Ю. Е. Аленицын, К теории функций, $p$-листных в среднем в многосвязных областях,
*Матем. заметки*, 1980, том 28, выпуск 5, 675–688

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

# К ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ, $p$-ЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Ю. Е. Аленицын

Для функций $f(z)$ регулярных, однолистных и ограниченных по модулю единицей в единичном круге с конечным числом концентрических круговых разрезов, переводящих единичную окружность во внешнюю граничную компоненту образа и имеющих в окрестности $z=0$ разложение вида $f(z)=a_1z+\ldots$, хорошо известна точная оценка $|a_1|\leqslant 1$ [1]. Известны также обобщения этой и аналогичных оценок на функции, $p$-листные в среднем по окружности [2]. Для функций, $p$-листных в среднем по площади, известны лишь неточные оценки такого рода [3]. В этой работе для функций, $p$-листных в среднем по площади, устанавливаются соответствующие точные оценки. Некоторые из приводимых ниже результатов были получены автором ранее для более узких классов функций, $p$-листных в среднем по площади [4].

§ 1. **Две леммы.** Пусть $D$ — конечная $m$-связная ($1\leqslant m<\infty$) область плоскости $z$ с невырожденными граничными компонентами $C_1, \ldots, C_m$; $\mathfrak{B}_p(D;\ \zeta;\ C_\mu)$ — класс всех функций $f(z)$, регулярных в области $D$, ограниченных в ней $|f(z)|<1$, $z\in D$, имеющих $p$-кратный нуль в ее точке $\zeta$, $p$-листных в среднем по площади (короче, $p$-листных в среднем) в этой области, т. е. удовлетворяющих условию

$$A_R(f)\leqslant p\pi R^2 \text{ для любого } R>0 \qquad (1)$$

$A_R(f)$ — площадь проектирующейся в круг $|w|<R$ части римановой поверхности, на которую функция $w=f(z)$

отображает область $D$) и таких, что при отображении $w=f(z)$ число обхода вокруг $w=0$ образа каждой граничной компоненты области $D$, отличной от $C_\mu$, равно нулю (под указанным числом обхода образа данной граничной компоненты области $D$ понимается число $\Delta_\gamma \arg f(z)/(2\pi)$ при обходе точкой $z$ в положительном направлении любой простой замкнутой аналитической кривой $\gamma$, гомотопной к этой граничной компоненте в $D \setminus \zeta$).

ЛЕММА 1. *Если $D$ — конечная $m$-связная область плоскости $z$ с границей $C$, состоящей из простых замкнутых кусочно аналитических кривых $C_1, \ldots, C_m$, а функция $f(z)$ принадлежит классу $\overline{\mathfrak{B}}_p(D;\ \zeta;\ C_\mu)$ и регулярна в замкнутой области $D$, то*

$$\int_C \log|f(z)|\, d\arg f(z) \leqslant 0.$$

Доказательство. Так как при отображении области $D$ функцией $w=f(z)$ достаточно малая окрестность точки $z=\zeta$ переходит в $p$-листную окрестность точки $w=0$, то на основании условия (1) заключаем, что $f(z)\neq 0$ для $z\in C$. Для достаточно малого $\varepsilon>0$ образ границы области $D$ при этом отображении лежит вне $p$-листного круга $|w|<\varepsilon$, а прообразом этого круга является некоторая окрестность точки $z=\zeta$, ограниченная простой замкнутой аналитической кривой. Рассмотрим область $\tilde{D}_0$, полученную удалением из области $D$ этой окрестности и проведением в полученной области аналитического разреза, соединяющего границу указанной окрестности с граничной компонентой $C_\mu$. Функция $w=f(z)=\rho e^{i\psi}$ отображает область $\tilde{D}_0$ на некоторую риманову поверхность $\tilde{W}_\varepsilon$, проективно лежащую в кольце $\varepsilon<|w|<1$, ограниченную образом $\Gamma$ границы области $D$, $p$-кратно покрытой окружностью $|w|=\varepsilon$ и некоторой аналитической кривой $T$ — образом проведенного разреза. Рассмотрим любую из регулярных в замкнутой области $\tilde{D}_0$ ветвей функции $\log f(z)$ и вычислим площадь $A(\log f,\ \tilde{D}_0)$ римановой поверхности, на которую эта ветвь отображает область $\tilde{D}_0$:

$$A(\log f,\ \tilde{D}_0)=\int_\Gamma \log\rho\, d\psi+\int_{|w|=\varepsilon}\log\rho\, d\psi+\int_T \log\rho\, d\psi.$$

Так как по кривой $T$ интегрирование происходит дважды и в противоположных направлениях, а значения $\psi$ на противоположных берегах проведенного разреза разнятся на $2\pi p$, то последний интеграл справа равен нулю, и получаем

$$A(\log f, \tilde{D}_0) = \int_\Gamma \log \rho \, d\psi - 2\pi p \log \varepsilon. \tag{2}$$

