \qquad S^*(k) = S(F_k).$$

Лемма 6. *Пусть $l \in \mathbb{N}$, тогда для любого $k \geqslant lf(l) + 4$ справедливо рекуррентное соотношение*

$$S^*(k+1) = S^*(k) + S^*(k-1) + \chi_{4,l}(k), \tag{1}$$

где $\chi_{4,l}(k)$ периодическая функция с периодом 4.

Доказательство. Представим $S^*(k+1)$ в виде суммы нескольких слагаемых:

$$S^*(k+1) = S(F_{k+1}) = \sum_{n<F_{k+1}}\varepsilon(n)\varepsilon(n+l) = \sum_{n<F_k}\varepsilon(n)\varepsilon(n+l) + \sum_{n=F_k}^{F_{k+1}-1}\varepsilon(n)\varepsilon(n+l) =$$

$$= S(F_k) + \sum_{n=F_k}^{F_k+F_{k-1}-1}\varepsilon(n)\varepsilon(n+l) = S(F_k) + \sum_{n'=0}^{F_{k-1}-1}\varepsilon(n'+F_k)\varepsilon(n'+F_k+l).$$

Рассмотрим отдельно сомножители, входящие в последнюю сумму. В силу леммы 2 при всех $0 \leqslant n' < F_{k-1}$ получаем, что $\varepsilon(n'+F_k) = -\varepsilon(n')$.

Если $0 \leqslant n' < F_{k-1} - l$, то $l \leqslant n' + l < F_{k-1}$, и в соответствии с леммой 2 можно утверждать, что $\varepsilon(n'+F_k+l) = -\varepsilon(n'+l)$. Если же $F_{k-1} - l \leqslant n' < F_{k-1}$, то $F_{k-1} \leqslant n' + l < F_{k-1} + l < F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$, то согласно лемме 2 $\varepsilon(n'+F_k+l) = \varepsilon(n'+l)$. Значит

$$\varepsilon(n'+F_k)\varepsilon(n'+F_k+l) = \begin{cases} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) & \text{при} \quad 0 \leqslant n' < F_{k-1} - l, \\ -\varepsilon(n')\varepsilon(n'+l), & \text{при} \quad F_{k-1} - l \leqslant n' < F_{k-1}. \end{cases}$$

В таком случае

$$S^*(k+1) = S^*(k) + \sum_{n'<F_{k-1}-l} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) - \sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) =$$

$$= S^*(k) + \sum_{n'<F_{k-1}} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) - 2\sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) =$$

$$= S^*(k) + S^*(k-1) - 2\sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l).$$

Последнюю сумму, содержащую l слагаемых, обозначим $\chi'_{4,l}(k)$ и распишем как

$$\chi'_{4,l}(k) = \sum_{n'=F_{k-1}-l}^{F_{k-1}-1} \varepsilon(n')\varepsilon(n'+l) = \varepsilon(F_{k-1}-l)\varepsilon(F_{k-1}) + \varepsilon(F_{k-1}-l+1)\varepsilon(F_{k-1}+1) +$$

$$+ \varepsilon(F_{k-1}-l+2)\varepsilon(F_{k-1}+2) + \ldots + \varepsilon(F_{k-1}-1)\varepsilon(F_{k-1}-1+l).$$

Согласно определению $\varepsilon(F_{k-1}) = -1$, а из условия $k \geqslant lf(l)+4$ можно заключить, что $k-1 \geqslant lf(l)+3$ и $F_{k-1} > l-m$, где $1 \leqslant m \leqslant l-1$. Таким образом условия леммы 2 выполнены и

$$\chi'_{4,l}(k) = -\varepsilon(F_{k-1}-l) - \varepsilon(F_{k-1}-l+1)\varepsilon(1) - \varepsilon(F_{k-1}-l+2)\varepsilon(2) - \ldots - \varepsilon(F_{k-1}-1)\varepsilon(l-1).$$

Ранее было доказано (лемма 5), что при фиксированном l функция $\varepsilon(F_k - l)$ является периодической с периодом 4, следовательно, функция $\chi'_{4,l}(k)$ также будет периодической с периодом 4.

