S. M. Guriev, A model of saving and demand for money. I,
Mat. Model., 1994, Volume 6, Number 7, 15–40

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **6** номер **7** год **1994**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

УДК 519.86

МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СБЕРЕЖЕНИЙ И СПРОСА НА ДЕНЬГИ: I

С.М.Гуриев[1]

Вычислительный Центр РАН, Москва

В работе рассматривается модель формирования сбережений и долгосрочного спроса на деньги с учетом ограничений ликвидности. Модель описывает как операционный, так и спекулятивный спрос на деньги и позволяет объяснить, почему на бумажные деньги не выплачиваются проценты. Без предположения о непосредственной полезности денег получено выражение для соотношения между спросом на деньги и ценные бумаги, показывающее, что спрос на деньги может расти при увеличении ставки процента по ценным бумагам и объясняющее этот эффект.

Полученные в рамках модели спрос на деньги и предложение сбережений используются в равновесной модели замкнутой экономики. Доказано, что назначение процента на деньги на уровне ρ процентов в год приводит к увеличению темпа инфляции на те же ρ процентов. Исследуется динамическое равновесие на рынке, где взаимодействуют экономические агенты с разными коэффициентами дисконтирования.

A Model of Saving and Demand for Money: I

S.M.Guriev

A model of household saving and demand for money in the presense of liquidity constraints is considered. The work examines both transactions and speculative demand for money and gives an explanation why there is no interest payments on cash. Without assumption of direct utility of money the ratio between money and savings is obtained. The ratio shows that the demand for money may increase with interest rate increasing.

The demand for money and saving supply functions obtained are then used in a general equilibrium model. It is shown that interest of ρ per cent per annum paid on cash will give rise to an increase of ρ per cent per annum in the inflation rate. The dynamic equilibrium in an economy with heterogeneous households is studied.

Введение

Деньги занимают особое место среди экономических категорий. В рыночной экономике денежные потоки являются единственными систематически наблюдаемыми величинами, и цены товаров и услуг, выраженные в единицах денег, используются всеми экономическими

[1] Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. И.Г.Поспелову за помощь в выполнении работы, чл.-корр. РАН А.А.Петрову и д.ф.-м.н. А.А.Шананину за внимание к работе и полезные замечания

агентами при принятии решений. В то же время деньги - не просто единый соизмеритель ценности всех обмениваемых в экономике товаров, деньги обладают собственной динамикой обращения, для определения которой обычно рассматривают соотношение между спросом и предложением денег на своеобразном "рынке денег". Так как предложение денег в нормальной экономике так или иначе регулируется государством, понятно, какую значительную роль играет формирование спроса на деньги.

Экономическая теория выделяет два основных фактора, определяющих спрос экономических агентов на деньги:

1. *Операционный спрос на деньги* возникает, поскольку деньги служат средством платежа. Операционный спрос на деньги был впервые проанализирован И. Фишером [1].

2. *Спекулятивный спрос на деньги* возникает в связи с изменением курса ценных бумаг. Краткосрочный аспект спекулятивного спроса на деньги был впервые исследован Кейнсом [2]. В долгосрочном плане модель выбора между ликвидными деньгами и доходными, но рискованными ценными бумагами была предложена Тобином [3]. Отметим, что, в отличие от других моделей, в модели Тобина спрос на деньги мог как убывать, так и возрастать с ростом ставки процента на ценные бумаги.

Для того, чтобы применить к проблеме спроса на деньги стандартный аппарат математической экономики, обычно считают ([4]-[6]) деньги еще одним потребляемым экономическими агентами продуктом (пусть и обладающим некоторыми особыми свойствами) и включают его в качестве дополнительного аргумента в функцию полезности потребителей наряду с традиционным аргументом - набором потребительских благ. Такое предположение в значительной степени упрощает модель, однако выглядит несколько туманно, так как трудно наложить конкретные требования на вид, в котором деньги входят в функцию полезности и который имеет решающее значение. Так, например, используя различные функции полезности, С.Фишер [5] и Асаки [6] приходят к противоположным выводам в рамках одной и той же модели.

В данной работе мы будем использовать традиционную функцию полезности, зависящую только от реального потребления. В то же время мы покажем, каким образом деньги, не включенные непосредственно в функцию полезности и не приносящие высокого дохода, как те или иные формы сбережений, представляют все же ценность для их владельцев. (В этом случае говорят, что деньги обладают косвенной полезностью [7]). Мы предполагаем, что для осуществления потребительских расходов pC необходим запас денег $M \geq \tau pC$. Такое предположение (основополагающее в простой количественной теории денег [8,9]) вытекает из рассмотрения краткосрочной модели потребления в случае квантования либо доходов (например, заработная плата, выплачиваемая раз в 2 недели), либо расходов (учет неделимости товаров). В этом случае величина τ является характерным временем поступления платежей или накопления средств на приобретения единицы товара, соответственно (в простой количественной теории денег величина $1/\tau$ называется скоростью обращения денег).

Ограничения вида $pC \leq M/\tau$ называются ограничениями ликвидности [10].[2] Отметим, что в экономической теории до сих пор не существует общепринятого однозначного определения ликвидности:

[2]Данные, приведенные в [11], показывают, что ограничения ликвидности являются существенными для значительной части американских и японских домашних хозяйств.

"ликвидность" так часто использовалась для описания всех свойств денег, что, кажется, лучше не использовать это понятие для какого-то отдельного их свойства ([12]).

Наиболее часто ликвидность определяют как способность актива быть переведенным в наличные деньги за непродолжительное время без неопределенности и существенных потерь его стоимости ([2]). Однако рыночная структура в цивилизованных странах уже настолько развита, что даже для самых низколиквидных активов время реализации можно считать малым при долгосрочном планировании, и первым признаком ликвидности актива становится степень возможности его использования в качестве средства платежа. Вообще говоря, можно обнаружить целый спектр активов с различной степенью ликвидности, но в данной работе мы рассмотрим лишь два актива - наличные деньги, которые принимаются в качестве средства платежа повсеместно, и сбережения, которые нельзя непосредственно использовать в качестве средства платежа.

Под сбережениями мы будем понимать ценные бумаги, которые, будучи купленными за наличные деньги, приносят доход в виде процента. По прошествии установленного срока их действия ценные бумаги погашаются по рыночному курсу. Так как этими свойствами обладают самые разнообразные активы, рассматриваемая модель пригодна для описания вложения денег в акции, облигации, срочные банковские депозиты, материальные ценности, недвижимость и т.д. Формально рассматриваемые ценные бумаги больше всего похожи на акции, тем не менее доход по ним будем все же называть процентом.[3]

Заметим, что хотя наличные деньги также являются ценными бумагами (долговыми обязательствами государства), по наличным деньгам, в отличие от сбережений, не выплачиваются проценты. То, что процент по более ликвидным активам должен быть ниже, чем по менее ликвидным, вытекает из самых общих экономических соображений, но все же неясно, почему он должен быть равен именно нулю. Исследование этого вопроса также является целью данной работы.

Чтобы изучить спрос на деньги, мы рассматриваем модель потребителя, заботящегося не только о сегодняшнем, но и о будущем потреблении. Степень обеспокоенности завтрашним потреблением мы описываем традиционным для математической экономики способом - при помощи так называемого коэффициента дисконтирования. Оказывается, что для функций полезности с постоянным относительным отвращением к риску по Эрроу-Пратту соотношение между сбережениями и наличными деньгами не зависит от величины богатства потребителя, но определяется внешними параметрами (ставка процента, скорость обращения денег и т.д.) и индивидуальными параметрами (отвращение к риску по Эрроу-Пратту и коэффициент дисконтирования). На основании этих параметров экономический агент и определяет рациональное соотношение между доходными и ликвидными активами.

В разделе 1 приведены основные предположения о рассматриваемой экономической среде и сформулирована общая постановка задачи формирования сбережений и спроса на деньги для отдельного потребителя (домашнего хозяйства). При постановке задачи условно предполагается, что ставка процента на наличные деньги отлична от нуля.

В разделе 2 индивидуальная задача формирования сбережений и спроса на деньги полностью решена для одного очень важного частного случая. Приведены также более простые постановки задачи формирования сбережений и спроса на деньги, которые в этом

---

[3]В данной работе практически обойден вниманием вопрос формирования портфеля сбережений с учетом риска и неопределенности. Для решения этого вопроса создано много различных теорий (обзор существующих подходов см. в [13]), но все они базируются на довольно спорных предположениях или требуют такой исходной информации, которую вряд ли возможно получить.

частном случае оказываются эквивалентны задаче, рассмотренной в разделе 1. Обсуждается полученное выражение для спроса на деньги и его зависимость от параметров задачи.

В разделе 3 (вторая часть статьи) модель замыкается - рассматривается совокупность домашних хозяйств с различными коэффициентами дисконтирования, взаимодействующих с другими агентами на товарном рынке, фондовом рынке и рынке наличных денег (изначально предполагается, что ставка процента на наличные деньги может быть отлична от нуля и определяется из условия равновесия спроса и предложения денег). Остальные агенты (промышленность и государство) описаны с минимальной степенью детализации, позволяющей все же получить уравнения баланса спроса и предложения на всех рынках и вычислить ставку процента на акции, индекс потребительских цен, курс акций и гипотетический процент на наличные деньги, ответив таким образом на вопрос, может ли процент на наличные деньги быть отличным от нуля. Кроме того, показано, со временем все большая часть всего капитала системы переходит к бережливым домашним хозяйствам (с малыми коэффициентами дисконтирования). В то же время показано, что сверхбережливые домашние хозяйства (с отрицательными коэффициентами дисконтирования), предпочитающие будущее потребление текущему, рано или поздно вынуждены изменить свою стратегию.

1 Модель формирования сбережений

1.1 Предположения о структуре экономической системы

В качестве основного объекта исследования будем рассматривать домашнее хозяйство - потребителя конечного продукта и сберегателя. Опишем экономическую среду, в которой живет это домашнее хозяйство.

Будем считать, что помимо домашних хозяйств, в экономике действуют производители и государство. Производители поставляют на рынок продукт, часть которого направляется на производственные инвестиции, а остальное потребляется государством и домашними хозяйствами. Чтобы получить средства для инвестиций, производители выпускают ценные бумаги и продают их домашним хозяйствам по рыночному курсу. Прибыль производителей расходуется на выплату процентов по ценным бумагам и на заработную плату. Для оплаты своего потребления государство также выпускает долговые обязательства и платит по ним проценты по ставке, вообще говоря, отличной от нуля. Мы считаем, что государственные долговые обязательства служат всеобщим средством платежа, и отождествляем их с бумажными деньгами.