С другой стороны, имеем

$$A(\log f, \tilde{D}_0) = \iint_{\tilde{W}_\varepsilon} \left| \frac{d \log w}{dw} \right|^2 d\sigma_w = \iint_{\tilde{W}_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \, d\rho \, d\psi.$$

Положим

$$P(\rho) = \int_{\{|w|=\rho\} \subset W} d\psi - 2\pi p,$$

где интеграл берется по дугам окружности $|w| = \rho$, принадлежащим поверхности $W$, на которую функция $w = f(z)$ отображает область $D$. Тогда

$$A(\log f, \tilde{D}_0) = \int_\varepsilon^1 P(\rho) \frac{d\rho}{\rho} - 2\pi p \log \varepsilon. \tag{3}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_\varepsilon^1 P(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = \int_\varepsilon^1 P(\rho) \rho \, d\rho + 2 \int_\varepsilon^1 \left( \int_\varepsilon^\rho P(\xi) \xi \, d\xi \right) \frac{dp}{\rho^3}. \tag{4}$$

Так как круг $|w| < \varepsilon$ покрывается поверхностью $W$ $p$-кратно, то при $\rho < \varepsilon$ $P(\rho) \equiv 0$ и, следовательно,

$$\begin{gathered} \int_\varepsilon^1 P(\rho) \rho \, d\rho = \int_0^1 P(\rho) \rho \, d\rho, \\ \int_\varepsilon^\rho P(\xi) \xi \, d\xi = \int_0^\rho P(\xi) \xi \, d\xi, \quad 0 \leqslant \rho < 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Так как, далее, из условия (1) следует, что

$$\int_0^\rho P(\xi) \xi \, d\xi \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant \rho < 1,$$

то из (4) и (5) находим, что

$$\int_\varepsilon^1 P(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \leqslant 0,$$

и, сравнивая (2) и (3), заключаем, что

$$\int_{\Gamma} \log \rho \, d\psi = \int_{C} \log |f| \, d \arg f \leqslant 0.$$

Под знак полученного интеграла входят значения на $C$ выбранной в области $\tilde{D}_0$ ветви $\log z$, но, очевидно, этот интеграл не зависит от выбора однозначных ветвей $\arg f(z)$ на граничных компонентах $C_\nu$, $\nu \neq \mu$, и от выбора начального значения $\arg f(z)$ при интегрировании по $C_\mu$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $D$ — конечная $m$-связная ($1 \leqslant m < \infty$) область плоскости $z$ с невырожденными граничными компонентами $C_1, \ldots, C_m$, содержащая точку $z = \zeta$, и $D^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность лежащих в области $D$ и содержащих эту точку расширяющихся $m$-связных областей, имеющих граничными компонентами простые замкнутые аналитические кривые $C_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, m$, и аппроксимирующих область*

$$D : D^{(n)} \subset D^{(n+1)} \subset D,$$

$$D^{(n)} \to D, \quad C_j^{(n)} \to C_j \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

*$t = f_\mu(z, \zeta)$ ($\mu = 1, \ldots, m$) — функция, однолистно и конформно отображающая область $D$ на круг $|t| < 1$ с концентрическими относительно начала круговыми разрезами, переводящая $C_\mu$ в окружность $|t| = 1$ и нормированная условиями $f_\mu(\zeta, \zeta) = 0$, $f'_\mu(\zeta, \zeta) > 0$* [1]*, $t = f_{\mu, n}(z, \zeta)$ — так же определяемая функция для области $D^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} f_{\mu, n}(z, \zeta) = f_\mu(z, \zeta)$$

*равномерно внутри $D$.*

Доказательство этой леммы можно провести аналогично доказательству леммы 1 работы [5]. Именно, из последовательности $f_{\mu, n}(z, \zeta)$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность $f_{\mu, n_k}(z, \zeta)$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно сходящуюся внутри области $D$ к регулярной функции $f_*(z)$, очевидно, отличной от постоянной и потому однолистной в области $D$ и удовлетворяющей усло-

---

[1] $f'_\mu(\zeta, \zeta) = \left[ \frac{d}{dz} f_\mu(z, \zeta) \right]_{z=\zeta}$ и аналогично везде далее.