При $k \geqslant lf(l)+4$ положим $\chi_{4,l}(k) = -2\chi'_{4,l}(k)$, т.е.

$$\chi_{4,l}(k) = 2\sum_{m=0}^{l-1} \varepsilon(F_{k-1}-l+m)\varepsilon(m), \tag{2}$$

получаем утверждение леммы 6. Продолжим определение функции $\chi_{4,l}(k)$ на все k по периодичности.

Лемма 7. *Пусть $l \in \mathbb{N}$, тогда для любого $k \geqslant lf(l)+4$ значение функции $S^*(k)$ находится по формуле:*

$$S^*(k) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \widehat{\chi}_{4,l}(k),$$

где $\widehat{\chi}_{4,l}(k)$ – периодическая функция с периодом 4, такая что

$$\widehat{\chi}_{4,l}(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}\left(-3\chi_{4,l}(0) - \chi_{4,l}(1) - 2\chi_{4,l}(2) + \chi_{4,l}(3)\right) & \textit{при} \quad k \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{1}{5}\left(\chi_{4,l}(0) - 3\chi_{4,l}(1) - \chi_{4,l}(2) - 2\chi_{4,l}(3)\right) & \textit{при} \quad k \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{1}{5}\left(-2\chi_{4,l}(0) + \chi_{4,l}(1) - 3\chi_{4,l}(2) - \chi_{4,l}(3)\right) & \textit{при} \quad k \equiv 2 \pmod 4, \\ \frac{1}{5}\left(-\chi_{4,l}(0) - 2\chi_{4,l}(1) + \chi_{4,l}(2) - 3\chi_{4,l}(3)\right) & \textit{при} \quad k \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Уравнение (1) является линейным неоднородным, поэтому его решение – это сумма общего решения линейного однородного уравнения

$$S^*(k+1) = S^*(k) + S^*(k-1) \tag{4}$$

и частного решения неоднородного уравнения (1).

Составим характеристического уравнение для (4) и решим его:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4) будет иметь вид:

$$\overline{S^*}(k) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Частное решение неоднородного уравнения (1) будем искать в виде:

$$\widehat{\chi}_{4,l}(k) = \begin{cases} k_0 & \text{при} \quad k \equiv 0 \pmod 4, \\ k_1 & \text{при} \quad k \equiv 1 \pmod 4, \\ k_2 & \text{при} \quad k \equiv 2 \pmod 4, \\ k_3 & \text{при} \quad k \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

При $k \equiv 0 \pmod 4$ уравнение (1) принимает вид $k_1 = k_0 + k_3 + \chi_{4,l}(0)$. Если $k \equiv 1 \pmod 4$, то получим уравнение $k_2 = k_1 + k_0 + \chi_{4,l}(1)$. В случае $k \equiv 2 \pmod 4$ приходим к уравнению $k_3 = k_2 + k_1 + \chi_{4,l}(2)$. Если же $k \equiv 3 \pmod 4$, то получаем уравнение $k_0 = k_3 + k_2 + \chi_{4,l}(3)$.

Составим систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + k_3 + \chi_{4,l}(0), \\ k_2 = k_1 + k_0 + \chi_{4,l}(1), \\ k_3 = k_2 + k_1 + \chi_{4,l}(2), \\ k_0 = k_3 + k_2 + \chi_{4,l}(3). \end{cases}$$

Последняя система имеет ненулевое решение, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Находим это решение и получаем, что частное решение уравнения (1) будет следующим:

$$\widehat{\chi}_{4,l}(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}\left(-3\chi_{4,l}(0) - \chi_{4,l}(1) - 2\chi_{4,l}(2) + \chi_{4,l}(3)\right) & \text{при} \quad k \equiv 0 \pmod 4, \\ \frac{1}{5}\left(\chi_{4,l}(0) - 3\chi_{4,l}(1) - \chi_{4,l}(2) - 2\chi_{4,l}(3)\right) & \text{при} \quad k \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{1}{5}\left(-2\chi_{4,l}(0) + \chi_{4,l}(1) - 3\chi_{4,l}(2) - \chi_{4,l}(3)\right) & \text{при} \quad k \equiv 2 \pmod 4, \\ \frac{1}{5}\left(-\chi_{4,l}(0) - 2\chi_{4,l}(1) + \chi_{4,l}(2) - 3\chi_{4,l}(3)\right) & \text{при} \quad k \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Таким образом, нами действительно найдено частное решение неоднородного уравнения. Складывая общее решение однородного и частное решение неоднородного, получаем утверждение леммы 7.

