2000. Т. 36, № 12. С. 1670 — 1686

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.984.5

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ КОЛЕБАНИЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ ПРИ ЗАКРЕПЛЕННОМ ВТОРОМ КОНЦЕ В ТЕРМИНАХ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

В. А. Ильин

Введение. В данной работе в терминах обобщенного решения волнового уравнения $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0$ с конечной энергией мы изучим вопрос о граничном управлении процессом колебаний на конце $x = 0$ при условии, что конец $x = l$ закреплен.

Мы предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость точек струны равны соответственно $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две произвольные функции из классов $\varphi(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x) \in L_2[0,l]$, первая из которых удовлетворяет условию закрепления $\varphi(l) = 0$, а в момент времени $t = T$ смещение и скорость точек струны равны соответственно $u(x,T) = \varphi_1(x)$, $u_t(x,T) = \psi_1(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ — две другие произвольные функции из классов $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$, первая из которых удовлетворяет условию закрепления $\varphi_1(l) = 0$.

Основная цель работы — выяснение в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией для любого промежутка времени $T > 0$ необходимых и достаточных условий существования и явного аналитического вида граничного управления $u(0,t) = \mu(t)$, обеспечивающего переход колебательного процесса из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$.

Как и в ситуации гладкого решения волнового уравнения, изученного в [1], приходится существенно различать случаи различных промежутков времени T. В работе досконально изучены три случая: 1) $0 < T < 2l$, 2) $T = 2l$, 3) $T > 2l$ (ради простоты мы предполагаем, что $2l < T \leq 3l$).

В первом из этих случаев для произвольных четырех функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ из классов

$$\varphi(x) \in W_2^1[0,l], \quad \psi(x) \in L_2[0,l], \quad \varphi_1(x) \in W_2^1[0,l], \quad \psi_1(x) \in L_2[0,l], \tag{$*$}$$

подчиненных условиям закрепления при $x = l$

$$\varphi(l) = 0, \quad \varphi_1(l) = 0, \tag{$**$}$$

мы устанавливаем необходимые и достаточные условия существования (единственного!) граничного управления $u(0,t) = \mu(t)$, переводящего процесс колебаний из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$, и предъявляем это граничное управление в явном аналитическом виде. При этом, как и в ситуации гладкого решения волнового уравнения, вид и количество указанных необходимых и достаточных условий и вид искомого граничного управления существенно зависят от того, какому множеству принадлежит промежуток времени T: интервалу $(0,l)$ или полусегменту $[l,2l)$.

В случае $T = 2l$ в отличие от ситуации гладкого решения волнового уравнения мы (насколько нам известно, впервые) устанавливаем, что для четырех совершенно произвольных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ из классов $(*)$, удовлетворяющих условиям закрепления $(**)$, существует единственное граничное управление $u(0,t) = \mu(t)$, переводящее процесс колебаний из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x),$ $u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$, и предъявляем это граничное управление в явном аналитическом виде.

Наконец в случае $T > 2l$ (точнее, в случае $2l < T \leq 3l$), когда граничное управление $u(0,t) = \mu(t)$, переводящее процесс колебаний из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$, также существует для произвольных четырех функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ из классов $(*)$, удовлетворяющих условиям закрепления $(**)$, но определяется неоднозначно, мы предъявляем общий вид этого граничного управления, в который входят две совершенно произвольные первообразные функций $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ и две произвольные функции, определенные на сегментах длины $T - 2l$, принадлежащие на этих сегментах классу W_2^1 и принимающие на концах этих сегментов заданные значения.

Из работ, посвященных изучаемой тематике, кроме уже упомянутой статьи [1], укажем работы [2 — 8].

1. Основные определения и вспомогательные утверждения. Из работы [8] заимствуем следующие понятия. Будем обозначать символом Q_T прямоугольник $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times$ $\times [0 \leq t \leq T]$.

Определение 1. Будем говорить, что функция двух переменных $u(x,t)$ *принадлежит классу* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если функция $u(x,t)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\bar{Q}_T$ и имеет в этом прямоугольнике обе обобщенные частные производные $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \leq x \leq l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

Определение 2. Будем говорить, что функция двух переменных $u(x,t)$ *принадлежит классу* $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, если сама функция $u(x,t)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в замкнутом прямоугольнике $\bar{Q}_T$ и если у этой функции существуют в этом прямоугольнике все обобщенные частные производные второго порядка, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \leq x \leq l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

Естественность классов $\widehat{W}_2^2(Q_T)$ и $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ обоснована в замечании 1 п. 1 работы [8].

Для произвольного $T > 0$ будем рассматривать в обобщенной трактовке следующие три задачи:

смешанную задачу I

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq l, \tag{3}$$

в которой $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\varphi(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x) \in L_2[0,l]$ и выполнены условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0), \quad \varphi(l) = 0, \tag{4}$$

смешанную задачу II

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{5}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \tag{6}$$

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq l, \tag{7}$$

в которой $\mu(t) \in W_2^1[0,T]$, $\varphi_1(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi_1(x) \in L_2[0,l]$ и выполнены условия согласования

$$\varphi_1(0) = \mu(T), \quad \varphi_1(l) = 0, \tag{8}$$

задачу граничного управления III

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l, \tag{10}$$

$$u(l,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T, \tag{11}$$

в которой $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ принадлежат классам $(*)$ и удовлетворяют условиям закрепления $(**)$.

Определение 3. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи I* назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt + \int_0^l [\varphi(x)\Phi_t(x,0) - \psi(x)\Phi(x,0)]\,dx - \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt = 0 \tag{12}$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t) \equiv 0$, $\Phi(l,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$ и условиям $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничным условиям (2) и первому начальному условию (3) в классическом смысле, а второму начальному условию (3) в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$.

Определение 4. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи II* назовем функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt - \int_0^l [\varphi_1(x)\Phi_t(x,T) - \psi_1(x)\Phi(x,T)]\,dx - \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt = 0 \tag{13}$$

для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t) \equiv 0$, $\Phi(l,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$ и условиям $\Phi(x,0) \equiv 0$, $\Phi_t(x,0) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, и которая, кроме того, удовлетворяет граничным условиям (6) и первому условию (7) в классическом смысле, а второму условию (7) в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$.

Определение 5. *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *задачи граничного управления III* назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи I с начальными условиями (3) и с такими граничными условиями (2), которые обеспечивают выполнение третьего равенства (10) в классическом смысле, а четвертого равенства (10) в смысле совпадения элементов $L_2[0,l]$.

Замечание 1. Функция $u(x,t)$, являющаяся решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III, по определению класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ имеет граничное значение $u(0,t) = \mu(t)$, обладающее обобщенной производной $u_t(0,t) = \mu'(t)$, принадлежащей классу $L_2[0 \le t \le T]$. Это означает, что граничное значение $u(0,t) = \mu(t)$ принадлежит классу $W_2^1[0,T]$. Кроме того, по определению того же класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ это граничное значение $u(0,t) = \mu(t)$ удовлетворяет условию согласования как с функцией $\varphi(x)$ из условия (10) при $t = 0$, так и с функцией $\varphi_1(x)$ из условия (10) при $t = T$, т.е. удовлетворяет первому условию (4) и первому условию (8).

Замечание 2. Для любого $T > 0$ требование принадлежности функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ классам $(*)$ и требование удовлетворения условиям закрепления $(**)$ являются *необходимыми условиями* существования решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III. Действительно, так как решение $u(x,t)$ (в случае его существования) принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, то по определению этого класса каждая из обобщенных производных первого порядка, взятых для значений $t = 0$ и $t = T$, т.е. каждая из функций $u_x(x,0) = \varphi'(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $u_x(x,T) = \varphi_1'(x)$, $u_t(x,T) = \psi_1(x)$ принадлежит классу $L_2[0,l]$. Это и означает принадлежность функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ классам $(*)$. Удовлетворение же условиям закрепления $(**)$ вытекает из определения класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ и из граничного условия (11).