Цены и ставки процентов определяются из условий баланса спроса и предложения на товарном, фондовом и "денежном" рынках. В разделе 3 (вторая часть статьи) мы опишем предложение товаров, денег и ценных бумаг, а также совокупный спрос на товары, деньги и ценные бумаги, который получается агрегированием спроса отдельных домашних хозяйств. Для определения индивидуального спроса на товары, деньги и ценные бумаги в зависимости от цен и ставок процента мы сформулируем следующую оптимальную задачу.

1.2 Формальная постановка задачи

Рассмотрим домашнее хозяйство - потребителя, обладающего активами двух видов - наличными деньгами M и ценными бумагами D, причем деньги, по определению, более ликвидны, в то время как ценные бумаги приносят более высокий доход. Будем считать, что свои доходы домашнее хозяйство получает исключительно наличными. Предположим, что домашнее хозяйство получает заработную плату (или другой независимый от объема его активов доход) Φ, проценты по деньгам ρM и доходы от ценных бумаг. Величина ρ обозначает гипотетическую ставку процента по бумажным деньгам. Для исследования ее роли в формировании сбережений и спроса на деньги мы будем рассматривать произвольное ρ, а позже, в разделе 3, постараемся выяснить, должна ли ρ равняться нулю и почему.

Доходы от це́нных бумаг складываются из процентов по ценным бумагам rD и выплаты вложенных средств при погашении ценных бумаг $\sigma D/\theta$. Здесь через r обозначена процентная ставка по ценным бумагам (купоны или дивиденды на одну ценную бумагу), через σ - текущий рыночный курс ценных бумаг , через θ - среднее время погашения ценных бумаг (в случае бессрочной акции $\theta = \infty$, то есть $1/\theta = 0$). Впоследствии будет показано, что, в отличие от r и σ, параметр θ не играет важной роли при принятии решений.

Полученные доходы домашнее хозяйство направляет на текущее потребление pC (здесь C - объем совокупного потребления, а p - индекс потребительских цен) и приобретение ценных бумаг Z. Тогда количество денег и ценных бумаг в распоряжении домашнего хозяйства изменяется со временем следующим образом:

$$\dot{M} = \rho M + rD + \sigma D/\theta - pC - Z + \Phi \tag{1.1}$$

$$\dot{D} = Z/\sigma - D/\theta \tag{1.2}$$

Предположим, что перевод денег в ценные бумаги и обратно (т.е. приобретение или продажа ценных бумаг) может быть осуществлен достаточно быстро, но все же не мгновенно

$$-\sigma D/\Delta < Z < M/\Delta, \tag{1.3}$$

где Z - расход денег на приобретение ценных бумаг (или доход от их продажи, в зависимости от знака Z), а Δ - достаточно малая постоянная времени, характеризующая эффективность инфраструктуры фондового рынка.

В дальнейшем нам будет удобнее использовать переменные M и $S = \sigma D$. В этих переменных уравнения (1.1)-(1.2) имеют вид:

$$\dot{M} = \rho M + rS/\sigma + S/\theta - pC - Z + \Phi$$

$$\dot{S} = Z - S/\theta + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}S$$

Естественно также ввести безразмерный параметр $z \in [0,1]$, через который расход денег Z на приобретение акций выражается следующей формулой:

$$Z = zM/\Delta - (1-z)S/\Delta$$

Значение $z = 1$ соответствует скупке акций настолько быстро, насколько это возможно, а $z = 0$ соответствует тому, что агент желает избавиться от акций в предельно короткий срок.

Главное отличие наличных (ликвидных) денег M от низколиквидных активов S заключается в том, что только деньги M могут быть использованы для оплаты покупок потребительских товаров C. В этом смысле понятие денег в данной модели близко к принятому в экономике понятию денежного агрегата M1 ([14]), который включает наличные деньги, бессрочные депозитные счета, кредитные карточки, дорожные чеки и т.д. Будем считать, что поток платежей pC нельзя осуществить, если нет достаточного запаса денег:

$$pC \leq M/\tau, \tag{1.4}$$

Неравенство (1.4) дает возможность ввести безразмерное управление $c \in [0, 1]$:

$$pC = cM/\tau$$

Как принято в математической экономике, интересы домашнего хозяйства будем описывать стремлением максимизировать дисконтированную полезность будущего потребления на достаточно большом интервале времени $(0, T)$. Будем считать, что полезность, получаемая от немедленного потребления, представляется потребителю в $e^{\delta t}$ раз больше, чем полезность от потребления того же объема потребительских продуктов, но через время t. Коэффициент δ называется коэффициентом дисконтирования полезности (pure time preference). Тогда максимизируемый функционал записывается в следующем виде:

$$\omega = \int_0^T e^{-\delta t}\, u(C(t))\, dt \Rightarrow max \tag{1.5}$$

Здесь $u(\cdot)$ - функция полезности потребления, непрерывная, монотонная, вогнутая и ограниченная сверху. Потребуем также, чтобы функция полезности обращалась в $-\infty$ при $C = 0$. Это условие гарантирует положительность текущего потребления в каждый момент времени.

Предположим также, что функция полезности обладает постоянным относительным отвращением к риску по Эрроу-Пратту: $\beta = -u''C/u' = const.$[4]. Легко показать, что все функции полезности с постоянным относительным отвращением к риску (CRRA) записываются в следующем виде:

$$u(C) = \begin{cases} \frac{C^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{при} \quad \beta \neq 1 \\ \ln C & \text{при} \quad \beta = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Мы будем считать, что $\beta > 1$, так как этого необходимо и достаточно для того, чтобы $u'(C)$ обращалась в ∞ при $C = 0$ и была ограничена сверху.

Таким образом, мы получаем задачу оптимального управления в непрерывном времени

$$\omega = \int_0^T e^{-\delta t}\, u\left(\frac{cM}{p\tau}\right) dt \Rightarrow max \tag{1.7}$$

$$\dot{M} = M\left(\rho - \frac{c}{\tau} - \frac{z}{\Delta}\right) + S\left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\theta} + \frac{1-z}{\Delta}\right) + \Phi \tag{1.8}$$

$$\dot{S} = M\frac{z}{\Delta} + S\left(\frac{\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\theta} - \frac{1-z}{\Delta}\right) \tag{1.9}$$

[4] Основная часть полученных ниже результатов имеет место и при $\beta \neq const$

$$M(0) = M_0 \ , \ S(0) = S_0 \tag{1.10}$$

с фазовыми переменными M и S и управлениями c и z :

$$0 \leq c \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq 1. \tag{1.11}$$

Здесь $\Phi(t)$, $r(t)$, $\rho(t)$, $\sigma(t)$, $p(t)$,$\theta(t)$ и $\tau(t)$ - прогнозируемые значения соответствующих переменных - считаются заданными неотрицательными функции времени, а Δ, $1/\delta$ и T - постоянные, имеющие размерность времени. Будем искать решение, предполагая, что $M(t)$ и $S(t)$ непрерывны, а $c(t)$ и $z(t)$ - кусочно-непрерывны на [0,T]. Вообще говоря, на переменные M и S следовало бы наложить условия неотрицательности $M \geq 0$ и $S \geq 0$, однако в силу уравнений (1.8)-(1.9) эти ограничения никогда не нарушаются, если им удовлетворяют начальные условия $M_0 \geq 0$ и $S_0 \geq 0$.

1.3 Возможные обобщения постановки задачи

1. В уравнениях (1.1)-(1.2) и в вытекающих из них уравнениях (1.8)-(1.9) низколиквидные активы представлены в агрегированном виде - одной переменной D или S, соответственно. Рассмотрение формирования портфеля сбережений не входит в цели данной работы - задача состоит в определении той суммы, которая может быть вложена домашним хозяйством в ценные бумаги вообще, в вычислении индивидуального соотношения между накоплением и потреблением. Тем не менее, можно сформулировать задачу с диверсифицированными активами в той же форме, что и (1.7)-(1.11). Задача такого рода была поставлена и решалась автором. Однако, оказывается, что в рамках изложенного подхода все возможные способы вложения денег могут быть оценены при помощи одного определенного ниже критерия r - свертки r и σ (независящего от $\theta^j(t)$) - характеризующего эффективный доход от данного вида сбережений, причем сбережения с одинаковым r неразличимы. Этот факт и обуславливает правомерность агрегирования активов в рассматриваемой в дальнейшем постановке задачи.

2. Для простоты мы будем рассматривать задачу управления активами индивидуума (или домашнего хозяйства с фиксированным количеством членов), однако задачу (1.7)-(1.11) легко обобщить на случай семьи (или любой другой элементарной ячейки общества), численность которой растет с темпом $n(t)$. В этом случае потребительские расходы $pC = cM/\tau$ нужно делить не только на индекс цен $p = p_0 \exp \int_0^t i(t')dt'$, но также и на индекс численности семьи $\exp \int_0^t n(t')dt'$. Легко видеть, что постановка задачи, учитывающая темп роста численности семьи, эквивалентна исходной при подстановке $i + n$ вместо i во все уравнения.

   Аналогичным образом можно учесть и изменение реального стандарта потребления. Если измерять реальное потребление C входящее в функцию полезности, в единицах C^0, и считать, что C^0 растет со временем с темпом $n_C = \dot{C}^0/C^0$, то для того, чтобы преобразовать задачу к виду (1.7)-(1.11), необходимо подставить уже i+n+n_c вместо i.

Подразумевая легкость возможных обобщений, в дальнейшем мы будем рассматривать задачу (1.7)-(1.11),

2 Поведение индивидуума при постоянных внешних параметрах

При постановке задачи (1.7)-(1.11) мы полагали, что индивидуум руководствуется прогнозом изменения цен, ставки процента, рыночного курса ценных бумаг и других внешних параметров. Такое предположение выглядит не вполне правдоподобно.

Более адекватным является предположение, что в каждый момент времени индивидуум располагает информацией только о текущих значениях внешних параметров и принимает решения на основании этой информации, применяя процедуру так называемого "скользящего планирования" ([15]), которая заключается в том, что в каждый момент времени он определяет свое поведение (спрос на товар, ценные бумаги и деньги) в зависимости от текущих условий (воспринимаемых им как начальные данные) из решения сформулированной выше задачи при условии неизменности внешних параметров, то есть при условии, что $\frac{r}{\sigma}$, $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$, $i = \frac{\dot{p}}{p}$ постоянны во времени и равны своим значениям в момент определения поведения. Если же в следующий момент времени внешние параметры изменяются, то индивидуум заново решает оптимальную задачу уже при новых значениях параметров и при новых начальных условиях т.д.

В данном разделе мы решим задачу (1.7)-(1.11) при постоянных внешних параметрах, а во второй части статьи рассмотрим взаимодействие потребителей, применяющих процедуру скользящего планирования и выясним, в каком случае прогноз потребителей о постоянстве параметров во времени оправдывается, а в каком случае потребители перманентно ошибаются в своих прогнозах и вынуждены решать задачу скользящего планирования заново. В последнем случае мы также вычислим величину ошибки прогнозирования.