Лемма 8. *Для любого натурального l справедлива асимптотическая формула:*

$$S^*(k) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + O(1),$$

где C_1 – отличная от нуля постоянная, зависящая от l.

Доказательство. Вначале убедимся, что $C_1 \neq 0$. Предположим противное: $C_1 = 0$, тогда в силу утверждения леммы 7 $S^*(k) = C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \widehat{\chi}_{4,l}(k)$. Согласно определению $S^*(k)$ является целым, а $\widehat{\chi}_{4,l}(k)$ рациональным числом, значит $C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$ также должно быть рациональным числом при любом k.

Пусть при $k = 1$ выражение $C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$ будет равно a_1, а при $k = 2$ — a_2, где a_1 и a_2 – целые числа. Отношение a_2 к a_1 при $a_1 \neq 0$ равно $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, которое не является рациональным числом, значит не существует $C_2 \neq 0$, такое что $C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \in \mathbb{Q}$ при любом k. Если же предположить, что $a_1 = 0$, то в силу иррациональности $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ получаем, что $C_2 = 0$ и $S^*(k)$ – периодическая функция с периодом 4.

Убедимся, что $S^*(k)$ не является периодической функцией с периодом 4. Согласно определению $S^*(k) = S(F_k)$. С другой стороны

$$S(m) = \sum_{n<m} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l),$$

следовательно, если $m \in \mathbb{N}$, то $S(m)$ – это сумма m слагаемых, каждое из которых равно либо -1, либо 1 (нечетное число). Очевидно, если сложить m нечетных чисел, то получится нечетное число при m нечетном, и четное число при m четном.

Значит, $S(m) \equiv m \pmod 2$, если $m \in \mathbb{N}$. В таком случае $S^*(k) \equiv F_k \pmod 2$.

Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 2, \quad F_3 = 3, \quad F_4 = 5, \quad F_5 = 8, \quad F_6 = 13, \quad F_7 = 21, \ldots$$

Заметим, что

$$F_k \equiv \begin{cases} 0 \pmod 2, & \text{если} \quad k = 3m+2, \\ 1 \pmod 2, & \text{если} \quad k \neq 3m+2, \end{cases}$$

поэтому

$$S^*(k) \equiv \begin{cases} 0 \pmod 2, & \text{если} \quad k = 3m+2, \\ 1 \pmod 2, & \text{если} \quad k \neq 3m+2, \end{cases}$$

т.е. $S^*(k)$ будет четным числом при $k = 3m+2$, и нечетным при $k \neq 3m+2$.

В таком случае получаем, что $S^*(3m+1)$ – нечетное число, а $S^*(3m+5) = S^*(3(m+1)+2)$ – четное число, т.е. существуют такие k, что $S^*(k) \neq S^*(k+4)$. Значит $S^*(k)$ не является периодической функцией с периодом 4, а, следовательно, постоянная C_1 отлична от нуля.

Очевидно, что при всех натуральных k $\widehat{\chi}_{4,l}(k) = O(1)$ и справедливо неравенство $\left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right| < 1$, поэтому $C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k = O(1)$.

Таким образом, лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть $X = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_t}$, где $k_i \geqslant k_{i+1} + 2$, $X > 2l$, $l \in \mathbb{N}$ – фиксированное число, тогда справедливо неравенство:*

$$\left|S(X) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j)\right| \leqslant 2(t+1)l.$$

Доказательство. Введем множества A_j, определив их следующим образом:

$$A_1 = \{n : 0 \leqslant n < F_{k_1}\},$$

$$A_j = \left\{ n : \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i} \leqslant n < \sum_{i=1}^{j} F_{k_i} \right\}, \qquad \text{где} \qquad 2 \leqslant j \leqslant t.$$

В таком случае

$$S(X) = \sum_{j=1}^{t} \sum_{n \in A_j} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l).$$

Возможны два случая: 1) $l < F_{k_t}$; 2) $F_{k_t} \leqslant l < F_{k_1}$. Случай $l \geqslant F_{k_1}$ невозможен. Дейстительно, из условий $X = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_t}$ и $X > 2l$ при $l \geqslant F_{k_1}$ следует, что $F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_t} \geqslant 2F_{k_1}$ или $F_{k_2} + \ldots + F_{k_t} \geqslant F_{k_1}$, что противоречит тому, что F_{k_i} – числа Фибоначчи, удовлетворяющие условию $k_i \geqslant k_{i+1} + 2$.