В п. 1 работы [8] доказано

Утверждение 1. *Для любого $T>0$ каждая из смешанных задач I и II может иметь только одно решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.*

Определение 6. Будем говорить, что функция одной переменной $\underline{\mu}(t)$ (соответственно $\overline{\mu}(t)$) принадлежит классу $\underline{W}_2^1[0,T]$ (соответственно классу $\overline{W}_2^1[0,T]$), если эта функция определена для всех $t \le T$ (соответственно для всех $t \ge 0$), принадлежит классу $W_2^1[0,T]$ и удовлетворяет условиям $\underline{\mu}(0)=0$, $\underline{\mu}(t)\equiv 0$ для всех $t<0$ (соответственно $\overline{\mu}(T)=0$, $\overline{\mu}(t)\equiv 0$ для всех $t>T$).

Любую функцию $\mu(t)$ из класса $W_2^1[0,T]$, удовлетворяющую условию $\mu(0)=0$ (соответственно условию $\mu(T)=0$), можно превратить в функцию $\underline{\mu}(t)$ из класса $\underline{W}_2^1[0,T]$ (соответственно в функцию $\overline{\mu}(t)$ из класса $\overline{W}_2^1[0,T]$), продолжив ее тождественным нулем на значения $t<0$ (соответственно на значения $t>T$).

Рассмотрим теперь смешанную задачу I, у которой $\varphi(x)\equiv 0$ на сегменте $[0,l]$, $\psi(x)$ является нулевым элементом пространства $L_2[0,l]$, а граничное значение $\mu(t)$ — произвольная функция из класса $W_2^1[0,T]$. При этом в силу условия согласования (4) должно выполняться равенство $\mu(0)=0$, позволяющее продолжить функцию $\mu(t)$ тождественным нулем на значения $t<0$ и превратить ее в функцию $\underline{\mu}(t)$ из класса $\underline{W}_2^1[0,T]$.

Утверждение 2. *Единственное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I, у которой $\varphi(x)\equiv 0$ на сегменте $[0,l]$, $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$, а $\mu(t)$ — произвольная функция из класса $W_2^1[0,T]$, удовлетворяющая условию $\mu(0)=0$, определяется равенством*

$$u(x,t)=\underline{\mu}(t-x)-\underline{\mu}(t+x-2l) \tag{14}$$

в случае, когда $0<T\le 2l$, и равенством

$$u(x,t)=\underline{\mu}(t-x)-\underline{\mu}(t+x-2l)+\underline{\mu}(t-x-2l) \tag{15}$$

в случае, когда $0<T\le 3l$.

Доказательство. С помощью свойства функции $\underline{\mu}(t)$ быть тождественным нулем для неположительных значений аргумента тривиально проверяется, что при $0<T\le 2l$ функция (14), а при $0<T\le 3l$ функция (15) удовлетворяют граничным условиям $u(0,t)=\mu(t)$, $u(l,t)\equiv 0$ и первому начальному условию $u(x,0)\equiv 0$ в классическом смысле, а второму начальному условию $u_t(x,0)=0$ — в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$. Поэтому достаточно убедиться в том, что при $0<T\le 2l$ функция (14), а при $0<T\le 3l$ функция (15) удовлетворяют тождеству (12), в котором $\varphi(x)\equiv 0$, а $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$, т.е. тождеству

$$\int_0^l\int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt-\int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt=0 \tag{16}$$

для любой функции $\Phi(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t)\equiv 0$, $\Phi(l,t)\equiv 0$ при $0\le t\le T$ и условиям $\Phi(x,T)\equiv 0$, $\Phi_t(x,T)\equiv 0$ при $0\le x\le l$.

С помощью интегрирования по частям получим равенство

$$\int_0^l\int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt=\int_0^l\left[\int_0^T u(x,t)\Phi_{tt}(x,t)\,dt\right]dx-\int_0^T\left[\int_0^l u(x,t)\Phi_{xx}(x,t)\,dx\right]dt=$$

$$=\int_0^l[u(x,T)\Phi_t(x,T)-u(x,0)\Phi_t(x,0)]\,dx-\int_0^l\int_0^T u_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\int_0^T[u(l,t)\Phi_x(l,t)-u(0,t)\Phi_x(0,t)]\,dt+\int_0^l\int_0^T u_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt. \tag{17}$$

Так как по условию $\Phi_t(x,T) \equiv 0$, $u(x,0) = \varphi(x) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, $u(0,t) = \mu(t)$, $u(l,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$, то из (17) получим, что

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt - \int_0^T \mu(t)\Phi_x(0,t)\,dt =$$

$$= \int_0^l \int_0^T u_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt - \int_0^l \int_0^T u_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\,dt, \tag{18}$$

и нам достаточно доказать, что разность интегралов, стоящих в правой части (18), равна нулю.

Будем рассматривать случай $0 < T \le 3l$, когда $u(x,t)$ определяется соотношением (15). Из (15) получим два равенства:

$$u_x(x,t) = -\underline{\mu}'(t-x) - \underline{\mu}'(t+x-2l) - \underline{\mu}'(t-x-2l), \tag{19}$$

$$u_t(x,t) = \underline{\mu}'(t-x) - \underline{\mu}'(t+x-2l) + \underline{\mu}'(t-x-2l), \tag{20}$$

каждое из которых следует понимать или как равенство элементов $L_2[0 \le t \le T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$, или как равенство элементов $L_2[0 \le x \le l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$.

Заметим теперь, что функция

$$\underline{U}(x,t) = -\underline{\mu}(t-x) - \underline{\mu}(t+x-2l) - \underline{\mu}(t-x-2l) \tag{21}$$

одновременно является первообразной функции (19) по t при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$ и первообразной функции (20) по x при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$. Используя этот факт и интегрируя по частям, мы получим, что разность интегралов, стоящих в правой части (18), равна

$$\int_0^l \left[\int_0^T u_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right] dx - \int_0^T \left[\int_0^l u_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right] dt =$$

$$= \int_0^l [\underline{U}(x,T)\Phi_x(x,T) - \underline{U}(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx - \int_0^l \int_0^T \underline{U}(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int_0^T [\underline{U}(l,t)\Phi_t(l,t)\,dt - \underline{U}(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dt + \int_0^l \int_0^T \underline{U}(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt. \tag{22}$$

Правая часть (22) равна нулю, ибо стоящие в ней двойные интегралы взаимно уничтожаются, а все остальные слагаемые равны нулю вследствие того, что $\Phi_t(0,t) \equiv 0$, $\Phi_t(l,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$, $\Phi_x(x,T) \equiv 0$ и $\underline{U}(x,0) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$.

Тем самым для случая $0 < T \le 3l$ утверждение 2 доказано. Случай $0 < T \le 2l$ отдельного рассмотрения не требует, ибо для этого случая последние слагаемые в правых частях каждого из соотношений (15), (19), (20) и (21) равны нулю для всех $0 \le x \le l$ и всех $0 \le t \le T \le 2l$. Утверждение 2 полностью доказано.

Рассмотрим теперь смешанную задачу II, в которой $\varphi_1(x) \equiv 0$ на сегменте $[0,l]$, $\psi_1(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$, а граничное значение $u(0,t) = \mu(t)$ — произвольная функция из класса $W_2^1[0,T]$. При этом в силу первого условия согласования (8) должно выполняться равенство $\mu(T) = 0$, позволяющее продолжить функцию $\mu(t)$ тождественным нулем на значения $t > T$ и превратить ее в функцию $\overline{\mu}(t)$ из класса $\overline{W}_2^1[0,T]$.

Утверждение 3. *Единственное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи II, у которой $\varphi_1(x) \equiv 0$ на сегменте $[0,l]$, $\psi_1(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$,* *а $\mu(t)$ — произвольная функция из класса $W_2^1[0,T]$, удовлетворяющая условию $\mu(T)=0$, определяется равенством*

$$u(x,t)=\overline{\mu}(t+x)-\overline{\mu}(t-x+2l) \tag{23}$$

в случае, когда $0<T\le 2l$, и равенством

$$u(x,t)=\overline{\mu}(t+x)-\overline{\mu}(t-x+2l)+\overline{\mu}(t+x+2l) \tag{24}$$

в случае, когда $0<T\le 3l$.