Обычно при постановке задачи скользящего планирования горизонт планирования T полагают бесконечным (в этом случае процедура скользящего планирования свободна от искажений, вносимых так называемыми "хвостовыми" эффектами, присущими задачам с конечным горизонтом времени). В данной работе мы получим решение задачи с бесконечным горизонтом, как предел решения задачи с конечным горизонтом при $T \to \infty$.

Так как основная задача данной работы заключается в определении отношения потребителя к активам различной ликвидности (к наличным деньгам и сбережениям), в этом частном случае целесообразно рассматривать поведение индивидуума, получающего основной доход от этих активов ("рантье") и пренебречь независимым доходом $\Phi(t)$, считая, что $\Phi(t)$ мало по сравнению с M/τ и $(\frac{r}{\sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma})S$.

2.1 Структура решения

В этом подразделе мы приведем полное описание решения задачи (1.7)-(1.11) при сделанных выше предположениях. Доказательства всех сформулированных утверждений содержатся в Приложениях A и B.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче (1.7)-(1.11) является принцип максимума Понтрягина: управление (c, z) оптимально тогда и только тогда, когда оно доставляет максимум функции Гамильтона

$$H = e^{-\delta t} u \left(\frac{cM}{p\tau} \right) + \psi M \left(\rho - \frac{c}{\tau} - \frac{z}{\Delta} \right) + \psi S \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\theta} + \frac{1-z}{\Delta} \right) +$$

$$+\psi\Phi + \varphi M\frac{z}{\Delta} + \varphi S\left(\frac{\dot\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\theta} - \frac{1-z}{\Delta}\right) \tag{2.1}$$

при заданных M, S, ψ, φ, где ψ, φ — кусочно-гладкие функции времени, являющиеся решениями сопряженной системы

$$\dot\psi = -e^{-\delta t}u\left(\frac{cM}{p\tau}\right)\frac{c}{p\tau} - \psi\left(\rho - \frac{c}{\tau} - \frac{z}{\Delta}\right) - \varphi\frac{z}{\Delta}\ , \tag{2.2}$$

$$\dot\varphi = -\psi\left(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\theta} + \frac{1-z}{\Delta}\right) - \varphi\left(\frac{\dot\sigma}{\sigma} - \frac{1}{\theta} - \frac{1-z}{\Delta}\right)\ , \tag{2.3}$$

удовлетворяющими условиям трансверсальности

$$\psi(T) = \varphi(T) = 0\ . \tag{2.4}$$

При помощи принципа максимума можно аналитически определить некоторые существенные свойства решения задачи (1.7)-(1.11). Согласно принципу максимума оптимальное управление должно удовлетворять условиям

$$z(M,S,\psi,\varphi) \in Arg\max_{z\in[0,1]} \frac{z}{\Delta}(\varphi - \psi)(M+S) \tag{2.5}$$

$$c(M,S,\psi,\varphi) \in Arg\max_{c\in[0,1]} e^{-\delta t}u\left(\frac{cM}{p\tau}\right) - \psi\frac{cM}{\tau} \tag{2.6}$$

Из включения (2.5) видно, что

$$z(M,S,\psi,\varphi) = \begin{cases} 0 & ,\psi > \varphi \\ 1 & ,\psi < \varphi \\ [0,1], & \psi = \varphi \end{cases} \tag{2.7}$$

то есть на различных участках оптимальной система может находиться в трех режимах.

Интерпретация режимов достаточно прозрачна. Так как двойственные переменные (импульсы) ψ и φ имеют смысл ценности активов относительно критерия (1.7), первый и второй режимы соответствуют максимально быстрому переводу средств в более выгодную форму (продажа акций, если деньги предпочтительней, или покупка акций в противоположном случае).

Третий режим, соответствующий равноценности активов, реализуется, если равенство $\psi = \varphi$ выполняется в течение некоторого промежутка времени (t_1, t_2). Этот режим в теории оптимального управления называется *особым*. Оказывается, что большую часть времени оптимальная траектория проводит в особом режиме. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\beta = const$, $\beta > 1$, а $\Phi = 0$. Пусть внешние параметры задачи (1.7)-(1.11) $\frac{r}{\sigma}$, $\frac{\dot\sigma}{\sigma}$, ρ, i постоянны во времени, и выполняются следующие условия:

$$\hat r > \rho \tag{2.8}$$

$$\hat r > \nu > \rho - \frac{1}{\tau}, \tag{2.9}$$

где $\hat r = \frac{r}{\sigma} + \frac{\dot\sigma}{\sigma}$, а

$$\nu = i + \frac{r - i - \delta}{\beta} \tag{2.10}$$

Тогда при достаточно малых значениях параметра $\Delta > 0$ в (1.3) для любых начальных условий (M_0, S_0) найдутся достаточно большой горизонт T и интервалы времени t_1 и t_f такие, что:

(a) решение $(M(t), S(t))$ задачи (1.7)-(1.11) лежит на особом режиме при всех $t \in [t_1, T - t_f]$.

(b) t_1 имеет порядок Δ, стремится к нулю при $\Delta \to 0$ и равномерно ограничено по T (существует $\bar{t}_1$: $t_1 < \bar{t}_1$ при всех T); t_f зависит только от параметров задачи, но не зависит от начальных условий и T.

(c) управление $c(t)$ непрерывно по времени, и $c = 1$ при всех $t \in [t_1, T]$.

(d) на особом режиме при $t \in [t_1, T - t_f]$ выполняется следуещее соотношение:

$$\frac{S(t)}{M(t)} - \bar{k} = \left(\frac{S(T - t_f)}{M(T - t_f)} - \bar{k} \right) e^{-(\hat{r} - \nu)(T - t_f - t)},$$

где

$$\bar{k} = \frac{\nu - \rho + \frac{1}{\tau}}{\hat{r} - \nu}. \tag{2.11}$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении В.

Отметим, что, в отличие от "номинального" процента r, измеряемого в единицах денег на акцию (или на единицу номинальной стоимости акции), процент $\hat{r}$ представляет собой выраженный в деньгах доход от акций и облигаций на единицу вложенных средств в единицу времени, включающий как выплату процентов, так и приращение курсовой стоимости. Величина $\hat{r}$ играет роль эффективной ставки процента по ценным бумагам, и формула для $\hat{r}$ выражает тот факт, что доход, приносимый ценными бумагами, в действительности состоит не только из ежегодных выплат процентов или дивидендов, но и включает также систематическое изменение курсовой стоимости ценной бумаги. Будем называть $\hat{r}$ эффективной ставкой процента. Условие (2.8) выражает предположение, что эффективный доход от низколиквидных активов выше, чем ставка процента выплат обладателям высоколиквидных активов. В Приложении А (Лемма 1) показано, что в этом случае на особом режиме, соответствующем равноценности активов, ценность денег обуславливается их дефицитностью в качестве средства платежа. В случае $\hat{r} \leq \rho$ наличие ценных бумаг представляется нерациональным, и, следовательно, особый режим не реализуется.

Рассмотрим более подробно структуру оптимальной траектории и роль прямой $\frac{S(t)}{M(t)} = \bar{k}$, которую мы будем назвать магистралью. Типичная ситуация изображена на Рис.1. В Приложении В показано, что оптимальные значения t_f, $k_T = \frac{S(T)}{M(T)}$ и $k_2 = \frac{S(T-t_f)}{M(T-t_f)}$ не зависят ни от начальных условий (M_0, S_0), ни от горизонта планирования T. В Приложении В также показано, что, хотя t_1 зависит от T и начальных условий, t_1 равномерно ограничено сверху величиной $\bar{t}_1$ порядка Δ. Поэтому можно сказать, что система проводит основное время в особом режиме, причем при увеличении T время, проводимое системой в особом режиме, неограниченно растет. При этом оптимальная траектория приближается к

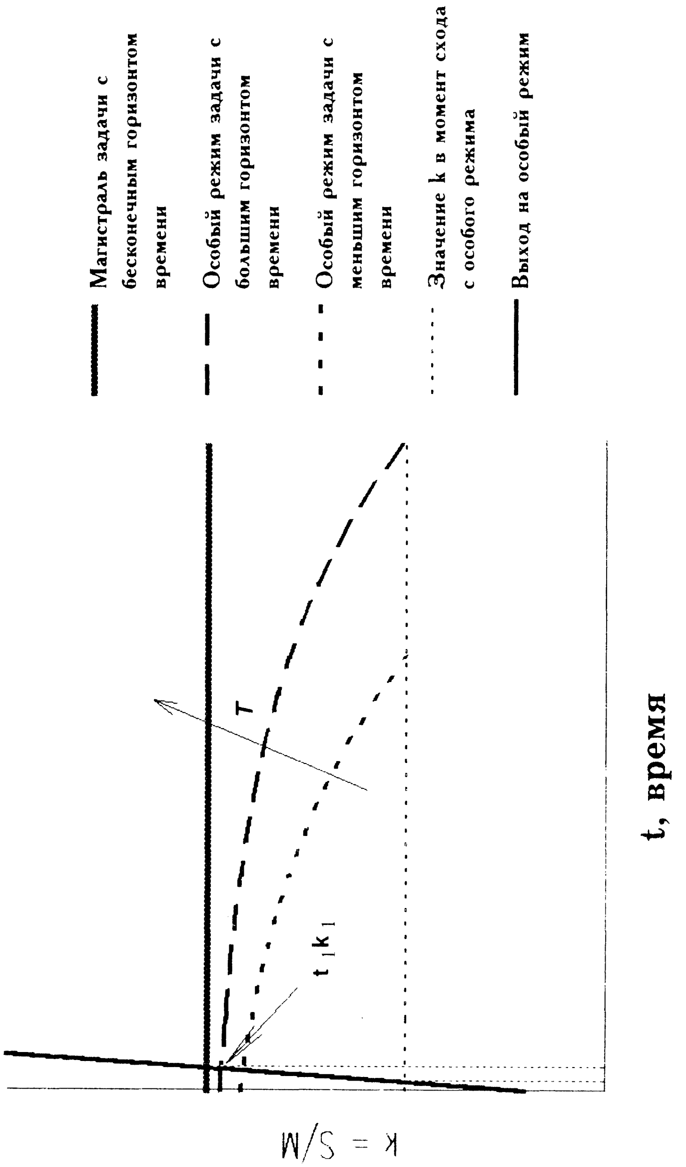

Рис.1 Оптимальная траектория k(t)

магистрали $S/M = \bar{k}$. Действительно, пусть $S^T(t), M^T(t)$ - оптимальная траектория для горизонта времени T. Тогда для любого заданного момента $t > \bar{t}_1$ в силу (d)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{S^T(t)}{M^T(t)} = \bar{k},$$

В этом смысле можно сказать, что магистраль $\frac{S(t)}{M(t)} = \bar{k}$ является решением задачи с бесконечным горизонтом. Будем называть $\bar{k}$ оптимальным отношением активов.