В случае, когда $l < F_{k_t}$, каждую из сумм $\sum\limits_{n \in A_j} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l)$ представим как

$$\sum_{n \in A_j} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) = \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \in A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) + \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l).$$

В первой из записанных сумм представим n как $n' + \sum\limits_{i=1}^{j-1} F_{k_i}$, тогда условие $n \in A_j$ можно записать в виде двойного неравенства:

$$\sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i} \leqslant n' + \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i} < \sum_{i=1}^{j} F_{k_i}$$

или $0 \leqslant n' < F_{k_j}$, а условие $n+l \in A_j$, соответственно, $0 \leqslant n'+l < F_{k_j}$, а значит $0 \leqslant n' < F_{k_j} - l$.

В данном случае

$$\sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \in A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) = \sum_{n'=0}^{F_{k_j}-l-1} \varepsilon\left(n' + \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i}\right) \varepsilon\left(n' + l + \sum_{i=1}^{j-1} F_{k_i}\right).$$

Каждый из сомножителей слагаемых последней суммы удовлетворяет условиям леммы 4, поэтому

$$\sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \in A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) = \sum_{n'=0}^{F_{k_j}-l-1} \varepsilon\left(n'\right) \varepsilon\left(n'+l\right).$$

Значит можно утверждать, что

$$\sum_{n \in A_j} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) = \sum_{n' < F_{k_j} - l} \varepsilon\left(n'\right) \varepsilon\left(n'+l\right) + \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) =$$

$$= \sum_{n' < F_{k_j}} \varepsilon\left(n'\right) \varepsilon\left(n'+l\right) - \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon\left(n'\right) \varepsilon\left(n'+l\right) + \sum_{\substack{n \in A_j, \\ n+l \notin A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l)$$

$$= S^*(k_j) - \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon\left(n'\right)\varepsilon\left(n'+l\right) + \sum_{\substack{n\in A_j,\\ n+l\notin A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l).$$

Получаем, что

$$\left|S(X) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{t} S^*(k_j) - \sum_{j=1}^{t}\sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon\left(n'\right)\varepsilon\left(n'+l\right) + \sum_{j=1}^{t}\sum_{\substack{n\in A_j,\\ n+l\notin A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{t}\sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \left|\varepsilon\left(n'\right)\varepsilon\left(n'+l\right)\right| + \sum_{j=1}^{t}\sum_{\substack{n\in A_j,\\ n+l\notin A_j}} |\varepsilon(n)\varepsilon(n+l)| = \sum_{j=1}^{t} S_1(j) + \sum_{j=1}^{t} S_2(j).$$

Проведем оценку $S_1(j)$ и $S_2(j)$:

$$S_1(j) = \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \left|\varepsilon\left(n'\right)\varepsilon\left(n'+l\right)\right| \leqslant \sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} 1 = l,$$

$$S_2(j) \leqslant \sum_{\substack{n\in A_j,\\ n+l\notin A_j}} |\varepsilon(n)\varepsilon(n+l)| \leqslant \sum_{\substack{n\in A_j,\\ n+l\notin A_j}} 1 = l.$$

Таким образом, при $l < F_{k_t}$

$$\left|S(X) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j)\right| \leqslant 2\sum_{j=1}^{t} l = 2lt.$$

Во втором случае, при $F_{k_j} \leqslant l < F_{k_1}$ справедливо неравенство

$$F_{k_t} < F_{k_{t-1}} < \ldots < F_{k_{r+1}} \leqslant l < F_{k_r} < \ldots < F_{k_1}.$$

Представим $S(X)$ следующим образом:

$$S(X) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{n\in A_j} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) + \sum_{j=r+1}^{t}\sum_{n\in A_j} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l).$$