Доказательство. С помощью свойства функции $\overline{\mu}(t)$ быть тождественным нулем для всех значений аргумента t, удовлетворяющих условию $t\ge T$, тривиально проверяется, что при $0<T\le 2l$ функция (23), а при $0<T\le 3l$ функция (24) удовлетворяют граничным условиям $u(0,t)=\mu(t)$, $u(l,t)\equiv 0$ и первому условию при $t=T$ вида $u(x,T)\equiv 0$ в классическом смысле, а второму условию при $t=T$ вида $u_t(x,T)\equiv 0$ — в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$. Поэтому достаточно убедиться в том, что при $0<T\le 2l$ функция (23), а при $0<T\le 3l$ функция (24) удовлетворяют тождеству (13), в котором $\varphi_1(x)\equiv 0$, а $\psi_1(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$, т.е. тождеству (16) для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi(0,t)\equiv 0$, $\Phi(l,t)\equiv 0$ при $0\le t\le T$ и условиям $\Phi(x,0)\equiv 0$, $\Phi_t(x,0)\equiv 0$ при $0\le x\le l$.

Обращаясь к полученной интегрированием по частям формуле (17), заметим, что в силу условий $u(x,T)\equiv 0$, $\Phi_t(x,0)\equiv 0$ при $0\le x\le l$ и условий $u(0,t)=\mu(t)$, $u(l,t)\equiv 0$ при $0\le t\le T$ формула (17) переходит в равенство (18), и нам достаточно доказать, что разность интегралов, стоящих в правой части (18), равна нулю.

Будем рассматривать случай $0<T\le 3l$, когда $u(x,t)$ определяется соотношением (24). Из (24) получим два равенства:

$$u_x(x,t)=\overline{\mu}'(t+x)+\overline{\mu}'(t-x+2l)+\overline{\mu}'(t+x+2l), \tag{25}$$

$$u_t(x,t)=\overline{\mu}'(t+x)-\overline{\mu}'(t-x+2l)+\overline{\mu}'(t+x+2l), \tag{26}$$

каждое из которых следует понимать или как равенство элементов $L_2[0\le t\le T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$, или как равенство элементов $L_2[0\le x\le l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$.

Заметим далее, что функция

$$\overline{U}(x,t)=\overline{\mu}(t+x)+\overline{\mu}(t-x+2l)+\overline{\mu}(t+x+2l) \tag{27}$$

одновременно является первообразной функции (25) по t при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$ и первообразной функции (26) по x при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$. Используя этот факт и интегрируя по частям, мы получим, что разность интегралов, стоящих в правой части (18), равна

$$\int_0^l\left[\int_0^T u_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right]dx-\int_0^T\left[\int_0^l u_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right]dt=$$

$$=\int_0^l[\overline{U}(x,T)\Phi_x(x,T)-\overline{U}(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx-\int_0^l\int_0^T\overline{U}(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\int_0^T[\overline{U}(l,t)\Phi_t(l,t)\,dt-\overline{U}(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dt+\int_0^l\int_0^T\overline{U}(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt. \tag{28}$$

Правая часть (28) равна нулю, ибо стоящие в ней двойные интегралы взаимно уничтожаются, а все остальные слагаемые равны нулю вследствие того, что $\Phi_t(0,t)\equiv 0$, $\Phi_t(l,t)\equiv 0$ при $0\le t\le T$, $\Phi_x(x,0)\equiv 0$, $\overline{U}(x,T)\equiv 0$ при $0\le x\le l$.

Тем самым для случая $0 < T \le 3l$ утверждение 3 доказано. Случай $0 < T \le 2l$ отдельного рассмотрения не требует, ибо для этого случая последние слагаемые в правых частях каждого из соотношений (24) — (27) равны нулю для всех $0 \le x \le l$ и всех $0 \le t \le T \le 2l$. Утверждение 3 полностью доказано.

Утверждение 4. *Для любого T, удовлетворяющего неравенствам $0 < T \le 2l$, может существовать только одно решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III.*

Доказательство. Предположив, что существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III, мы получим, что их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{29}$$

$$u(x,0) \equiv 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(x,T) \equiv 0, \quad u_t(x,T) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l, \tag{30}$$

$$u(l,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T. \tag{31}$$

В силу замечания 1 решение $u(x,t)$ этой задачи имеет при $x = 0$ след $u(0,t) = \mu(t)$, принадлежащий классу $W_2^1[0,T]$ и удовлетворяющий условию согласования $\mu(0) = 0$. Это последнее условие позволяет продолжить функцию $\mu(t)$ тождественным нулем на значения $t < 0$ и превратить ее в функцию $\underline{\mu}(t)$ из класса $\underline{W}_2^1[0,T]$.

Заметим теперь, что функция $u(x,t)$, являющаяся решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления (29) — (31), является единственным решением из того же класса смешанной задачи типа I

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad Q_T, \\ u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T, \quad u(x,0) \equiv 0, \quad u_t(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le l, \end{gathered} \tag{32}$$

и потому в силу утверждения 2 и условия $0 < T \le 2l$ может быть представлена в виде (14).

Из (14) вытекает справедливость для любого фиксированного t из сегмента $[0,T]$ следующего понимаемого в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$ соотношения

$$u_t(x,t) = \underline{\mu}'(t-x) - \underline{\mu}'(t+x-2l). \tag{33}$$

Полагая в соотношениях (14) и (33) $t = T$ и используя равенства (30), получим соотношения

$$\underline{\mu}(T-x) - \underline{\mu}(T+x-2l) = 0, \tag{34}$$

$$\underline{\mu}'(T-x) - \underline{\mu}'(T+x-2l) = 0, \tag{35}$$

первое из которых справедливо для всех x из $[0,l]$, а второе является равенством элементов $L_2[0,l]$.

Дифференцируя равенство (34), получим справедливое в смысле совпадения элементов $L_2[0,l]$ соотношение

$$-\underline{\mu}'(T-x) - \underline{\mu}'(T+x-2l) = 0. \tag{36}$$

Из (35) и (36) вытекает, что $\underline{\mu}'(T-x)$ и $\underline{\mu}'(T+x-2l)$ являются нулевыми элементами $L_2[0 \le x \le l]$, откуда следует, что для всех x из $[0,l]$

$$\underline{\mu}(T-x) \equiv C_1 = \text{const}, \quad \underline{\mu}(T+x-2l) \equiv C_2 = \text{const}. \tag{37}$$

Сопоставляя равенства (37) с соотношениями $\underline{\mu}(T) = 0$, $\underline{\mu}(t) \equiv 0$ при $t \le 0$, мы получим, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, откуда с помощью (37) получим, что для любого T, удовлетворяющего условию $0 < T \le 2l$, соотношение $\mu(t) \equiv 0$ справедливо для всех t из $[0,T]$.

Таким образом, функция $u(x,t)$ является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи (32), у которой $\mu(t) \equiv 0$ на $[0,T]$. В силу утверждения 1 решение $u(x,t)$ такой задачи тождественно равно нулю. Утверждение 4 доказано.

2. Формулировка основных результатов.

Теорема 1. *Для любого T, удовлетворяющего неравенствам $0 < T < 2l$, необходимыми условиями существования (единственного!) решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III являются следующие три требования:*

1) принадлежность функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ классам $(*)$;

2) удовлетворение условиям закрепления $(**)$;

3) удовлетворение функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$

а) для случая $0 < T < l$ трем тождествам:

$$\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(t+T) - \varphi(t+T) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le l - T, \tag{38}$$

$$\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(2l-T-t) + \varphi(2l-T-t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad l - T \le t \le l, \tag{39}$$

$$\widehat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(t-T) + \varphi(t-T) \equiv 0 \quad \text{при} \quad T \le t \le l, \tag{40}$$

в которых символами $\widehat{\psi}(x)$ и $\widehat{\psi}_1(x)$ обозначены первообразные функций $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ соответственно, удовлетворяющие при произвольном фиксированном t_0 из сегмента $[T,l]$ соотношению

$$\widehat{\psi}_1(t_0) - \varphi_1(t_0) - \widehat{\psi}(t_0 - T) + \varphi(t_0 - T) = 0; \tag{41}$$

б) для случая $l \le T < 2l$ тождеству

$$\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(2l-T-t) + \varphi(2l-T-t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le 2l - T, \tag{42}$$

в котором символами $\widehat{\psi}(x)$ и $\widehat{\psi}_1(x)$ обозначены первообразные функций $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ соответственно, удовлетворяющие при произвольном фиксированном t_0 из сегмента $[0, 2l-T]$ соотношению

$$\widehat{\psi}_1(t_0) + \varphi_1(t_0) - \widehat{\psi}(2l-T-t_0) + \varphi(2l-T-t_0) = 0. \tag{43}$$

Для $T = 2l$ необходимыми условиями существования единственного решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III являются только требования 1) и 2).