В силу (2.9) величина $\bar{k}$ положительна и конечна. Возникает вопрос, что будет с решением задачи, если условия (2.9) не выполняются. При $\hat{r} \le \nu$ у задачи оптимального управления вообще нет решения - интеграл (1.7) расходится при $T \to \infty$, и значение функционала стремится к $-\infty$. При $\nu \le \rho - \frac{1}{\tau}$ на протяжении всего решения индивидуум стремится избавиться от сбережений ($z = 0$) и живет на вырученные от их продажи деньги, в то же время тратя начальный запас денег M_0 и проценты с них.

2.2 Упрощенная постановка задачи управления активами

Как и следовало ожидать, оптимальное отношение активов (2.11) не зависит от параметра Δ. Современные технологии фондового рынка делают приобретение и продажу ценных бумаг чрезвычайно простыми и быстрыми, и параметр Δ пренебрежимо мал. Вообще говоря, это означает, что ценные бумаги являются вполне ликвидными активами в смысле первого определения, приведенного в разделе 1. В то же время они ***не являются*** ликвидными в смысле второго определения, так как все-таки ценные бумаги не пригодны для приобретения потребительских товаров и не выполняют функцию денег как средства платежа. Именно поэтому параметр τ входит в выражение (2.11) для оптимального соотношения активов, а параметр Δ - нет.

В этом подразделе мы рассмотрим задачу управления активами при $\Delta = 0$.

$$\int_0^T e^{-\delta t}\, u\left(\frac{cM}{p\tau}\right)\, dt \Rightarrow max \tag{2.12}$$

$$\dot{S} + \dot{M} = \rho M + \hat{r}S - pC \tag{2.13}$$

$$S(0) + M(0) = S_0 + M_0 \tag{2.14}$$

с ограничениями ликвидности

$$0 \le pC \le \frac{M}{\tau}, \quad S \ge 0 \tag{2.15}$$

Задача (2.12)-(2.15) является пределом уже решенной задачи при $\Delta \to 0$, однако между этими задачами имеется существенное различие. Дело в том, что при $\Delta > 0$ фазовые ограничения $M \ge 0$, $S \ge 0$ выполняются автоматически в силу динамических уравнений (1.8)-(1.9), на что в значительной степени опирается доказательство Теоремы 2. В задаче (2.12)-(2.15) ограничение $S \ge 0$ является существенным, кроме того, нельзя определить ограниченное управление z, поэтому эту задачу следует решать иначе. Техника решения подобной задачи подробно изложена и обоснована в [17]. Поэтому приведем лишь само решение. Оказывается, что в условиях Теоремы 2 оптимальное поведение описывается следующим образом:

- ограничение ликвидности выполняется как равенство в любой момент времени $pC = M/\tau$
- к концу планового периода индивидуум стремится избавится от сбережений $S(T) = 0$
- оптимальная динамика потребления определяется из следующего дифференциального уравнения
$$\frac{du'(C)}{dt} + (r - i - \delta)u'(C) = 0$$

Подставляя формулу (1.6) для функции полезности с постоянным относительным отвращением к риску, получаем зависимость потребления от времени $C = C_0 \exp\left\{\frac{\bar{r}-\iota-\delta}{\beta}t\right\}$, наличных денег $M = M_0 \exp\{\nu t\}$ и отношения активов

$$k(t) = \frac{S(t)}{M(t)} = \bar{k}(1 - e^{-(\bar{r}-\nu)(T-t)})$$

Так что при $T \to \infty$ соотношение активов $k(t)$ равномерно стремится к $\bar{k}$.

Заметим, что, с точностью до первого ("выход на особую экстремаль") и последнего ("сход с особой экстремали") участков траектории решения обеих задач совпадают. В обоих случаях при $T \to \infty$ соотношение активов $k(t)$ стремится к $\bar{k}$, что лишний раз показывает, что параметр Δ не влияет на соотношение между активами, оптимальное в долгосрочном плане.

2.3 Задача об оптимальном сбалансированном росте активов

Решение рассмотренной выше задачи управления активами показывает, что при устремлении горизонта планирования к бесконечности индивидуум стремится привести соотношение активов к $\bar{k} = \frac{\nu-\rho+\frac{1}{\tau}}{\bar{r}-\nu}$. Интересно, что магистраль $k(t) = \bar{k}$, действительно является оптимальной траекторией для задачи управления активами с бесконечным горизонтом, сформулированной следующим образом.

Предположим, что индивидуум изначально располагает активами (M_0, S_0). Пренебрежем временем перевода одного актива в другой и будем считать, что индивидуум волен выбрать какое-нибудь соотношение между активами и придерживаться его в течение всего промежутка времени. Таким образом, активы всех видов растут с одним и тем же постоянным темпом. Пусть потребление C также растет с тем же темпом ($c(t) = c = const$, $c \in [0, 1]$). Вопрос заключается в том, какое же соотношение между деньгами и ценными бумагами является оптимальным при сделанных предположениях. Чтобы ответить на него, нужно поставить задачу определения максимума функции двух переменных - уровня потребления c и соотношения k между активами.

Сначала агент распродает свои избыточные активы за пренебрежимо малое время так, чтобы добиться желаемого соотношения k и приходит к состоянию (M_1, S_1):

$$\begin{cases} M_1 + S_1 = M_0 + S_0 \\ S_1 = kM_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 = (M_0 + S_0)/(k+1) \\ S_1 = k(M_0 + S_0)/(k+1) \end{cases}$$

Складывая уравнения (1.8)-(1.9), получаем дифференциальное уравнение, не содержащее скорости перевода активов $1/\Delta$ (которая бесконечно велика в этой задаче):

$$\dot{M} + \dot{S} = (\rho - \frac{c}{\tau})M + rS. \qquad (2.16)$$

Подставляя $S = kM$, имеем

$$\dot M/M = (\rho - \frac{c}{\tau} + kr)/(k+1)$$

Это уравнение показывает, кстати, взаимно-однозначное соответствие между поддерживаемым соотношением между активами и темпом сбалансированного роста активов, устанавливаемое уравнением (2.16). Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия дает экспоненциальный рост активов:

$$M(t;k,c) = \frac{S_0 + M_0}{k+1} e^{\frac{\rho - \frac{c}{\tau} + k\hat r}{k+1} t}$$

Теперь можно сформулировать задачу:

$$\omega(k,c) = \int_0^\infty e^{-\delta t} u\left(\frac{cM(t;k,c)}{p\tau}\right) dt \Rightarrow max, \tag{2.17}$$

где $p = p_0 \exp it$, $u(C) = C^{1-\beta}/(1-\beta)$.

Задачу легко решить, взяв интеграл (2.17) по времени и вычислив затем производные $\frac{\partial\omega}{\partial k}$, $\frac{\partial\omega}{\partial c}$. При $r > \rho$ получим $\frac{\partial\omega}{\partial c} > 0$ и $c = 1$, а оптимальное соотношение активов в этой задаче совпадает с магистральным соотношением в рассматриваемом в этом разделе частном случае задачи:

$$k = \bar k = (\nu - \rho + \frac{1}{\tau})/(r - \nu),$$

где $\nu = i + \frac{\hat r - i - \delta}{\beta}$.

Это означает, что оптимальное соотношение между активами ни в коей мере не зависит от ограничения скорости продажи и приобретения активов, а определяется только агрегированными характеристиками активов (эффективными процентами $\hat r = \frac{r}{\sigma} + \frac{\dot\sigma}{\sigma}$ и $\rho = \rho - \frac{1}{\tau}$), предпочтениями агента (коэффициент дисконтирования δ и параметр функции полезности β) и внешними условиями (инфляция i). Еще раз обратим внимание на то, что для принятия решений не имеет значения ни ставка процента, ни даже ставка процента на единицу курсовой стоимости, ни сама курсовая стоимость, ни ее изменение по отдельности, а лишь единственный показатель $\hat r$, являющийся, по существу, агрегированным измерителем доходности ценных бумаг. Причем в формулу для оптимального соотношения между активами входят не сами параметры $\hat r$, ρ, i, а лишь их попарные разности, что подчеркивает характер принимаемых решений - альтернативный выбор между деньгами и ценными бумагами (управление z) и между хранением денег и потреблением (управление c).

2.4 Оптимальное соотношение активов и спрос на деньги

Теперь, после того, как мы показали, что оптимальное отношение активов $\bar k$ не зависит от постановки задачи, рассмотрим зависимость $\bar k$ от существенных параметров задачи. Для того, чтобы обсуждать этот вопрос в терминах теории спроса на деньги, введем также в рассмотрение ведичину относительного спроса на деньги - доли денег в богатстве индивидуума $\mu(\delta) = \frac{M}{S+M} = \frac{1}{\bar k(\delta)+1} = \frac{\hat r - \nu(\delta)}{\hat r - \rho + \frac{1}{\tau}}$.

Оптимальное отношение активов $\bar k$ монотонно зависит от β - относительного отвращения к риску по Эрроу-Пратту, присущего функции полезности $u(C)$. Чем меньше β, тем больше экономический агент предпочитает откладывать на будущее.

Коэффициент дисконтирования δ входит линейно как в темп ν роста активов, так и в спрос на деньги μ. Чем меньше δ, тем больше ν и меньше μ. При малых коэффициентах дисконтирования домашнее хозяйство предпочитает откладывать потребление на будущее и хранить богатство в форме ценных бумаг, приносящих больший доход. При больших коэффициентах дисконтирования предпочтение отдается сегодняшнему потреблению и ликвидности. Как уже отмечалось выше, малый коэффициент дисконтирования соответствует уверенности в будущем и малому отвращению к риску.

Более запутан вопрос зависимости спроса на деньги μ от реальной эффективной ставки процента $r - i$. Производная

$$\frac{d\mu}{d(r-i)} = \frac{(\beta-1)(\frac{1}{\tau} - \rho + i) - \delta}{\beta(r - \rho + \frac{1}{\tau})^2} == \frac{\frac{\beta-1}{\beta} - \mu(\delta)}{r - \rho + \frac{1}{\tau}}$$

может быть как отрицательной, так и положительной (среди коэффициентов дисконтирования, удовлетворяющих условиям (2.9), всегда найдутся и такие, что μ больше $(\beta-1)/\beta$, и такие, что μ меньше $(\beta-1)/\beta$). Мы не будем уделять внимания общеизвестному случаю $\frac{d\mu}{d(r-i)} < 0$, а рассмотрим случай малых коэффициентов дисконтирования δ.[5] При этом зависимость спроса на деньги μ от реальной эффективной ставки процента $r - i$ является монотонно возрастающей. Так как в данной модели коэффициент дисконтирования играет роль интертемпорального отвращения к риску, этот результат соответствует полученному Тобином ([3]) выводу, что при низком ожидаемом риске, ассоциированном с ценными бумагами, относительный спрос на деньги растет с увеличением ставки процента. Тобин не приводит содержательной интерпретации, но в рамках подробного описания, предложенного в настоящей работе, легко объяснить этот на первый взгляд парадоксальный факт. Дело в том, что при долгосрочном планировании индивидуум максимизирует не суммарное богатство, а текущее потребление, и чем больше ставка процента, тем меньше необходимо сбережений, чтобы обеспечить приемлемый уровень потребления завтра при высоком уровне потребления сегодня.