Для первой из записанных сумм справедливы все рассуждения, приведенные для первого случая, поэтому

$$\left|S(X) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{r} S^*(k_j) - \sum_{j=1}^{r}\sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1} \varepsilon\left(n'\right)\varepsilon\left(n'+l\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{n\in A_j,\\ n+l\notin A_j}} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) + \sum_{j=r+1}^{t}\sum_{n\in A_j} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{r}\sum_{n'=F_{k_j}-l}^{F_{k_j}-1}\left|\varepsilon\left(n'\right)\varepsilon\left(n'+l\right)\right| + \sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{n\in A_j,\\ n+l\notin A_j}}|\varepsilon(n)\varepsilon(n+l)| + \sum_{j=r+1}^{t}\sum_{n\in A_j}|\varepsilon(n)\varepsilon(n+l)| +$$

$$+\left|\sum_{j=r+1}^{t} S^*(k_j)\right| = \sum_{j=1}^{r} S_1(j) + \sum_{j=1}^{r} S_2(j) + S_3 + S_4.$$

Найдем оценку сверху для S_3 и S_4, учитывая утвеждение леммы 3:

$$S_3 = \sum_{j=r+1}^{t}\sum_{n\in A_j}|\varepsilon(n)\varepsilon(n+l)| \leqslant \sum_{j=r+1}^{t}\sum_{n\in A_j} 1 = \sum_{j=r+1}^{t} F_{k_j} \leqslant$$

$$\leqslant F_{k_{r+1}} + F_{k_{r+1}-2} + F_{k_{r+1}-4} + \ldots = F_{k_{r+1}} + F_{k_{r+1}-1} < 2F_{k_{r+1}} < 2l,$$

$$S_4 = \left|\sum_{j=r+1}^{t} S^*(k_j)\right| \leqslant \sum_{j=r+1}^{t}\left|S(F_{k_j})\right| = \sum_{j=r+1}^{t}\sum_{n<F_{k_j}}|\varepsilon(n)\varepsilon(n+l)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=r+1}^{t}\sum_{n<F_{k_j}} 1 = \sum_{j=r+1}^{t} F_{k_j} < 2l.$$

Итак, во втором случае, когда $F_{k_t} \leqslant l < F_{k_1}$, получаем, что

$$\left|S(X) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j)\right| < 2\sum_{j=1}^{r} l + 4l = 2(r+2)l \leqslant 2(t+1)l,$$

так как $r < t$.

Утверждение леммы 9 полностью доказано.

Лемма 10. *Для любого натурального l справедлива асимптотическая формула*

$$S(X) = C_l X + O(\log X),$$

где C_l – отличная от нуля константа, вычисляемая по формуле

$$C_l = \frac{5-\sqrt{5}}{2} C_1$$

и C_1 – постоянная из леммы 8.

Доказательство. Методом математической индукции можно убедиться в том, что при условии, что $F_0 = F_1 = 1$ для чисел Фибоначчи справедлива явная формула

$$F_i = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i.$$

Отметим, что данная формула отличается от классической формулы Бине, в которой предполагается нумерация $F_1 = F_2 = 1$.

Учитывая, что $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \leqslant 1$ можем записать, что

$$F_{k_j} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k_j} + O(1).$$

Воспользуемся утверждением леммы 8 и получим, что

$$S^*(k_j) = \frac{5-\sqrt{5}}{2} C_1 F_{k_j} + O(1),$$

а

$$S(X) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j) = S(X) - \sum_{j=1}^{t} \left(\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2} C_1 F_{k_j} + O(1) \right) =$$

$$= S(X) - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2} C_1 \sum_{j=1}^{t} F_{k_j} + O(t) = S(X) - \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2} C_1 X + O(\log X),$$

т.к. $\sum\limits_{j=1}^{t} F_{k_j} = X$, следовательно, $F_{k_t} < X$ и $t = O(\log X)$.

В таком случае, из леммы 9 при фиксированном l получаем

$$\left| S(X) - \sum_{j=1}^{t} S^*(k_j) \right| \leqslant C_3 \log X,$$

где C_3 – постоянная, зависящая от l.

Из последнего неравенства следует утверждение леммы 10. Кроме того, из леммы 8 вытекает, что $C_l \neq 0$.

Доказательство теоремы 2.

Согласно определению

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \sharp\{n < X \,:\, \varepsilon(n) = \varepsilon_1,\, \varepsilon(n+l) = \varepsilon_2\},$$

где ε_1 и ε_2 могут принимать значения, равные -1 или 1, l – фиксированное натуральное число.