Теорема 2. *Для любого T из интервала $0 < T < 2l$ требования 1), 2) и 3) теоремы 1, а для $T = 2l$ требования 1) и 2) этой теоремы являются не только необходимыми, но и достаточными условиями существования единственного решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III. При выполнении этих требований решение $u(x,t)$ указанной задачи равно*

$$u(x,t) = F(t+x) - F(t-x+2l), \tag{44}$$

где функция $F(t)$ определяется выражениями

$$(1/2)[\widehat{\psi}(t) + \varphi(t)] \quad \text{при} \quad 0 \le t \le l, \tag{45}$$

$$(1/2)[\widehat{\psi}(2l-t) - \varphi(2l-t)] \quad \text{при} \quad l \le t \le 2l, \tag{46}$$

$$(1/2)[\widehat{\psi}_1(t-T) + \varphi_1(t-T)] \quad \text{при} \quad T \le t \le T + l, \tag{47}$$

$$(1/2)[\widehat{\psi}_1(2l+T-t) - \varphi_1(2l+T-t)] \quad \text{при} \quad T + l \le t \le T + 2l, \tag{48}$$

в которых символы $\widehat{\psi}(x)$ и $\widehat{\psi}_1(x)$ обозначают первообразные функций $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ соответственно, удовлетворяющие в случае $0 < T < l$ при любом фиксированном t_0 из сегмента $[T,l]$ соотношению (41), в случае $l \le T < 2l$ при любом фиксированном t_0 из сегмента $[0, 2l-T]$ соотношению (43), а в случае $T = 2l$ соотношению

$$\widehat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \widehat{\psi}(0) + \varphi(0) = 0. \tag{49}$$

При этом при тех же значениях символов $\widehat{\psi}(x)$ и $\widehat{\psi}_1(x)$ граничное управление $u(0,t) = \mu(t)$, переводящее процесс колебаний из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x),\ u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$, имеет вид:

а) в случае $0 < T < l$

$$\mu(t) = (1/2)[\widehat{\psi}(t) + \varphi(t) - \widehat{\psi}_1(T-t) + \varphi_1(T-t)], \tag{50}$$

б) в случае $l \leq T < 2l$

$$\mu(t) = \begin{cases} (1/2)[\widehat{\psi}(t) + \varphi(t) - \widehat{\psi}_1(2l - T + t) - \varphi_1(2l - T + t)] & \textit{при} \ \ 0 \leq t \leq T - l, \\ (1/2)[\widehat{\psi}(t) + \varphi(t) - \widehat{\psi}_1(T - t) + \varphi_1(T - t)] & \textit{при} \ \ T - l \leq t \leq l, \\ (1/2)[\widehat{\psi}(2l - t) - \varphi(2l - t) - \widehat{\psi}_1(T - t) + \varphi_1(T - t)] & \textit{при} \ \ l \leq t \leq T, \end{cases} \tag{51}$$

в) в случае $T = 2l$

$$\mu(t) = \begin{cases} (1/2)[\widehat{\psi}(t) + \varphi(t) - \widehat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t)] & \textit{при} \ \ 0 \leq t \leq l, \\ (1/2)[\widehat{\psi}(2l - t) - \varphi(2l - t) - \widehat{\psi}_1(2l - t) + \varphi_1(2l - t)] & \textit{при} \ \ l \leq t \leq 2l. \end{cases} \tag{52}$$

Замечание к теореме 2. Подчеркнем, что при $T = 2l$ для совершенно произвольных четырех функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, принадлежащих классам $(*)$ и удовлетворяющих условиям закрепления $(**)$, существует единственное решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III, т.е. существует единственное граничное управление $u(0,t) = \mu(t)$, обеспечивающее переход процесса колебаний из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x), \ u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$.

Теорема 3. *Если T удовлетворяет неравенствам $2l < T \leq 3l$, то для произвольных четырех функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, принадлежащих классам $(*)$ и удовлетворяющих условиям закрепления $(**)$, существует решение $u(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III, т. е существует граничное управление $u(0,t) = \mu(t)$, переводящее процесс колебаний из состояния $\{u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x), u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$. Эти решение и граничное управление определяются неоднозначно и имеют вид $u(x,t) = \overline{u}(x,t) + \underline{u}(x,t)$, $u(0,t) = \mu(t) = \overline{\mu}(t) + \underline{\mu}(t)$, где*

$$\overline{\mu}(t) = \begin{cases} -v(t + 2l) + (1/2)[\widehat{\psi}(t) + \varphi(t)] & \textit{при} \ \ 0 \leq t \leq T - 2l, \\ (1/2)[\widehat{\psi}(t) + \varphi(t)] & \textit{при} \ \ T - 2l \leq t \leq l, \\ (1/2)[\widehat{\psi}(2l - t) - \varphi(2l - t)] & \textit{при} \ \ l \leq t \leq 2l, \\ v(t) & \textit{при} \ \ 2l \leq t \leq T, \\ 0 & \textit{при} \ \ t \geq T, \end{cases} \tag{53}$$

$$\underline{\mu}(t) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \ \ t \leq 0, \\ w(t) & \textit{при} \ \ 0 \leq t \leq T - 2l, \\ -(1/2)[\widehat{\psi}_1(2l - T + t) + \varphi_1(2l - T + t)] & \textit{при} \ \ T - 2l \leq t \leq T - l, \\ -(1/2)[\widehat{\psi}_1(T - t) - \varphi_1(T - t)] & \textit{при} \ \ T - l \leq t \leq 2l, \\ -w(t - 2l) - (1/2)[\widehat{\psi}_1(T - t) - \varphi_1(T - t)] & \textit{при} \ \ 2l \leq t \leq T, \end{cases} \tag{54}$$

символы $\widehat{\psi}(x)$ и $\widehat{\psi}_1(x)$ обозначают совершенно произвольные первообразные функций $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ соответственно, $v(t)$ — произвольная функция из класса $W_2^1[2l,T]$, удовлетворяющая условиям $v(2l) = (1/2)[\widehat{\psi}(0) - \varphi(0)]$, $v(T) = 0$, $w(t)$ — произвольная функция из класса $W_2^1[0, T - 2l]$, удовлетворяющая условиям $w(0) = 0$, $w(T - 2l) = -(1/2)[\widehat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0)]$,

$$\overline{u}(x,t) = \overline{\mu}(t + x) - \overline{\mu}(t - x + 2l) + \overline{\mu}(t + x + 2l), \tag{55}$$

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\mu}(t - x) - \underline{\mu}(t + x - 2l) + \underline{\mu}(t - x - 2l). \tag{56}$$

Заключительное замечание. Важными частными случаями общей задачи граничного управления III, для которой сформулированы теоремы 1 — 3, являются задача о полном успокоении с помощью граничного управления процесса колебаний (отвечающая случаю, когда $\varphi_1(x) \equiv 0$ на $[0,l]$, а $\psi_1(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$) и задача о приведении с помощью граничного управления первоначально покоящейся системы в наперед заданное состояние (отвечающая случаю, когда $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0,l]$, а $\psi(x)$ — нулевой элемент $L_2[0,l]$). Сформулированные теоремы позволяют провести полный анализ этих задач.

3. Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что для любого $T > 0$ необходимость требований 1) и 2), т.е. требований принадлежности функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ классам $(*)$ и удовлетворения условиям закрепления $(**)$, уже обоснована нами в замечании 2 п. 1.

Таким образом, нам остается обосновать необходимость для любого T из интервала $0 < T < 2l$ требования 3). Мы сначала рассмотрим частный случай, когда в задаче граничного управления III $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, а $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0, l]$. В этом случае решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III (в случае, если оно существует) в силу замечания 1 из п. 1 имеет при $x = 0$ граничное значение $u(0, t) = \mu(t)$, принадлежащее классу $W_2^1[0, T]$ и удовлетворяющее условию согласования $\mu(0) = 0$. Это позволяет утверждать, что решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III является одновременно решением из того же класса смешанной задачи I, у которой $u(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) \equiv 0$ на $0 \le t \le T$, $\varphi(x) \equiv 0$ на $0 \le x \le l$, а $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0, l]$, а единственное решение этой последней задачи в силу утверждения 2 из п. 2 представляется в виде (14), где $\underline{\mu}(t)$ — построенная по $\mu(t)$ функция из класса $\underline{W}_2^1[0, T]$.