Естественно, что такой ситуации не возникает в случае, если функция полезности обладает низким отвращением к нулевому потреблению $\beta \leq 1$. В этом случае чем выше ставка процента, тем больше индивидуум вкладывает в ценные бумаги, не заботясь о текущем потреблении, и лишь в конце планового периода тратит все накопленное богатство на потребление.

Приложения

Приложение А. Свойства решения задачи оптимального управления (1.7)-(1.11)

Все доказываемые в настоящем приложении утверждения имеют место не только в случае фиксированных внешних параметров, но и в общем случае для задачи (1.7)-(1.11).

Доказательство Теоремы 1. В [16] принцип максимума выводится из условия равенства нулю первой вариации функционала по всем допустимым траекториям, соответствующим кусочно-непрерывным управлениям. Таким образом, на траекториях, удовлетворяющих принципу максимума, обращается в ноль производная по Гато. Поэтому траектория,

[5] Мы считаем, что величины i, ρ, δ порядка нескольких процентов в год, а величина $\frac{1}{\tau}$ – порядка нескольких *сотен* процентов в год.

удовлетворяющая принципу максимума, доставляет функционалу глобальный максимум, если функционал вогнут в пространстве кусочно-гладких функций $M(t), S(t)$. (Действительно, если функционал вогнут, то для любой траектории, не доставляющей глобальным максимумом, производная по направлению на глобальный максимум больше нуля, следовательно первая вариация и производная по Гато не равны нулю.

Для доказательства вогнутости задачи покажем, что если существуют две траектории $(M_1(t), S_1(t))$ и $(M_2(t), S_2(t))$, доставляющие функционалу (1.7) одно и то же значение, то траектория

$$\begin{array}{l} M_\lambda(t)=\lambda M_1(t)+(1-\lambda)M_2(t) \\ S_\lambda(t)=\lambda S_1(t)+(1-\lambda)S_2(t) \end{array}, \quad \lambda \in [0,1] \tag{A1}$$

допустима и доставляет ему по крайней мере не меньшее значение. Более того, если функция $u(\cdot)$ в (1.7) строго вогнута и $0<\lambda<1$, то значение функционала на траектории $(M_\lambda(t), S_\lambda(t))$ строго больше, чем на $(M_1(t), S_1(t))$ и $(M_2(t), S_2(t))$.

Обозначим через $(c_1(t), z_1(t))$, $(c_2(t), z_2(t))$, и $(c_\lambda(t), z_\lambda(t))$ управления, соответствующие траекториям $(M_1(t), S_1(t))$, $(M_2(t), S_2(t))$ и $(M_\lambda(t), S_\lambda(t))$. Тогда из системы дифференциальных уравнений (1.8)-(1.9) и определения (A1) можно получить выражения для $c_\lambda(t)$ и $z_\lambda(t)$:

$$\begin{array}{l} (S_\lambda(t)+M_\lambda(t))z_\lambda(t)=\lambda(S_1(t)+M_1(t))z_1(t)+(1-\lambda)(S_2(t)+M_2(t))z_2(t) \\ M_\lambda(t)c_\lambda(t)/\tau \quad = \quad \lambda M_1(t)c_1(t)/\tau \quad + \quad (1-\lambda)M_2(t)c_2(t)/\tau \end{array}$$

Из этих уравнений следует, что если $c_1(t)$, $c_2(t)$, $z_1(t)$ и $z_2(t)$ лежат на отрезке $[0,1]$, то $c_\lambda(t)$ и $z_\lambda(t)$ также лежат на отрезке $[0,1]$. Таким образом, траектория $(M_\lambda(t), S_\lambda(t))$ допустима. Из вогнутости функции $u(\cdot)$ следует, что в любой момент времени

$$u\left(\frac{c_\lambda(t)M_\lambda(t)}{p\tau}\right) \geq \lambda u\left(\frac{c_1M_1}{p\tau}\right)+(1-\lambda)u\left(\frac{c_2M_2}{p\tau}\right), \tag{A2}$$

откуда вытекает $\omega_\lambda \geq \omega_1 = \omega_2$, что и требовалось доказать.

Теперь укажем на некоторые свойства оптимального управления c.

Лемма 1. Если $\hat{r} > \rho$, то на траектории, соответствующей особому режиму $\psi = \varphi$, ограничение $c \leq 1$ выполняется как равенство.

Доказательство. Из (2.1) следует

$$\frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\delta t}u'\left(\frac{cM}{p\tau}\right)\frac{M}{p\tau} - \frac{\psi M}{\tau} \tag{A3}$$

Используя уравнения (B1) и (B2) из Приложения B, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \frac{M}{c}\left(-\dot{\psi}-\rho\psi\right) = \frac{M}{c}(\hat{r}-\rho)\psi$$

Так как $\hat{r} > \rho$, получаем, что в случае особого режима $\frac{\partial H}{\partial c} > 0$ и $c = 1$.

Лемма 2. Если функция полезности $u(\cdot)$ строго вогнута и имеет непрерывную производную, то потребление $C(t)$ непрерывно зависит от времени на любой траектории, удовлетворяющей принципу максимума для задачи (1.7)-(1.11).

Доказательство.

Из строгой вогнутости функции $u(\cdot)$ следует монотонное убывание, и, следовательно, непрерывная обратимость ее производной. Тогда из (А3) можно получить, что возможны два случая :

$$\begin{array}{l} c < 1 : C < \frac{M}{p\tau} \ , \ \ C = (u')^{-1}(e^{\delta t}p\psi) \\ c = 1 : C = \frac{M}{p\tau} \ , \ \ C < (u')^{-1}(e^{\delta t}p\psi), \end{array}$$

где $(u')^{-1}(e^{\delta t}p\psi)$ - значение функции, обратной к $u'(\cdot)$, в точке $e^{\delta t}p\psi$.

Таким образом, потребление $C(t)$ определяется как минимум из пары двух непрерывных функций времени:

$$C = \frac{cM}{p\tau} = \min\left\{\frac{M}{p\tau}, (u')^{-1}(e^{\delta t}p\psi)\right\}$$

Значит, для любого решения оптимальной задачи функция $C(t)$ непрерывна.

Следствие. Оптимальное управление $c(t)$ непрерывно.

Принцип максимума дает необходимые и достаточные условия оптимальности, но не гарантирует единственности решения. Доказать, что оптимальная траектория единственна в смысле зависимости потребления от времени, можно только в случае строго вогнутой функции полезности.

Лемма 3. Пусть функция $u(\cdot)$ строго вогнута. Тогда на всех оптимальных траекториях динамика потребления $C(t)$ одна и та же.

Доказательство. Рассмотрим две оптимальные траектории $M_1(t), S_1(t)$ и $M_2(t), S_2(t)$ и траекторию $M_\lambda(t), S_\lambda(t)$ (А1). Пусть в некоторый момент времени

$$C_1 \neq C_2.$$

В Лемме 2 доказано, что на траектории, удовлетворяющей принципу максимума, потребление C непрерывно зависит от времени, значит, $C_1 \neq C_2$ в течение некоторого промежутка времени. Тогда для всех $\lambda : 0 < \lambda < 1$ неравенство (А2) превращается в строгое на всем этом промежутке времени, следовательно, значение функционала на траектории $(M_\lambda(t), S_\lambda(t)$ превосходит максимальное. Возникшее противоречие и доказывает невозможность существования двух оптимальных траекторий с различными $C(t)$.

Замечание. Строгая вогнутость функции полезности является достаточным, но не необходимым условием единственности $C(t)$. Однако единственность кривой потребления не является единственным преимуществом строго вогнутых функций полезности. Из (В3) следует, что если функция полезности является вогнутой, но не строго вогнутой, то есть ее производная на отдельных участках постоянна, особый режим возможен только при специальном подборе параметров u', $\hat{r}$, p, δ, ρ и τ; в случае же общего положения особый режим для нестрого вогнутых функций не удовлетворяет принципу максимума, и оптимальная траектория состоит из участков первого и второго режимов.

Приложение В. Доказательство Теоремы 2

Прежде чем доказать теорему 2, рассмотрим более подробно поведение системы на особом режиме в частном случае, когда внешние параметры фиксированы. В отличие от первых двух (неособых) режимов на особом режиме принцип максимума не дает значения управления z непосредственно. Однако, значение z определяется на особом режиме однозначно условием $\psi = \varphi$. Если $\psi = \varphi$, то из (2.2)-(2.3) следует, что

$$\dot{\psi} = -e^{-\delta t} u \left(\frac{cM}{p\tau}\right) \frac{c}{p\tau} - \psi \left(\rho - \frac{c}{\tau}\right) \tag{B1}$$

$$\dot{\psi} = -\psi \left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) \tag{B2}$$

Таким образом, на особом режиме двойственные переменные ψ и ϕ согласованно падают с темпом $\hat{r} = \frac{r}{\sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$. Решение сопряженной системы (2.2)-(2.3) теперь записывается в следующем виде:

$$\psi = \varphi = \psi_1 e^{-\hat{r}t}$$

Подставляя это в первое уравнение сопряженной системы с учетом $c = 1$, имеем

$$u'\left(\frac{M}{p\tau}\right) = p\tau\psi_1\left(\hat{r} - \rho + \frac{1}{\tau}\right) e^{-(\hat{r}-\delta)t} \tag{B3}$$

Таким образом, для каждой заданной функции $u(\cdot)$ можно определить закон изменения $M(t)$. В частности, для однородной функции полезности (1.6) и постоянного темпа роста цен $p = p_0 \exp it$, рассматриваемых в разделе 2, находим

$$M(t) = M_1 e^{\nu t} \tag{B4}$$

где $M_1 = p_0\tau\left(p_0\tau\psi_1(\hat{r} - \rho + \frac{1}{\tau})\right)^{-1/\beta}$ - константа, а ν - темп роста количества наличных денег на особой экстремали - определяется из (2.10).