Поэтому для $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ справедлива явная формула

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \sum_{n<X} \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon(n) + 1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon(n+l) + 1}{2}.$$

Преобразуем данную формулу, используя утверждение леммы 1, к виду

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} \sum_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) + \frac{\varepsilon_1}{4} \sum_{n<X} \varepsilon(n) + \frac{\varepsilon_2}{4} \sum_{n<X} \varepsilon(n+l) + \frac{1}{4} \sum_{n<X} 1 =$$

$$= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} \sum_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l) + \frac{X}{4} + O(\log X).$$

Пусть

$$S(X) = \sum_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l),$$

тогда воспользуемся утверждением леммы 10 и получим, что

$$N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} C_l X + \frac{X}{4} + O(\log X),$$

где

$$C_l = \frac{5-\sqrt{5}}{2} C_1. \tag{5}$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

Найдем асимптотическую формулу в явном виде для $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ при $l \leqslant 10$.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$C_l = \frac{-5+2\sqrt{5}}{5} \qquad \textit{при} \qquad l = 1,2,3,5,6,8;$$

$$C_l = 9-4\sqrt{5} \qquad \textit{при} \qquad l = 4;$$

$$C_l = \frac{-35+16\sqrt{5}}{5} \qquad \textit{при} \qquad l = 7;$$

$$C_l = \frac{-85+38\sqrt{5}}{5} \qquad \textit{при} \qquad l = 9;$$

$$C_l = \frac{125-56\sqrt{5}}{5} \qquad \textit{при} \qquad l = 10.$$

Доказательство. Для нахождения постоянной C_l необходимо вначале найти C_1. Заметим, что из леммы 7 следует, что

$$S^*(k) - \widehat{\chi}_{4,l}(k) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k,$$

где $k \geqslant lf(l)+4$.

Обозначим $S^*(k) - \widehat{\chi}_{4,l}(k)$ через $T(k)$, тогда при всех $k \geqslant lf(l)+4$ согласно предыдущему равенству

$$T(k) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Следовательно, для того, чтобы найти C_1 надо знать два значения $T(k)$ для конкретного l.

Для заданного l вычисляем по определению $S^*(k) = \sum\limits_{n<F_k} \varepsilon(n)\varepsilon(n+l)$, $\chi_{4,l}(k)$ по формуле (2) и $\widehat{\chi}_{4,l}(k)$ по формуле (3), а затем $T(k) = S^*(k) - \widehat{\chi}_{4,l}(k)$.

Значения $S^*(k)$, $\chi_{4,l}(k)$, $\widehat{\chi}_{4,l}(k)$ и $T(k)$ для трех $k \geqslant lf(l)+4$ при $l = 1,2,\ldots,10$ приведем в таблице

Теперь рассмотрим различные случаи значений l.

В случае $l = 1$ составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 &= -0,8, \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6 &= -1,4. \end{cases}$$

Решением этой системы являются

$$\begin{cases} C_1 &= \frac{-3+\sqrt{5}}{10}, \\ C_2 &= \frac{-3-\sqrt{5}}{10}. \end{cases}$$

Таким образом формула для нахождения $T(k)$ при $l = 1$ имеет вид:

$$T(k) = \frac{-3+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{-3-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \qquad \text{где} \qquad k \geqslant 5.$$

Проделывая эти же шаги при $l = 2,3,\ldots,10$, получаем следующие формулы для нахождения $T(k)$:

k	$S^*(k)$	$\chi_{4,l}(k)$	$\widehat{\chi}_{4,l}(k)$	$T(k)$
		$l=1$		
5	-2	2	-1,2	-0,8
6	-1	2	0,4	-1,4
7	-1	-2	1,2	-2,2
		$l=2$		
6	-3	0	-1,6	-1,4
7	-3	4	-0,8	-2,2
8	-2	0	1,6	-3,6
		$l=3$		
7	-5	2	-2,8	-2,2
8	-4	6	-0,4	-3,6
9	-3	-2	2,8	-5,8
		$l=4$		
7	1	0	0	1
8	2	0	0	2
9	3	0	0	3
		$l=5$		
8	-8	2	-4,4	-3,6
9	-7	10	-1,2	-5,8
10	-5	-2	4,4	-9,4
		$l=6$		
8	-2	0	-0,8	-3,6
9	-5	-4	1,6	-5,8
10	-11	0	0,8	-9,4
		$l=7$		
8	4	2	-1,2	5,2
9	9	2	0,4	8,6
10	15	-2	1,2	13,8
		$l=8$		
9	-13	4	-7,2	-5,8
10	-11	16	-1,6	-9,4
11	-8	-4	7,2	-15,2
		$l=9$		
9	1	-2	1,2	-0,2
10	-1	-2	-0,4	-0,6
11	-2	2	-1,2	-0,8
		$l=10$		
9	-1	0	1,6	-2,6
10	-3	-4	0,8	-3,8
11	-8	0	-1,6	-6,4