Сначала будем рассматривать подслучай $0 < T < l$. Для него второй член в правой части (14) является тождественным нулем для всех $0 \le x \le l$ и всех $0 \le t \le T$ и равенство (14) приобретает вид

$$u(x, t) = \underline{\mu}(t - x). \tag{57}$$

Из (57) вытекает соотношение

$$u_t(x, t) = \underline{\mu}'(t - x), \tag{58}$$

которое следует понимать как равенство элементов $L_2[0, l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0, T]$.

При $t = T$ из (57) и (58) мы получим два соотношения:

$$u(x, T) = \varphi_1(x) = \underline{\mu}(T - x), \tag{59}$$

$$u_t(x, T) = \psi_1(x) = \underline{\mu}'(T - x), \tag{60}$$

первое из которых справедливо для всех x из $[0, l]$, а второе является равенством элементов $L_2[0, l]$. Дифференцируя (59) по x, мы получим соотношение

$$\varphi_1'(x) = -\underline{\mu}'(T - x), \tag{61}$$

которое также является равенством элементов $L_2[0, l]$. Из (60) и (61) вытекает справедливое в смысле равенства элементов $L_2[0, l]$ соотношение

$$\psi_1(x) + \varphi_1'(x) = 0. \tag{62}$$

Зафиксировав произвольное число t_0 из сегмента $[0, l]$ и обозначив через t произвольную точку этого сегмента, мы получим, интегрируя (62) по x в пределах от t_0 до t, следующее справедливое для всех t из сегмента $[0, l]$ соотношение:

$$\widehat{\psi}_1(t) - \widehat{\psi}_1(t_0) + \varphi_1(t) - \varphi_1(t_0) = 0, \tag{63}$$

в котором символом $\widehat{\psi}_1(t)$ обозначена пока произвольная первообразная функции $\psi_1(t)$. Если мы потребуем, чтобы эта первообразная удовлетворяла условию

$$\widehat{\psi}_1(t_0) + \varphi_1(t_0) = 0, \tag{64}$$

то получим справедливое для всех t из сегмента $[0, l]$ тождество

$$\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) \equiv 0, \tag{65}$$

в котором символ $\widehat{\psi}_1(t)$ обозначает первообразную функции $\psi_1(t)$, удовлетворяющую при произвольном фиксированном t_0 из сегмента $[0, l]$ соотношению (64).

Заметим теперь, что для всех x из сегмента $[T, l]$ в правых частях (60) и (61) стоит нулевой элемент $L_2[T, l]$. Поэтому при всех x из $[T, l]$ справедливо соотношение

$$\psi_1(x) - \varphi_1'(x) = 0, \tag{66}$$

которое также является равенством элементов $L_2[T, l]$. Обозначая на этот раз через t_0 произвольное фиксированное число из сегмента $[T, l]$, а через t любое число из этого сегмента и интегрируя (66) по x в пределах от t_0 до t, мы получим, что для всех t из сегмента $[T, l]$ справедливо тождество

$$\widehat{\psi}_1(t) - \widehat{\psi}_1(t_0) - \varphi_1(t) + \varphi_1(t_0) \equiv 0, \tag{67}$$

в котором $\widehat{\psi}_1(t)$ — пока произвольная первообразная функции $\psi_1(t)$. Заметим попутно, что из соотношений (62) и (66) вытекает, что функция $\varphi_1'(x)$ является нулевым элементом $L_2[T, l]$, откуда следует, что $\varphi_1(x) \equiv C = \text{const}$ на сегменте $[T, l]$, и поскольку $\varphi_1(l) = 0$, то $C = 0$ и $\varphi_1(x) \equiv 0$ на сегменте $[T, l]$. В частности, для любой фиксированной точки t_0 из сегмента $[T, l]$ справедливо равенство

$$\varphi_1(t_0) = 0. \tag{68}$$

Если мы теперь потребуем, чтобы фигурирующая в (67) первообразная $\widehat{\psi}_1(t)$ для некоторого произвольного фиксированного t_0 из $[T, l]$ удовлетворяла соотношению

$$\widehat{\psi}_1(t_0) - \varphi_1(t_0) = 0, \tag{69}$$

то из (67) получим справедливое для всех t из сегмента $[T, l]$ тождество

$$\widehat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) \equiv 0. \tag{70}$$

Остается заметить, что в силу (68) соотношения (64) и (69), записанные для произвольного фиксированного t_0 из сегмента $[T, l]$, эквивалентны между собой. Поэтому для рассматриваемого подслучая $0 < T < l$ мы можем утверждать справедливость двух тождеств (65) и (70), в которых символом $\widehat{\psi}_1(t)$ обозначена первообразная функции $\psi_1(t)$, удовлетворяющая при произвольном фиксированном t_0 из сегмента $[T, l]$ соотношению

$$\widehat{\psi}_1(t_0) - \varphi_1(t_0) \equiv 0. \tag{71}$$

Рассмотрение подслучая $0 < T < l$ завершено, и мы переходим к рассмотрению подслучая $l \le T < 2l$.

На этот раз из (14) мы получим соотношение (33), являющееся равенством элементов $L_2[0 \le x \le l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0, T]$. При $t = T$ из (14) и (33) мы получим два соотношения:

$$u(x, T) = \varphi_1(x) = \underline{\mu}(T - x) - \underline{\mu}(T + x - 2l), \tag{72}$$

$$u_t(x, T) = \psi_1(x) = \underline{\mu}'(T - x) - \underline{\mu}'(T + x - 2l), \tag{73}$$

первое из которых справедливо для всех x из $[0, l]$, а второе является равенством элементов $L_2[0, l]$. Зафиксировав произвольное число t_0 из сегмента $[0, 2l - T]$, обозначив через t любую точку этого сегмента и проинтегрировав (73) по x в пределах от t_0 до t, мы получим, что для любого t из сегмента $[0, 2l - T]$ справедливо соотношение

$$\widehat{\psi}_1(t) - \widehat{\psi}_1(t_0) = \underline{\mu}(T - t_0) - \underline{\mu}(T - t) - \underline{\mu}(T + t - 2l) + \underline{\mu}(T + t_0 - 2l), \tag{74}$$

в котором символ $\widehat{\psi}_1(t)$ обозначает пока произвольную первообразную функции $\psi_1(t)$. Заметим теперь, что так как оба числа t и t_0 лежат на сегменте $[0, 2l - T]$, то

$$\underline{\mu}(T + t - 2l) = 0, \quad \underline{\mu}(T + t_0 - 2l) = 0, \tag{75}$$

и поэтому из соотношения (72), взятого при $x = t$ и $x = t_0$, вытекает, что

$$\underline{\mu}(T-t) = \varphi_1(t), \quad \underline{\mu}(T-t_0) = \varphi_1(t_0). \tag{76}$$

Из (74), (75) и (76) вытекает, что для любого t из сегмента $[0, 2l-T]$ и произвольного фиксированного t_0 из этого сегмента справедливо тождество

$$\widehat{\psi}_1(t) - \widehat{\psi}_1(t_0) - \varphi_1(t_0) + \varphi_1(t) \equiv 0. \tag{77}$$

Из (77) вытекает, что если через $\widehat{\psi}_1(t)$ обозначить ту первообразную функции $\psi_1(t)$, которая удовлетворяет при произвольном фиксированном t_0 из сегмента $[0, 2l-T]$ соотношению вида (64), то для всех t из сегмента $[0, 2l-T]$ будет справедливо тождество (65).