Чтобы найти зависимость от времени переменных S и z в этом режиме, можно использовать два уравнения системы (1.8)-(1.9), которые легко интегрируются:

$$z(t) = 1 - \frac{1 - \Delta(S_1 - \bar{k}M_1)(\hat{r} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{\theta})e^{(\hat{r}-\nu)t}) - \Delta(\nu - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{1}{\theta})\bar{k}}{\bar{k} + 1 + (S_1 - \bar{k}M_1)e^{(\hat{r}-\nu)t}}$$

$$S(t) = (S_1 - \bar{k}M_1)e^{\hat{r}t} + \bar{k}M_1 e^{\nu t} \tag{B5}$$

где $\bar{k}$ определяется формулой (2.11).

Траектории (B4), (B5) образуют на фазовой (M, S)-плоскости однопараметрическое семейство кривых:

$$S = \bar{k}M + aM^{\hat{r}/\nu}$$

с параметром $a = S_1/M_1 - \bar{k}$.

Однородность функции полезности и постоянство внешних параметров приводят к однородности задачи, то есть к тому, что на (M, S)-плоскости оптимальные траектории, исходящие из точек, лежащих на одном и том же луче, исходящем из начала координат, подобны. Введем новую переменную - соотношение активов $k = S/M$. Из (B4) и (B5) следует, что на особой экстремали

$$k(t) = (k(t_1) - \bar{k})e^{(\hat{r}-\nu)(t-t_1)} + \bar{k}. \tag{B6}$$

Доказательство Теоремы 2. Доказательство разобьем на две части. Докажем сначала, что существует описанная в условии теоремы оптимальная траектория, а затем докажем, что других оптимальных траекторий не существует.

По Теореме 1 любая траектория, удовлетворяющая необходимым условиям экстремума (принципу максимума), является глобальным максимумом. Поэтому для доказательства существования достаточно построить удовлетворяющую принципу максимума траекторию. Предположим, что эта траектория состоит из трех частей:

1. Выход на особую экстремаль (управление $z = 1$ или $z = 0$, в зависимости от начальных условий; управление c также определяется начальными условиями);
2. Движение по особой экстремали (управление $c = 1$, управление z и фазовые переменные определяются из условия $\psi = \varphi$);
3. Сход с особой экстремали (управления $z = 0$, $c = 1$).

Докажем, что таким образом можно построить траекторию, удовлетворяющую принципу максимума. Рассмотрим сначала последний участок траектории. Из принципа максимума (2.4) следует, что в конечной точке

$$\psi_T = \psi(T) = 0 \text{ и } \varphi_T = \varphi(T) = 0 \tag{B7}$$

Воспользовавшись уравнениями сопряженной системы (2.2)-(2.3), можно вычислить производные двойственных переменных в момент времени T:

$$\dot{\psi}(T) = -e^{-\delta T} u' \left(\frac{cM}{p\tau}\right) \frac{c}{p\tau} < 0 \ , \ \ \dot{\varphi}(T) = 0$$

Значит, в некоторой окрестности точки T верно неравенство $\psi > \varphi$ (чего, вообще говоря, и следовало ожидать, так как в конце рассматриваемого промежутка времени низколиквидные активы не имеют никакой ценности). Ниже будет показано, что при достаточно большом горизонте T можно выбрать такой момент времени t_2, что на всем интервале (t_2, T) верно неравенство $\psi > \varphi$, причем в самой точке t_2 выполняется неравенство $\psi \leq \varphi$. Тогда из непрерывности $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ следует, что

$$\psi(t_2) = \varphi(t_2) \tag{B8}$$

то есть t_2 - *последняя* точка оптимальной траектории, в которой выполняется равенство $\psi = \varphi$. Вообще говоря, не обязательно, что из (B8) следует, что точка t_2 лежит на особой экстремали. Но мы предположим, что это так и есть, и будем считать последним участком (сход с особой экстремали) отрезок траектории, соответствующий временному интервалу (t_2, T). Из (2.7) получаем $z = 0$ для всех $t \in (t_2, T)$.

Из того, что в конце траектории выполнены условия (B7), и производная функции Гамильтона по управлению c (A3) больше нуля следует, что $c = 1$ в некоторой окрестности конца траектории. Поэтому сделанное выше предположение о том, что на последнем участке $c = 1$, не противоречит принципу максимума.

Таким образом, при $t \in (t_2, T)$ имеем уравнения

$$\dot{M} = M\left(\rho - \frac{1}{\tau}\right) + S\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} + \frac{r}{\sigma}\right) \tag{B9}$$

$$\dot{S} = -S\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) \tag{B10}$$

$$\dot{\psi} = -e^{-\delta t}u'\left(\frac{M}{p\tau}\right)\frac{1}{p\tau} - \psi\left(\rho - \frac{1}{\tau}\right) \tag{B11}$$

$$\dot{\varphi} = -\psi\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} + \frac{r}{\sigma}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) \tag{B12}$$

с краевыми условиями (B7) и (B8), из которых необходимо определить время прохождения последнего участка траектории $t_f = T - t_2$.

Пара уравнений (B9)-(B10) отделяется и решается в явном виде:

$$S = S_2 \exp\left\{-\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right)x\right\} \tag{B13}$$

$$M = M_2 e^{(\rho - \frac{1}{\tau})x} + +S_2 \frac{\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} + \frac{r}{\sigma}}{\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \rho - \frac{1}{\tau}}\left(e^{(\rho - \frac{1}{\tau})x} - e^{-(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma})x}\right) \tag{B14}$$

где $x = t - t_2$. Отметим, что решение (B14) имеет вид

$$M = M_2 f(x; S_2/M_2),$$

Проинтегрируем пару уравнений (B11)-(B12), получаем

$$\psi = \psi_2 e^{-(\rho - \frac{1}{\tau})x} - e^{-(\rho - \frac{1}{\tau})x}\int_0^x e^{-\delta(y+t_2)}u'\left(\frac{M}{p\tau}\right)\frac{1}{p\tau}e^{(\rho - \frac{1}{\tau})y}dy$$

$$\varphi = \varphi_2 e^{(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma})x} - e^{(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma})x}\int_0^x\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} + \frac{r}{\sigma}\right)\psi(y)e^{-(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma})y}dy$$

Помня, что $u(\cdot)$ - однородная функция степени $1 - \beta$, получаем

$$u'\left(\frac{M}{p\tau}\right) = u'\left(\frac{M_2 f(x; S_2/M_2)}{p\tau}\right) = M_2^{-\beta}g(x; S_2/M_2),$$

где $g(x; S_2/M_2) = u'\left(\frac{M_2 f(x; S_2/M_2)}{p\tau}\right)$ - не зависит от M_2, а только от соотношения S_2/M_2.

Для вычисления времени $t_f = T - t_2$ подставим полученное решение $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ в краевые условия (B7) и (B8). Имеем

$$\psi_2 = M_2^{-\beta}\int_0^{t_f} e^{-\delta(y+t_2)}u'\left(\frac{f(y; S_2/M_2)}{p\tau}\right)\frac{1}{p\tau}e^{(\rho - \frac{1}{\tau})y}dy \tag{B15}$$

$$\varphi_2 = M_2^{-\beta}(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} + \frac{r}{\sigma})\int_0^{t_f}\int_x^{t_f} e^{-(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \rho - \frac{1}{\tau})x}e^{-\delta(y+t_2)}u'\left(\frac{f(y; S_2/M_2)}{p\tau}\right)\frac{1}{p\tau}e^{(\rho - \frac{1}{\tau})y}\,dydx \tag{B16}$$

Эти выражения выглядят довольно громоздко, однако преобразовав (B16) с учетом (B15), получаем

$$\psi_2 = M_2^{-\beta}e^{-\delta t_2}(p(t_2)\tau)^{\beta-1}h_1(t_f; S_2/M_2)$$

$$\psi_2 = M_2^{-\beta}e^{-\delta t_2}(p(t_2)\tau)^{\beta-1}h_2(t_f; S_2/M_2)$$

где

$$h_1(t_f; S_2/M_2) = \int_0^{t_f} \frac{e^{(-\delta+(\beta-1)i)x}}{f^\beta(x; s_2/M_2)} e^{(\rho-\frac{1}{\tau})x} dx ,$$

$$h_2(t_f; S_2/M_2) = \frac{\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\theta}+\frac{r}{\sigma}}{\hat{r}-\rho+\frac{1}{\tau}} \int_0^{t_f} \frac{e^{(-\delta+(\beta-1)i)x}}{f^\beta(x; s_2/M_2)} e^{-(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\theta}-\frac{\dot\sigma}{\sigma})x} dx .$$

Приняв теперь во внимание связь (B3) между ψ_2, M_2 и t_2, вытекающую из того, что точка $(\psi_2, \varphi_2, M_2, S_2)$ лежит на особой экстремали, получаем, что

$$h_1(t_f; S_2/M_2) = h_2(t_f; S_2/M_2) = 1/(\hat{r}-\rho+\frac{1}{\tau}). \tag{B17}$$

В Приложении С показано, что при достаточно малых Δ система уравнений (B17) разрешима относительно t_f и $k_2 = S_2/M_2$. Тогда из уравнений (B17) следует, что для всех точек особого режима с одинаковым соотношением активов S_2/M_2 время прохождения последнего участка траектории t_f не только равномерно ограничено, но и одинаково.

Это дает возможность построить на (M, S)-плоскости геометрическое место конечных точек траекторий системы. Помня, что $S_2 = k_2 M_2$, из (B13)-(B14) получаем:

$$S(T) = k_2 M_2 \exp\left\{-(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\theta}-\frac{\dot\sigma}{\sigma})t_f\right\} \tag{B18}$$

$$M(T) = M_2\left\{e^{(\rho-\frac{1}{\tau})t_f} + k_2\frac{\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\theta}+\frac{r}{\sigma}}{\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\theta}-\frac{\dot\sigma}{\sigma}+\rho-\frac{1}{\tau}}\left(e^{(\rho-\frac{1}{\tau})t_f} - e^{-(\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{\theta}-\frac{\dot\sigma}{\sigma})t_f}\right)\right\} \tag{B19}$$

Таким образом, с точностью до множителя M_2 известно поведение системы на последнем отрезке времени $[t_2, T]$. Кроме того, для всех начальных состояний (M_0, S_0) существует одно и то же соотношение активов k_2 в момент времени t_2. Не важно, как k_2 соотносится с введенным ранее $\bar{k}$, главное, что k_2 - функция только параметров задачи и не зависит от начальных условий и горизонта времениT. Зная k_2 и $t_f = T - t_2$, мы можем определить тот особый режим $k_m(t)$, вдоль которого происходит развитие системы, начиная с момента времени t_1.

$$k_m(t) = (k_2 - \bar{k})e^{(\hat{r}-\nu)(t-t_2)} + \bar{k}. \tag{B20}$$

На рисунке 1 показан этот особый режим в случае, если $k_2 < \bar{k}$ (ситуация с $k_2 > \bar{k}$ аналогична). На этом участке траектории с точностью до множителя M_2 мы знаем как координаты M и S, так и импульсы ψ и φ.