1) при $l = 1, 2, 3, 5, 6, 8$

$$T(k) = \frac{-3+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{-3-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k;$$

2) при $l = 4$

$$T(k) = \frac{25-11\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{25+11\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k;$$

3) при $l = 7$

$$T(k) = \frac{-19+9\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{-19-9\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k;$$

4) при $l = 9$

$$T(k) = \frac{-47+21\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{-47-21\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k;$$

5) при $l = 10$

$$T(k) = \frac{69-31\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{69+31\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

Теперь воспользуемся формулой (5), утверждением теоремы 2 и получим явные асимптотические формулы для $N_{l,\varepsilon_1,\varepsilon_2}(X)$ при конкретных значениях l, равных $1, 2, \ldots 10$.

4. Заключение

В работе продолжено исследование совместного распределения сумм цифр представлений натуральных чисел в систему счисления Фибоначчи. Предложен метод получения асимптотических формул, для количества натуральных чисел $n \le X$ таких, что n и $n+l$ имеют заданную четность суммы цифр разложения. При $l \le 10$ соответствующие асимптотики найдены в явном виде.

В заключение приведем несколько открытых проблем.

1) Как ведет себя постоянная C_l? Можно ли получить оценки для C_l или ее среднего значения? Есть ли значения, встречающиеся среди C_l бесконечно много раз?

Отметим, что в случае двоичной системы счисления некоторые результаты в данном направлении можно найти в [4] и [10]. При этом в отличие от двоичной системы счисления, в случае системы счисления Фибоначчи имеет смысл рассматривать не только нечетные, но и четные k.

2) Что можно сказать о совместном распределении сумм цифр для n и $kn + l$ при $k > 1$?. В частности, что можно сказать о сумме $\sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(kn + l)$?

Отметим, что оценки суммы $\sum\limits_{n<X} \varepsilon(kn + l)$ во многих случаях могут быть получены на основе работы [3].

3) Что можно сказать о совместном распределении сумм цифр для наборов натуральных чисел, включающих более, чем два числа? В простейшем случае, что можно сказать о сумме $\sum\limits_{n<X} \varepsilon(n)\varepsilon(n + 1)\varepsilon(n + 2)$?

4) Что можно сказать о совместном распределении сумм цифр разложений натуральных чисел в систему счисления Фибоначчи по модулям, отличным от двойки?

5) Можно ли получить аналоги рассматриваемых результатов для других систем счисления, в частности для разложений по линейным рекуррентным последовательностям?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drmota M., Gajdosik J. The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations // Fibonacci Quarterly. 1998. Vol. 36, №1. P. 3-19.

2. Gelfond A. O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données // Acta Arithmetica. 1968. Vol. 13. P. 259-265.

3. Lamberger M., Thuswaldner J. W. Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences // Mathematicf Slovaca. 2003. Vol. 53, №1. P. 1-20.

4. Mahler K. The Spectrum of an Array and its Application to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions: Part Two On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions // J. Math. and Physics. 1927. Vol. 6. P. 158-163.

5. Shutov A. On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers // Fibonacci Quarterly. 2020. Vol. 58, №3. P. 203-207.

6. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une soome de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1972. Vol. 41. P. 179-182.

7. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В. Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, Вып. 6. С. 1-23.

8. Карацуба А. А., Новак Б. Арифметические задачи с числами специального вида // Математические заметки. 1999. Т. 66, Вып. 2. С. 314–317.

9. Карацуба А. А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // УМН. 2008. Т. 63, Вып. 4. С. 43-92.