Итак, для подслучая $l \le T < 2l$ на сегменте $[0, 2l-T]$ будет справедливо тождество (65), в котором символ $\widehat{\psi}_1(t)$ обозначает первообразную функции $\psi_1(t)$, удовлетворяющую при произвольном фиксированном t_0 из сегмента $[0, 2l-T]$ соотношению (64). Тем самым для частного случая, когда $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, а $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0, l]$, необходимость требования 3) теоремы 1 доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\varphi(x)$ является произвольной функцией из класса $W_2^1[0, l]$, удовлетворяющей условию закрепления $\varphi(l) = 0$, а $\psi(x)$ — произвольный элемент $L_2[0, l]$.

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сначала на сегмент $[l, 2l]$ нечетно относительно точки $x = l$, а затем на сегмент $[-l, 0]$ в подслучае $0 < T < l$ и на сегменты $[-2l, 0]$ и $[2l, 3l]$ в подслучае $l \le T < 2l$ так, чтобы $\varphi(x) \in W_2^1[-l, 2l]$, $\psi(x) \in L_2[-l, 2l]$ в подслучае $0 < T < l$ и $\varphi(x) \in W_2^1[-2l, 3l]$, $\psi(x) \in L_2[-2l, 3l]$ в подслучае $l \le T < 2l$ и в этом последнем подслучае функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ оставались нечетными относительно точки $x = l$ в пределах сегмента $[-l, 3l]$.

С так продолженными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ рассмотрим функцию

$$v(x,t) = (1/2)[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] + (1/2)[\widehat{\psi}(x+t) - \widehat{\psi}(x-t)], \tag{78}$$

в выражении для которой символ $\widehat{\psi}(x)$ обозначает пока произвольную первообразную функции $\psi(x)$. Заметим, что эта первообразная $\widehat{\psi}(x)$ будет четной относительно точки $x = l$ функцией в пределах сегмента $[0, 2l]$ в подслучае $0 < T < l$ и в пределах сегмента $[-l, 3l]$ в подслучае $l \le T < 2l$.

Тривиально проверяется, что функция (78) в обоих случаях является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи типа I, у которой $v(x, 0) = \varphi(x)$ на сегменте $[0, l]$, $v_t(x, 0) = \psi(x)$ в смысле совпадения элементов $L_2[0, l]$, $v(l, t) \equiv 0$ для всех t из сегмента $[0, T]$, а граничное значение $v(0, t)$ берется из выражения (78). Нужно только убедиться в том, что функция (78) удовлетворяет тождеству (12), в котором $u(x, t)$ и $\mu(t)$ заменены соответственно на $v(x, t)$ и $v(0, t)$, для произвольной функции $\Phi(x, t)$ из определения 3 п. 1.

Пользуясь равенством (17), в котором $u(x, t)$ заменено на $v(x, t)$, мы получим, что достаточно для любой функции $\Phi(x, t)$ из определения 3 доказать справедливость соотношения

$$\int_0^l \int_0^T v_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt - \int_0^l \int_0^T v_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\,dt = \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx. \tag{79}$$

Для доказательства справедливости (79) воспользуемся тем, что в силу (78) справедливы соотношения

$$v_x(x,t) = (1/2)[\varphi'(x+t) + \varphi'(x-t)] + (1/2)[\psi(x+t) - \psi(x-t)], \tag{80}$$

$$v_t(x,t) = (1/2)[\varphi'(x+t) - \varphi'(x-t)] + (1/2)[\psi(x+t) + \psi(x-t)], \tag{81}$$

каждое из которых следует рассматривать или как равенство элементов $L_2[0 \le x \le l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0, T]$, или как равенство элементов $L_2[0 \le t \le T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0, l]$.

Но тогда функция

$$\widehat{V}(x,t) = (1/2)[\varphi(x+t) - \varphi(x-t)] + (1/2)[\widehat{\psi}(x+t) + \widehat{\psi}(x-t)] \tag{82}$$

является одновременно первообразной функции (80) по t при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$ и первообразной функции (81) по x при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$.

Опираясь на этот факт и интегрируя по частям, мы получим, что левая часть (79) равна

$$\int_0^l \left[\int_0^T v_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right]dx - \int_0^T \left[\int_0^l v_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right]dt =$$

$$= \int_0^l [\widehat{V}(x,T)\Phi_x(x,T)\,dx - \widehat{V}(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx - \int_0^l\int_0^T \widehat{V}(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int_0^T [\widehat{V}(l,t)\Phi_t(l,t)\,dt - \widehat{V}(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dt + \int_0^l\int_0^T \widehat{V}(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt$$

и вследствие взаимного уничтожения двойных интегралов и соотношений $\Phi_t(l,t) \equiv 0$, $\Phi_t(0,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$ и $\Phi_x(x,T) \equiv 0$, $\widehat{V}(x,0) = \widehat{\psi}(x)$ при $0 \le x \le l$ равна

$$-\int_0^l \widehat{\psi}(x)\Phi_x(x,0)\,dx = \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx.$$

Справедливость соотношения (79) установлена, т.е. доказано, что функция (78) в обоих подслучаях является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи типа I, у которой $v(x,0) = \varphi(x)$ на сегменте $[0,l]$, $v_t(x,0) = \psi(x)$ в смысле совпадения элементов $L_2[0,l]$, $v(l,t) \equiv 0$ на $[0,T]$, а $v(0,t)$ берется из выражения (78).

Но тогда разность $[u(x,t) - v(x,t)]$ будет удовлетворять всем требованиям рассмотренного выше частного случая, ибо для нее $[u(x,0) - v(x,0)] \equiv 0$ на $[0,l]$, а $[u_t(x,0) - v_t(x,0)]$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$. Отсюда следует, что для этой разности будут справедливы тождества вида (65) и (70) с условием (71) для определения первообразной в подслучае $0 < T < l$ и тождество вида (65) с условием для определения первообразной (64) в подслучае $l \le T < 2l$.

Эти тождества имеют вид:

а) в случае $0 < T < l$

$$[\widehat{\psi}_1(t) - \widehat{V}(t,T)] + [\varphi_1(t) - v(t,T)] \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le l, \tag{83}$$

$$[\widehat{\psi}_1(t) - \widehat{V}(t,T)] - [\varphi_1(t) - v(t,T)] \equiv 0 \quad \text{при} \quad T \le t \le l \tag{84}$$

со справедливым для любого фиксированного t_0 из сегмента $[T,l]$ соотношением

$$[\widehat{\psi}_1(t_0) - \widehat{V}(t_0,T)] - [\varphi_1(t_0) - v(t_0,T)] = 0, \tag{85}$$

б) в случае $l \le T < 2l$

$$[\widehat{\psi}_1(t) - \widehat{V}(t,T)] + [\varphi_1(t) - v(t,T)] \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le 2l - T \tag{86}$$

со справедливым для любого фиксированного t_0 из сегмента $[0, 2l-T]$ соотношением

$$[\widehat{\psi}_1(t_0) - \widehat{V}(t_0,T)] + [\varphi_1(t_0) - v(t_0,T)] = 0. \tag{87}$$

Из равенств (78) и (82) вытекают соотношения $\widehat{V}(t,T) + v(t,T) = \widehat{\psi}(t+T) + \varphi(t+T)$, $-\widehat{V}(t,T) + v(t,T) = -\widehat{\psi}(t-T) + \varphi(t-T)$, которые позволяют переписать (83) — (87) в виде:

$$\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(t+T) - \varphi(t+T) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le l, \tag{83'}$$

$$\widehat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(t-T) + \varphi(t-T) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le T \tag{84'}$$

со справедливым для любого фиксированного t_0 из сегмента $[T, l]$ соотношением

$$\widehat{\psi}_1(t_0) - \varphi_1(t_0) - \widehat{\psi}(t_0 - T) + \varphi(t_0 - T) = 0, \tag{85'}$$

$$\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(t+T) - \varphi(t+T) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le 2l - T \tag{86'}$$

со справедливым для любого фиксированного t_0 из сегмента $[0, 2l - T]$ соотношением

$$\widehat{\psi}_1(t_0) + \varphi_1(t_0) - \widehat{\psi}(t_0 + T) - \varphi(t_0 + T) = 0. \tag{87'}$$