Начальный участок траектории зависит от соотношения между $k_m(0)$ и начальной структурой активов $k_0 = S_0/M_0$. Если $k_0 = k_m(0)$, то система находится в особом режиме с самого начала, и $t_1 = 0$. Мы получили траекторию, удовлетворяющую принципу максимума.

Если $k_0 < k_m(0)$, то для выхода на особую экстремаль необходимо избрать второй режим - скупку акций ($z = 1$). Точка пересечения кривой $k_{z=1}(t)$ (с начальным условием $k_{z=1}(0) = k_0$) с особой экстремалью $k_m(t)$ и дает время t_1 выхода на нее. Из монотонности кривых ясно, что $t_1 < \bar{t}$, где $\bar{t}$ - время пересечения кривой $k_{z=1}(t)$ с горизонтальной прямой $k = \bar{k}$, поэтому время t_1 равномерно ограничено для всех T. Таким образом, мы вновь получили удовлетворяющую принципу максимума траекторию.

Если же $k_0 > k_m(0)$, то необходимо, напротив, продавать акции (режим $z = 0$). Тогда время t_1 выхода на особую экстремаль определяется точкой пересечения кривой $k_{z=0}(t)$ (с начальным условием $k_{z=0}(0) = k_0$ с особой экстремалью $k_m(t)$. Теперь время t_1 ограничено уже временем $\tilde{t}$ пересечения кривой $k_{z=0}(t)$ с горизонтальной прямой $k = k_2$. Время $\tilde{t}$ также не зависит от T, поэтому имеет место равномерная ограниченность $t_1 < \bar{t}_1 = max\{\bar{t}, \tilde{t}\}$.

Таким образом, каковы бы ни были начальные условия (кстати, как видно, в однородном случае важны не сами значения M_0 и S_0 , а их отношение $k_0 = S_0/M_0$), при достаточно малых Δ и достаточно больших $T > \bar{t}_1 + t_f$ существует оптимальная траектория, проводящая вне особого режима лишь конечное время, что и требовалось доказать.

Рассмотрим вопрос о существовании других оптимальных траекторий. Из Леммы 3 Приложения А следует, что в случае строго вогнутой функции полезности все оптимальные траектории имеют одну и ту же зависимость $c(t)M(t)$, и неединственность могла бы проявляться только в различном поведении $M(t)$, $S(t)$, $z(t)$ и $c(t)$. Докажем, что и это не имеет места в силу непрерывности $M(t)$, $S(t)$, следующей из принципа максимума непрерывности $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ и доказанной в Лемме 2 Приложения А непрерывности $c(t)$. Действительно, рассмотрим только что построенную оптимальную траекторию (обозначим ее $\left(M^0(t), S^0(t)\right)$ и предположим, что существует отличная от нее оптимальная траектория $\left(M^1(t), S^1(t)\right)$, причем $M^1(t) \neq M^0(t)$ или $S^1(t) \neq S^0(t)$ в течение некоторого промежутка времени.

Рассмотрим поведение $\left(M^1(t), S^1(t)\right)$ на последнем участке траектории. Из принципа максимума следует, что в конце траектории

$$\psi^1(T) = \varphi^1(T) = 0 \tag{B21}$$
$$\dot{\psi}^1(T) < 0, \;\; \dot{\varphi}^1(T) = 0,$$

то есть в некоторой окрестности конечной точки $\psi^1(t) > \varphi^1(t)$, откуда следует, что в этой окрестности $z^1(t) = 0$ и $c^1(t) = 1$. Значит, мы имеем для $\psi^1(t), \varphi^1(t)$ в конце траектории ту же систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -e^{-\delta t} u'(\frac{M}{p\tau})\frac{1}{p\tau} - \psi(\rho - \frac{1}{\tau}) \tag{B22}$$

$$\dot{\varphi} = -\psi(\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\Delta}) - \varphi(\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\Delta}) \tag{B23}$$

и те же начальные (то есть конечные) условия (B21), что и для $\psi^0(t)$, $\varphi^0(t)$. Пусть управление $z^1(t)$ переключается в точке $t_z > t_2$, а управление $c^1(t)$ - в точке $t_c > t_2$. То есть на интервале (t_z, T) верно $z^1(t) = 0$, и на интервале (t_c, T) верно $c^1(t) = 1$. Это значит, что на интервале $(max\{t_z, t_c\}, T)$ мы имеем на $\left(M^1(t), S^1(t)\right)$ точно такие же уравнения (B9)-(B10), как и те, которым удовлетворяют $\left(M^0(t), S^0(t)\right)$. В силу равенства $c^1(t) = c^0(t) = 1$ и доказанной в Лемме 3 раздела 1 единственности динамики потребления $c^1(t)M^1(t) = c^0(t)M^0(t)$, имеем, что на этом интервале $M^1(t) = M^0(t)$. Тогда, выражая $S^1(t)$ из уравнения (B9), получаем, что на интервале $(max\{t_z, t_c\}, T)$ траектории совпадают:

$$M^1(t) = M^0(t),\; S^1(t) = S^0(t),\; \psi^1(t) = \psi^0(t),\; \varphi^1(t) = \varphi^0(t), \;.$$

Пусть $t_c > t_z$, то есть управление $c^1(t)$ переключается позже, чем управление $z^1(t)$. Тогда в момент времени t_c должно выполняться равенство

$$e^{-\delta t} u'\left(\frac{c^1 M^1}{p\tau}\right)\frac{c^1}{p\tau} = -\psi^1\left(\rho - \frac{c^1}{\tau}\right)$$

Но, по построению, на траектории $\big(M^0(t), S^0(t)\big)$ система находится в моэтомент времени t_c на последнем участке траектории, и $c^0(t) = 1$. Следовательно, для траектории $\big(M^0(t), S^0(t)\big)$ выполняется строгое неравенство вместо равенства, что противоречит непрерывности двойственных перемены[х]. Таким образом, $t_c \le t_z$, то есть на всем интервале (t_z, T) верно $c^1(t) = 1$ и траектории совпадают. Если $t_z > t_2$, то есть траектории все-таки различаются, то непрерывность двойственных переменных нарушается в точке t_z. Действительно, в любой момент $t_z \ge t_2$ $\psi^0(t_z) > \varphi^0(t_z)$ по построению; в то же время, по определению t_z, $\psi^1(t_z) \le \varphi^1(t_z)$. Это невозможно, так как $\psi^1(t) = \psi^0(t)$ и $\varphi^1(t) = \varphi^0(t)$ на интервале (t_z, T).

Итак, траектории совпадают на всем отрезке (t_2, T). Рассмотрим теперь систему в особом режиме на (t_1, t_2). Так как на траектории $\big(M^0(t), S^0(t)\big)$ в момент времени t_2 производная $\frac{\partial H}{\partial c}$ положительна, она положительна в этот момент и на траектории $\big(M^1(t), S^1(t)\big)$, значит, $c^1 = 1$ в некоторой окрестности t_2. Пусть управление $c^1(t)$ переключается в точке $t_c \in (t_1, t_2)$. На интервале (t_c, t_2) управления c по прежнему совпадают: $c^1(t) = c^0(t) = 1$, так что совпадают и $M^1(t) = M^0(t)$. Из уравнений (1.8)-(1.9) можно исключить $z^1(t)$ и получить дифференциальное уравнение первого порядка на $S^1(t)$ такое же, как и было для $S^0(t)$ с теми же начальными условиями, заданными в момент времени t_2, поэтому на интервале (t_c, t_2) траектории совпадают ($z^1(t)$ выражается из уравнения (1.8) через $S^1(t)$). Далее, из непрерывности, как и прежде, следует, что переключение управления $c(t)$ невозможно. Поэтому траектории совпадают на всем отрезке (t_1, t_2).

Что касается начального отрезка (перехода в особый режим), доказательство единственности осложняется неопределенностью управления $c(t)$ для траектории $\big(M^0(t), S^0(t)\big)$. Однако, единственность на начальном участке траекторий доказывать и не нужно.

Итак, если и существует несколько решений, то они различаются только на начальном участке $(0, t_1)$, продолжающемся время порядка Δ. За это время соотношение между активами становится равным $k_1(T)$. На последующем промежутке времени $[t_1, T]$ все оптимальные траектории сливаются в одну, причем при увеличении горизонта планирования T эта траектория приближается к горизонтальной прямой $k(t) = \bar{k}$:

$$k(t) - \bar{k} = (k_2 - \bar{k})\exp\{-(\hat{r} - \nu)(T - t_f - t)\} \text{ при всех } t \in [t_1, t_f]$$

Приложение C. Доказательство разрешимости системы уравнений (B17)

В этом приложении доказывается разрешимость относительно k_2 и t_f системы уравнений:

$$(\hat{r} - \hat{\rho}) \int_0^{t_f} \frac{e^{(\beta i + \hat{\rho} - i - \delta)y}}{f^\beta(y; k_2)} dy \;=\; 1 \tag{C1}$$

$$(\hat{r} + \alpha) \int_0^{t_f} \frac{e^{(\beta i - \alpha - i - \delta)y}}{f^\beta(y; k_2)} dy \;=\; 1 \tag{C2}$$

где $\hat{\rho} = \rho - \frac{1}{\tau}$, $k_2 = S_2/M_2$, $\alpha = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}$,
$\lambda = (\frac{1}{\Delta} + \frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\theta})/(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\theta} + \rho - \frac{1}{\tau} - \frac{\dot{\sigma}}{\sigma})$,
$f(y; k_2) = (1 + k_2\lambda)\exp(\hat{\rho}y) - k_2\lambda\exp(-\alpha y)$.

Вынося $\exp(\hat{\rho}y)$ из $f(y; k_2)$ и внося постоянные множители $\hat{r} - \hat{\rho}$ и $\hat{r} + \alpha$ под знак интегралов, получаем, что оба уравнения имеют вид

$$\int_0^{t_f} g(y;k_2)\xi e^{-\xi y}dy = 1 , \tag{C3}$$

где

$$g(y;k_2) = \frac{e^{\beta(\nu-\hat{\rho})y}}{\{1+k_2\lambda(1-\exp(-(\alpha+\hat{\rho})y))\}^{\beta}} \tag{C4}$$

причем в первом уравнении $\xi = \hat{r}-\hat{\rho}$, а во втором $\xi = \hat{r}+\alpha$. Заметим, что, в силу малости параметра Δ, верно соотношение $\hat{r}-\hat{\rho} < \hat{r}+\alpha$.