10. Науменко А.П. О распределении чисел с двоичным разложением специального вида в арифметических прогрессиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, Вып. 4. С. 34–37.

11. Науменко А.П. О числе решений некоторых диофантовых уравнений в натуральных числах с заданными свойствами двоичных разложений // Чебышеский сборник. 2011. Т. 12, Вып. 1. С. 140-157.

12. Шутов А.В. Об одной сумме, связанной с системой счисления Фибоначчи // Дальневосточный математический журнал. 2020. Т. 20, №2. С. 271-275.

13. Эминян К.М. Аддитивные задачи в натуральных числах с двоичными разложенниями специального вида // Чебышеский сборник. 2011. Т. 12, Вып. 1. С. 178-185.

14. Эминян К.М. Асимптотический закон распределения простых чисел специального вида // Математические заметки. 2016. Т. 100, Вып. 4. С. 619-622.

15. Эминян К.М. Об одной бинарной задаче // Математические заметки. 1996. Т. 60, Вып. 4. С. 478-481.

REFERENCES

1. Drmota, M. & Gajdosik, J. 1998, "The Parity of the Sum-of-Digits-Function of Generalized Zeckendorf Representations", *Fibonacci Quarterly*, vol. 36, no. 1, pp. 3-19. doi: 10.1007/s002290050221.

2. Gelfond, A. O. 1968, "Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données", *Acta Arithmetica*, vol. 13, pp. 259-265. doi: 10.4064/aa-13-3-259-265.

3. Lamberger, M., Thuswaldner, J. W. 2003, "Distribution properties of digital expansions arising from linear recurrences", *Mathematicf Slovaca*, vol. 53, no. 1, pp. 1-20.

4. Mahler, K. 1927, "The Spectrum of an Array and its Application to the Study of the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions: Part Two On the Translation Properties of a Simple Class of Arithmetical Functions", *J. Math. and Physics*, vol. 6, pp. 158-163. doi: 10.1002/sapm192761158.

5. Shutov, A. 2020, "On sum of digits of the Zeckendorf representations of two consecutive numbers", *Fibonacci Quarterly*, vol. 58, no. 3, pp. 203-207.

6. Zeckendorf, E. 1972, "Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas", *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, vol. 41, pp. 179-182.

7. Davletyarova, E. P., Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2013, "Geometrization of the Fibonacci number system and its applications to number theory", *Algebra and Analysis*, vol. 25, no. 6, pp. 1-23. doi:10.1090/S1061-0022-2014-01321-0.

8. Karatsuba, A. A., Novak, B. 1999, "Arithmetical problems with numbers of special type", *Mathematical Notes*, vol. 66, no. 2, pp. 251–253. doi:10.1007/BF02674886

9. Karatsuba, A. A. 2008, "Arithmetic problems in the theory of Dirichlet characters", *Russian Math. Surveys*, vol. 63, no. 4, pp. 641-690. doi:10.1070/RM2008v063n04ABEH004548

10. Naumenko, A. P. 2008, "On the distribution of numbers with binary decomposition of a special form in arithmetic progressions", *Izv. Sarat. un-that. New ser. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science.*, vol. 8, no. 4, pp. 34-37.

11. Naumenko, A. P. 2011, "On the number of solutions of some Diophantine equations in natural numbers with given properties of binary expansions", *Chebyshskii sbornik*, vol. 12, no. 1, pp. 140-157.

12. Shutov, A. V. 2020, "On one sum associated with Fibonacci numeration system", *Far Eastern Mathematical Journal*, vol. 20, no. 2, pp. 271-275. doi: 10.47910/FEMJ202028

13. Eminyan, K. M. 2011, "Additive problems in natural numbers with binary expansions of a special form", *Chebyshskii sbornik*, vol. 12, no. 1, pp. 178-185.

14. Eminyan, K. M. 2016, "Asymptotic distribution law of primes of a special form", *Mathematical Notes*, vol. 100, no. 4, pp. 619-622. doi:10.1134/S0001434616090339

15. Eminyan, K. M. 1996, "On a Binary Problem", *Mathematical Notes*, vol. 60, no. 4, pp. 478-481. doi:10.1007/FBF02305438

Получено 1.02.22
Принято в печать 22.06.2022