Теперь для установления справедливости соотношений (38) — (42), т.е. для завершения доказательства теоремы 1, нам остается заметить, что так как относительно точки $x = l$ функция $\varphi(x)$ является нечетной, а функция $\widehat{\psi}(x)$ — четной, то всякий раз, когда аргумент $t + T$ или $t_0 + T$ больше или равен l, справедливы равенства $\varphi(t+T) = -\varphi(2l - T - t)$, $\widehat{\psi}(t+T) = \widehat{\psi}(2l - T - t)$. Отсюда следует, что тождество (83′) должно быть переписано в виде двух тождеств: $\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(t+T) - \varphi(t+T) \equiv 0$ при $0 \le t \le l - T$, $\widehat{\psi}_1(t) + {}$ $+\varphi_1(t) - \widehat{\psi}(2l - T - t) + \varphi(2l - T - t) \equiv 0$ при $l - T \le t \le l$, а тождество (86′) и соотношение (87′), отвечающие случаю $l \le T < 2l$, когда аргумент $t + T$ или $t_0 + T$ всегда больше или равен l, должны быть переписаны в виде $\widehat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \widehat{\psi}(2l - T - t) + \varphi(2l - T - t) \equiv 0$ при $0 \le t \le 2l - T$ со справедливым для любого фиксированного t_0 из сегмента $[0, 2l - T]$ соотношением $\widehat{\psi}_1(t_0) + \varphi_1(t_0) - \widehat{\psi}(2l - T - t_0) + \varphi(2l - T - t_0) = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Для того чтобы доказать, что функция $u(x,t)$, определяемая равенством (44), принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, достаточно убедиться в том, что функция $F(t)$, определяемая соотношениями (45) — (48), принадлежит классу $W_2^1[0, T + 2l]$. Соотношения (45) — (48) позволяют утверждать, что функция $F(t)$ принадлежит классу W_2^1 на каждом из сегментов $[0, l]$, $[l, 2l]$, $[T, T + l]$, $[T + l, T + 2l]$.

Поэтому в случае $0 < T < l$, когда $0 < T < l < T + l < 2l < T + 2l$, для доказательства принадлежности $F(t)$ классу $W_2^1[0, T + 2l]$ достаточно убедиться в том, что: 1) значения $F(t)$, определяемые равенствами (45) и (47), совпадают между собой при $T \le t \le l$; 2) значения $F(t)$, определяемые равенствами (46) и (47), совпадают между собой при $l \le t \le T + l$; 3) значения $F(t)$, определяемые равенствами (46) и (48), совпадают между собой при $T + l \le t \le 2l$, но это сразу вытекает из тождеств (38) — (40).

В случае $l \le T \le 2l$, когда $0 < l \le T \le 2l \le T + l \le 3l \le T + 2l$, для доказательства принадлежности $F(t)$ классу $W_2^1[0, T + 2l]$ достаточно убедиться в том, что: 1) значения $F(l)$, определяемые из равенств (45) и (46), совпадают между собой; 2) значения $F(T + l)$, определяемые из равенств (47) и (48), совпадают между собой; 3) в случае $l \le T < 2l$ значения $F(t)$, определяемые из равенств (46) и (47), совпадают между собой при $T \le t \le 2l$; 4) в случае $T = 2l$ значения $F(2l)$, определяемые из равенств (46) и (47), совпадают между собой, но 1) и 2) проверяются непосредственно из соотношений (45) — (48), справедливость 3) сразу вытекает из тождества (42), а справедливость 4) — из соотношения (49).

Итак, $F(t)$ принадлежит классу $W_2^1[0, T + 2l]$ и потому функция $u(x,t)$, определяемая равенством (44), принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

С помощью соотношений (45) — (48) тривиально проверяется, что для всех x из $[0, l]$ справедливы равенства $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(x, T) = \varphi_1(x)$ и в смысле совпадения элементов $L_2[0, l]$ справедливы равенства $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $u_t(x, T) = \psi_1(x)$.

Остается доказать, что для функции $u(x,t)$, определяемой равенством (44), при $\mu(t) = {}$ $= u(0, t)$ справедливо тождество (12) для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из определения 3. В силу равенства (17) достаточно доказать соотношение

$$\int_0^l \int_0^T u_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt - \int_0^l \int_0^T u_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\,dt = \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx. \tag{88}$$

Для доказательства справедливости (88) воспользуемся тем, что в силу (44) справедливы соотношения

$$u_x(x,t) = F'(t+x) + F'(t-x+2l), \quad u_t(x,t) = F'(t+x) - F'(t-x+2l), \tag{89}$$

каждое из которых следует рассматривать или как равенство элементов $L_2[0 \le x \le l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$, или как равенство элементов $L_2[0 \le t \le T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$. Но тогда функция $U(x,t) = F(t+x) + F(t-x+2l)$ является одновременно первообразной первой функции (89) по t при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$ и первообразной второй функции (89) по x при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$. Опираясь на этот факт и интегрируя по частям, мы получим, что левая часть (88) равна

$$\int_0^l \left[\int_0^T u_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right]dx - \int_0^T \left[\int_0^l u_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right]dt =$$

$$= \int_0^l [U(x,T)\Phi_x(x,T) - U(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx - \int_0^l\int_0^T U(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int_0^T [U(l,t)\Phi_t(l,t) - U(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dt + \int_0^l\int_0^T U(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= -\int_0^l U(x,0)\Phi_x(x,0)\,dx = \int_0^l u_t(x,0)\Phi(x,0)\,dx$$

в силу взаимного уничтожения двойных интегралов, равенств $\Phi_t(0,t) \equiv 0$, $\Phi_t(l,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$, равенства $U(x,T) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$ и соотношения $U_x(x,0) = u_t(x,0)$, понимаемого в смысле совпадения элементов $L_2[0,l]$. Тем самым соотношение (88) установлено, и доказательство теоремы 2 завершено.

5. Доказательство теоремы 3. Отдельно докажем, что функция (55) с $\overline{\mu}(t)$, определяемым соотношением (53), является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III с произвольной функцией $\varphi(x)$ из класса $W_2^1[0,l]$, удовлетворяющей условию $\varphi(l) = 0$, с произвольной функцией $\psi(x)$ из класса $L_2[0,l]$ и с функциями $\varphi_1(x) \equiv 0$ на $[0,l]$ и $\psi_1(x)$, являющейся нулевым элементом $L_2[0,l]$ (т.е. является решением задачи о полном успокоении колебательного процесса), а функция (56) с $\underline{\mu}(t)$, определяемым соотношением (54), является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления III с функциями $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0,l]$ и $\psi(x)$, являющейся нулевым элементом $L_2[0,l]$, и с произвольной функцией $\varphi_1(x)$ из класса $W_2^1[0,l]$, удовлетворяющей условию $\varphi_1(l) = 0$, и произвольной функцией $\psi_1(x)$ из класса $L_2[0,l]$ (т.е. является решением задачи о приведении первоначально покоящейся системы в произвольное наперед заданное состояние).

Начнем с рассмотрения функции (55). Из соотношений (53) следует, что функция $\overline{\mu}(t)$ принадлежит классу W_2^1 на каждом из сегментов*) $[0, T-2l]$, $[T-2l, l]$, $[l, 2l]$ и $[2l, T]$ и обращается в нуль при всех $t \ge T$.

Кроме того, тривиально проверяется, что $\overline{\mu}(T-2l+0) = \overline{\mu}(T-2l-0)$, $\overline{\mu}(l+0) = \overline{\mu}(l-0)$, $\overline{\mu}(2l+0) = \overline{\mu}(2l-0)$, $\overline{\mu}(T-0) = 0$. Отсюда следует, что функция $\overline{\mu}(t)$ принадлежит классу $W_2^1[0, T+3l]$ и потому функция (55) принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Далее из (53) вытекает, что для всех x из сегмента $[0,l]$

$$\overline{\mu}(x) = -v(x+2l) + (1/2)[\widehat{\psi}(x) + \varphi(x)], \quad \overline{\mu}(2l-x) = (1/2)[\widehat{\psi}(x) - \varphi(x)], \quad \overline{\mu}(x+2l) = v(x+2l),$$

и потому в силу (55) для всех x из сегмента $[0,l]$ $\overline{u}(x,0) = \overline{\mu}(x) - \overline{\mu}(2l-x) + \overline{\mu}(x+2l) = \varphi(x)$. Аналогично из справедливых в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$ соотношений

$$\overline{\mu}'(x) = -v'(x+2l) + (1/2)[\psi(x) + \varphi'(x)], \quad \overline{\mu}'(2l-x) = (1/2)[-\psi(x) + \varphi'(x)], \quad \overline{\mu}'(x+2l) = v'(x+2l)$$

*) При $T = 3l$ сегмент $[T-2l, l]$ нужно выбросить.