Выясним, при каких k_2 и ξ уравнение (C3) разрешимо относительно t_f. Так как для любого ξ

$$\int_0^{\infty} \xi e^{-\xi y}dy = 1 ,$$

существование $t_f < \infty$ такого, что

$$\int_0^{t_f} g(y;k_2)\xi e^{-\xi y}dy = 1 ,$$

определяется функцией $g(\cdot;k_2)$. Необходимым и достаточным условием разрешимости относительно t_f на функцию $g(\cdot;k_2)$ является неравенство

$$I(k_2,\xi) = \int_0^{\infty} g(y;k_2)\xi e^{-\xi y}dy > 1 , \tag{C5}$$

а достаточным условием является $g(y;k_2) \geq 1$ при всех $y \geq 0$ и $g(y;k_2) > 1$ при некотором $y \geq 0$. Легко проверить, что достаточное условие удовлетворяется при всех $k_2 < \frac{\nu-\hat{\rho}}{\alpha+\hat{\rho}}$.

Для тех k_2 и ξ, при которых уравнение (C3) разрешимо относительно t_f, оно задает непрерывную функцию $t_f = t_f(k_2,\xi)$. Чтобы доказать разрешимость исходной системы (C1)-(C2), необходимо и достаточно показать, что при некотором k_2 выполняется равенство $t_f(k_2,\hat{r}-\hat{\rho}) = t_f(k_2,\hat{r}+\alpha)$. Для этого достаточно показать, что на некотором отрезке значений k_2 разность $t_f(k_2,\hat{r}-\hat{\rho}) - t_f(k_2,\hat{r}+\alpha)$ меняет знак.

Рассмотрим $k_2 = 0$. Интегрируя (C3) получаем функцию $t_f(0,\xi)$ в явном виде:

$$t_f = \frac{\ln\xi - \ln\beta(\nu-\hat{\rho})}{\xi - \beta(\nu-\hat{\rho})}$$

Производная $\partial t_f(0,\xi)/\partial\xi$ отрицательна при всех положительных ξ, так что $t_f(0,\hat{r}-\hat{\rho}) - t_f(0,\hat{r}+\alpha) > 0$

Рассмотрим теперь область больших k_2. Для различных ξ максимальные k_2, при которых еще выполняется необходимое и достаточное условие (C5) разрешимости уравнения (C3) относительно t_f, различны и определяются равенством $I(k_2^{max},\xi) = 1$, откуда можно получить нижнюю оценку для $k_2^{max}(\xi)$:

$$k_2^{max}(\xi)\lambda > \left(1+\frac{\beta(\nu-\hat{\rho})}{\xi-\beta(\nu-\hat{\rho})}\right)^{1/\beta} - 1 \geq \frac{\nu-\hat{\rho}}{\xi-\beta(\nu-\hat{\rho})} \tag{C6}$$

При $\xi \leq \beta(\nu-\hat{\rho})$ интеграл $I(k_2^{max},\xi)$ расходится и уравнение (C3) разрешимо относительно t_f при всех k_2 (то есть $k_2^{max} = \infty$). Можно доказать и обратное утверждение - при

$\xi > \beta(\nu - \hat{\rho})$ всегда существует $k_2^{max} < \infty$. Для этого покажем, что $I(k_2,\xi) < 1$ при достаточно больших k_2. Разобьем область интегрирования $[0,\infty)$ на две части - $[0,\varepsilon]$ и $[\varepsilon,\infty)$, где величина ε достаточно мала для того, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^\varepsilon \frac{e^{\beta(\nu-\hat{\rho})y}}{\{1 + k_2\lambda(1 - \exp(-(\alpha+\hat{\rho})y))\}^\beta}\, \xi e^{-\xi y} dy < 1/2 ,$$

Легко видеть, что в качестве ε можно взять, например, $\frac{1}{2\xi}$. Интеграл по интервалу (ε,∞) сходится в силу условия $\xi > \beta(\nu - \hat{\rho})$, и его значение можно уменьшить в любое наперед заданное число 2χ раз простым увеличением k_2 в

$$\bar{\chi} = \left\{2\chi \frac{1 + k_2\lambda(1 - \exp(-(\alpha+\hat{\rho})\varepsilon))}{k_2\lambda(1 - \exp(-(\alpha+\hat{\rho})\varepsilon))}\right\}^{1/\beta}$$

раз. Так как $\varepsilon = \frac{1}{2\xi}$ конечно, $\bar{\chi}$ также конечно. Поэтому, если при некотором k_2^χ значение интеграла по интервалу (ε,∞) равно χ, то при $k_2 = \chi k_2^\chi(\varepsilon)$ его значение не превышает $1/2$. Следовательно, можно найти такие конечно большие k_2, при которых $I(k_2,\xi) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Значит, при $\xi > \beta(\nu - \hat{\rho})$ существует конечное k_2^{max}.

Предположим, что параметр Δ достаточно мал, и $\hat{r} + \alpha > \beta(\nu - \hat{\rho})$. Тогда в случае $\hat{r} - \hat{\rho} < \beta(\nu - \hat{\rho})$ определить знак разности $t_f(k_2, \hat{r} - \hat{\rho}) - t_f(k_2, \hat{r} + \alpha)$ при больших k_2 очень просто. Рассмотрим $k_2^\alpha = k_2^{max}(\hat{r}+\alpha) < k_2^{max}(\hat{r} - \hat{\rho}) = \infty$. По определению, $t_f(k_2^\alpha, \hat{r}+\alpha) = \infty$, а $t_f(k_2^\alpha, \hat{r} - \hat{\rho}) < \infty$. Поэтому в левой полуокрестности k_2^α найдутся такие k_2, что $t_f(k_2^\alpha, \hat{r} - \hat{\rho}) - t_f(k_2^\alpha, \hat{r} + \alpha) < 0$.

Рассмотрим теперь случай $\hat{r} - \hat{\rho} < \beta(\nu - \hat{\rho})$. Теперь $k_2^{\hat{\rho}} = k_2^{max}(\hat{r} - \hat{\rho}) < \infty$. Докажем, что

$$I(k_2^{\hat{\rho}}, \hat{r} + \alpha) < 1 \tag{C7}$$

Тогда снова $k_2^\alpha = k_2^{max}(\hat{r}+\alpha) < k_2^{\hat{\rho}}$, $t_f(k_2^\alpha, \hat{r}+\alpha) = \infty$, $t_f(k_2^\alpha, \hat{r}-\hat{\rho}) < \infty$, и найдутся такие k_2, что $t_f(k_2^\alpha, \hat{r} - \hat{\rho}) - t_f(k_2^\alpha, \hat{r} + \alpha) < 0$.

Для доказательства (C7) разобьем область интегрирования на две части: $[0, 2\bar{\varepsilon}/\xi]$ и $[2\bar{\varepsilon}/\xi, \infty]$, где $\bar{\varepsilon} = (\hat{r} - \hat{\rho} - \beta(\nu - \hat{\rho}))/\xi$ - малый (порядка Δ) параметр задачи. Интеграл по первому отрезку меньше чем, $2\bar{\varepsilon}$, а интеграл по интервалу $[2\bar{\varepsilon}/\xi, \infty]$ меньше, чем

$$\left(1 - \beta\frac{\nu - \hat{\rho}}{\xi}\right)^{-1} \left(1 - 2\bar{\varepsilon}(1 - \beta\frac{\nu - \hat{\rho}}{\xi})\right)^{-1} \left(1 + k_2^{\hat{\rho}}\lambda\left(1 - e^{-\frac{2\varepsilon}{\lambda}}\right)\right)^{-\beta}$$

Тогда, используя неравенство (C6) для $k_2^{\hat{\rho}}$, получаем следущее разложения по степеням $\bar{\varepsilon}$:

$$I(k_2^\rho, \hat{r} + \alpha) < 1 - \bar{\varepsilon}\frac{\nu - \hat{\rho}}{\hat{r} - \hat{\rho} - \beta(\nu - \hat{\rho})} + o(\bar{\varepsilon})$$

Таким образом, существует достаточно малое $\bar{\varepsilon}$ такое, что $I(k_2^{\hat{\rho}}, \hat{r} + \alpha) < 1$, и система уравнений (C3) разрешима. Следовательно, для разрешимости системы уравнений (C3) достаточно, чтобы параметр Δ был много меньше остальных параметров системы таких, как $1/\hat{r}$, $1/\rho$, τ, θ, $1/\delta$, $1/i$, $\sigma/\dot{\sigma}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fisher, I. *The Purchasing Power of Money* 1911 (New York: Macmillan)

2. Keynes, J.M. *A Treatise on Money* 1930 (London and New York: Macmillan)

3. Tobin, J. "Liquidity Preference as Behavior towards Risk", *Review of Economic Studies*, 1958, Vol.25, February, p.65-86

4. Sidrauski, M. "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy *American Economic Review, Papers and Proceedings* 1967, Vol.57, p.534-44

5. Fischer, S. "Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model" *Econometrica*, 1979, Vol.47, p.1433-39

6. Asaki, K. "The Utility Function and the Superneutrality of Money on the Transition Path" *Econometrica*, 1983, Vol.51, p.1593-96

7. Patinkin, D. An Indirect Utility Approach to the Theory of Money, Assets, and Savings // *The Theory of Interest Rates* New York, 1965

8. Friedman, M. "The Quantity Theory of Money: A Restatement." // *Friedman, M. The Optimum Quantity of Money and Other Essays* Chicago, 1969

9. S.Fischer, R.Dornbusch, R.Schmalensee. Introduction to Macroeconomics. McGraw-Hill, 1988, p.303

10. Helpman, E. "Optimal Spending and Money Holding in the Presence of Liquidity Constraints". *Econometrica*, 1981, Vol.49, No.6

11. Mariger, R. "A Life-Cycle Consumption Model with Liquidity Constraints: Theory and Empirical Results". *Econometrica*, 1987, Vol.55, No.3

12. Makower, H., Marschak, J. "Assets, Prices and Monetary Theory" *Economica*, 1938 August, Vol.5, p.261-87. Цит. по Lippman, S., McCall, J. "Operational Measure of Liquidity". *American Economic Review* 1986 Vol.76, No.1

13. Hirshleifer, J., Riley, J.G. The Analytics of Uncertainty and Information. Cambridge University Press, 1992

14. К.Р.Макконнелл, С.Л.Брю. Экономикс : Принципы, проблемы и политика. М. Республика, 1992, Т.1, стр. 265

15. Полтерович В.М. "Эффективный равновесный рост и скользящее планирование". Экономика и математические методы, 1979, т.XV, вып.4

16. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М. Наука, 1974, стр. 149-151

17. Гуриев С.М., Поспелов И.Г. "Модель общего равновесия экономики переходного периода" *Математическое моделирование*, 1994, т.6, N2, стр.3-24

Поступила в редакцию
25.05.94