вытекает справедливое в том же смысле соотношение $\overline{u}_t(x,0)=\overline{\mu}'(x)-\overline{\mu}'(2l-x)+\overline{\mu}'(x+2l)=$ $=\psi(x)$.

Поэтому нам остается доказать, что для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из определения 3 справедливо тождество (12), в котором $u(x,t)=\overline{u}(x,t)$, $\mu(t)=\overline{\mu}(t)$. В силу равенства (17), записанного для функции $u(x,t)=\overline{u}(x,t)$, достаточно доказать соотношение

$$\int_0^l\int_0^T \overline{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt-\int_0^l\int_0^T \overline{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\,dt=\int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx. \tag{90}$$

Из справедливых в силу (55) соотношений

$$\overline{u}_t(x,t)=\overline{\mu}'(t+x)-\overline{\mu}'(t-x+2l)+\overline{\mu}'(t+x+2l), \tag{91}$$

$$\overline{u}_x(x,t)=\overline{\mu}'(t+x)+\overline{\mu}'(t-x+2l)+\overline{\mu}'(t+x+2l), \tag{92}$$

понимаемых в смысле равенства элементов $L_2[0\le x\le l]$ при любом фиксированном t из $[0,T]$ или в смысле равенства элементов $L_2[0\le t\le T]$ при любом фиксированном x из $[0,l]$, вытекает, что функция $\overline{U}(x,t)=\overline{\mu}(t+x)+\overline{\mu}(t-x+2l)+\overline{\mu}(t+x+2l)$ одновременно является первообразной по x функции (91) при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и первообразной по t функции (92) при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$. Используя этот факт, интегрируя по частям и учитывая свойства функции $\Phi(x,t)$ из определения 3 и понимаемое в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$ соотношение $\overline{U}_x(x,0)=u_t(x,0)=\psi(x)$, мы получим, что левая часть (90) равна

$$\int_0^l\left[\int_0^T \overline{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right]dx-\int_0^T\left[\int_0^l \overline{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right]dt=$$

$$=\int_0^l[\overline{U}(x,T)\Phi_x(x,T)-\overline{U}(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx-\int_0^l\int_0^T \overline{U}(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\int_0^T[\overline{U}(l,t)\Phi_t(l,t)-\overline{U}(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dt+\int_0^l\int_0^T \overline{U}(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt=$$

$$=-\int_0^l \overline{U}(x,0)\Phi_x(x,0)\,dx=\int_0^l \overline{u}_t(x,0)\Phi(x,0)\,dx=\int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx.$$

Обоснование соотношения (90) и доказательство теоремы 3 для функции (55) завершены.

Перейдем к доказательству теоремы 3 для функции (56). Из соотношений (54) следует, что функция $\underline{\mu}(t)$ принадлежит классу W_2^1 на каждом из сегментов*) $[0,T-2l]$, $[T-2l,T-l]$, $[T-l,2l]$, $[2l,T]$ и обращается в нуль при всех $t\le 0$. Кроме того, тривиально проверяется, что $\underline{\mu}(+0)=0$, $\underline{\mu}(T-2l+0)=\underline{\mu}(T-2l-0)$, $\underline{\mu}(T-l+0)=\underline{\mu}(T-l-0)$, $\underline{\mu}(2l+0)=\underline{\mu}(2l-0)$ и $\underline{\mu}(t)$ обращается в нуль при всех $t\le 0$. Отсюда следует, что функция $\underline{\mu}(t)$ принадлежит классу $W_2^1[T-3l,T]$ и потому функция (56) принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Далее из (54) вытекает, что для всех x из сегмента $[0,l]$

$$\underline{\mu}(T-x)=-w(T-x-2l)-(1/2)[\widehat{\psi}_1(x)-\varphi_1(x)],\quad \underline{\mu}(T+x-2l)=-(1/2)[\widehat{\psi}_1(x)+\varphi_1(x)],$$

$$\underline{\mu}(T-x-2l)=w(T-x-2l),$$

и потому в силу (56) для всех x из сегмента $[0,l]$ $\underline{u}(x,T)=\underline{\mu}(T-x)-\underline{\mu}(T+x-2l)+\underline{\mu}(T-x-2l)=$ $=\varphi_1(x)$. Аналогично из справедливых в смысле равенства элементов $L_2[0,l]$ соотношений

$$\underline{\mu}'(T-x)=-w'(T-x-2l)+(1/2)[\psi_1(x)-\varphi_1'(x)],\quad \underline{\mu}'(T+x-2l)=-(1/2)[\psi_1(x)+\varphi_1'(x)],$$

*) При $T=3l$ сегмент $[T-l,2l]$ нужно выбросить.

$$\underline{\mu}'(T-x-2l) = w'(T-x-2l)$$

вытекает справедливое в том же смысле соотношение $\underline{u}_t(x,T) = \underline{\mu}'(T-x) - \underline{\mu}'(T+x-2l) + +\underline{\mu}'(T-x-2l) = \psi_1(x)$.

Поэтому нам остается доказать, что для произвольной функции $\Phi(x,t)$ из определения 3 справедливо тождество (12), в котором $u(x,t) = \underline{u}(x,t)$, $\mu(t) = \underline{\mu}(t)$, $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0,l]$ и $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0,l]$.

В силу равенства (17), записанного для функции $u(x,t) = \underline{u}(x,t)$, достаточно доказать соотношение

$$\int_0^l \left[\int_0^T \underline{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right]dx - \int_0^T \left[\int_0^l \underline{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right]dt = 0. \tag{93}$$

Из справедливых в силу (56) соотношений

$$\underline{u}_t(x,t) = \underline{\mu}'(t-x) - \underline{\mu}'(t+x-2l) + \underline{\mu}'(t-x-2l), \tag{94}$$

$$\underline{u}_x(x,t) = -\underline{\mu}'(t-x) - \underline{\mu}'(t+x-2l) - \underline{\mu}'(t-x-2l), \tag{95}$$

понимаемых в смысле равенства элементов $L_2[0 \le x \le l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ или в смысле равенства элементов $L_2[0 \le t \le T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$, вытекает, что функция $\underline{U}(x,t) = -\underline{\mu}(t-x) - \underline{\mu}(t+x-2l) - \underline{\mu}(t-x-2l)$ одновременно является первообразной по x функции (94) при любом фиксированном t из сегмента $[0,T]$ и первообразной по t функции (95) при любом фиксированном x из сегмента $[0,l]$.

Используя этот факт, интегрируя по частям и учитывая свойства функции $\Phi(x,t)$ из определения 3 и тривиально проверяемое равенство $\underline{U}(x,0) \equiv 0$ при всех $0 \le x \le l$, мы получим, что левая часть (93) равна

$$\int_0^l \left[\int_0^T \underline{U}_t(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right]dx - \int_0^T \left[\int_0^l \underline{U}_x(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right]dt =$$

$$= \int_0^l [\underline{U}(x,T)\Phi_x(x,T) - \underline{U}(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx - \int_0^l \int_0^T \underline{U}(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int_0^T [\underline{U}(l,t)\Phi_t(l,t)\,dt - \underline{U}(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dt + \int_0^l \int_0^T \underline{U}(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt = 0.$$

Обоснование соотношения (93) завершено, и теорема 3 полностью доказана.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 99 — 01 — 01260, 00 — 01 — 00731 и 00 — 15 — 96104) и программы "Университеты России" (проект 990889).

Автор благодарит Г. Чабакаури за прочтение рукописи и исправление опечаток.

Литература

1. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 12. С. 1640 — 1659.
2. *Lions J.-L.* // SIAM Rev. 1988. Vol. 30, N 2. P. 1 — 68.
3. *Васильев Ф. П.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1893 — 1900.
4. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М., 1985.
5. *Егоров А. И.* // Докл. АН УССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1986. № 5. С. 60 — 63.
6. *Ильин В. А., Тихомиров В. В.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 5. С. 692 — 704.
7. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 11. С. 1517 — 1534.
8. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513 — 1528.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
7 сентября 2000 г.