виям $f_*(\zeta)=0$, $f'_*(\zeta)>0$. По теореме Каратеодори последовательность образов $\hat{E}_{(n_k)} \equiv f_{\mu,\, n_k}(D^{(n_k)}, \zeta)$ областей $D^{(n_k)}$, $k=1, 2, \ldots$, имеет область $G \equiv f_*(D)$ своим ядром (относительно начала) и сходится к нему. Обозначим через $\gamma_j$, $j=1, \ldots, m$, $j \neq \mu$, граничную компоненту области $G$, соответствующую при отображении $t=f_*(z)$ граничной компоненте $C_j$ области $D$, и рассмотрим в круге $|t|<1$ $(m-1)$ каких-нибудь взаимно неналегающих областей $g_j$, обладающих свойством: область $g_j$ содержит $\gamma_j$, но не содержит остальных граничных компонент области $G$. Из сходимости последовательности областей $\hat{E}_{(n_k)}$ к ядру $G$ следует, что у каждой из них, начиная с некоторого номера, в каждой из областей $g_j$ лежит ровно по одной граничной компоненте — круговому разрезу. Отсюда нетрудно заключить, что $\gamma_j$ является тоже дугой окружности с центром в начале. Следовательно, функция $t=f_*(z)$, $f_*(\zeta)=0$, $f'_*(\zeta)>0$, отображает область $D$ на круг $|t|<1$ с концентрическими относительно начала круговыми разрезами и притом так, что $C_\mu$ переходит в окружность $|t|=1$. По единственности такого отображения необходимо $f_*(z) \equiv f_\mu(z, \zeta)$, откуда следует утверждение леммы 2.

## § 2. Оценка сверху коэффициента $a_p$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $D$ — конечная $m$-связная $(1 \leqslant m < \infty)$ область плоскости $z$ с невырожденными граничными компонентами $C_1, \ldots, C_m$, $f(z) \in \overline{\mathfrak{B}}_p(D;\ \zeta;\ C_\mu)$ и в окрестности $z=\zeta$*

$$f(z)=a_p(z-\zeta)^p+\ldots,$$

*то*

$$|a_p| \leqslant [f'_\mu(\zeta, \zeta)]^p \tag{6}$$

*со знаком равенства только для функций*

$$f(z)=e^{i\theta}[f_\mu(z, \zeta)]^p,$$

*где $\theta$ вещественно.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность областей $D^{(n)}$, аппроксимирующих изнутри область $D: D^{(n)} \to D$, $n \to \infty$, и определяемые ими функции $f_{\mu,\, n}(z, \zeta)$.

Положим

$$F_n(z)=f(z)/[f_{\mu,\, n}(z, \zeta)]^p, \quad z \in D,\ n=1, 2, \ldots$$

Функция $\log F_n(z)$ имеет в замкнутой области $D^{(n)}$ регулярные ветви, рассмотрим одну из них. Полагая

$$f(z) = \rho e^{i\psi}, \quad f_{\mu, n}(z, \zeta) = r_n e^{i\varphi_n}, \quad F_n(z) = R_n e^{i\Phi_n}$$

и обозначая через $C^{(n)}$ границу области $D^{(n)}$, имеем

$$\iint_{D^{(n)}} |(\log F_n(z))'|^2 \, dx\, dy = \int_{C^{(n)}} \log R_n \, d\Phi_n =$$
$$= \int_{C^{(n)}} \log \rho \, d\psi - p \int_{C^{(n)}} \log \rho \, d\varphi_n - p \int_{C^{(n)}} \log r_n \, d\psi +$$
$$+ p^2 \int_{C^{(n)}} \log r_n \, d\varphi_n \qquad (z = x + iy).$$

Так как функция $f(z)$ принадлежит классу $\overline{\mathfrak{B}}_p(D^{(n)}; \zeta; C_\mu^{(n)})$ и регулярна в замкнутой области $D^{(n)}$, то по лемме 1

$$\int_{C^{(n)}} \log \rho \, d\psi \leqslant 0.$$

Так как далее, в силу свойств функций $f(z)$ и $f_{\mu, n}(z, \zeta)$,

$$\int_{C^{(n)}} \log r_n \, d\varphi_n = 0, \qquad \int_{C^{(n)}} \log r_n \, d\psi = 0,$$

то находим

$$\iint_{D^{(n)}} |(\log F_n(z))'|^2 \, dx\, dy + p \int_{C^{(n)}} \log \rho \, d\varphi_n \leqslant 0. \tag{7}$$

Второй интеграл левой части этого неравенства можем представить в виде

$$\int_{C^{(n)}} \log \rho \, d\varphi_n = \int_{C^{(n)}} (\log R_n \, d\varphi_n - \Phi_n \, d \log r_n) =$$
$$= \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{i} \int_{C^{(n)}} \log F_n \, d\, \overline{\log f_{\mu, n}} \right\} =$$
$$= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} \int_{C^{(n)}} \log F_n \, d \log f_{\mu, n} \right\},$$

поскольку на $C^{(n)}$ $d\overline{\log f_{\mu, n}} = -d \log f_{\mu, n}$. Следовательно, по теореме о вычетах

$$\int_{C^{(n)}} \log \rho \, d\varphi_n = 2\pi \operatorname{Re} \{[\log F_n(z)]|_{z=\zeta}\} = 2\pi \log \frac{|a_p|}{[f'_{\mu, n}(\zeta, \zeta)]^p},$$

и (7) дает неравенство

$$|a_p| \exp \frac{1}{2\pi p} \iint_{D(n)} \left| \left( \log \frac{f(z)}{[f_{\mu,n}(z, \zeta)]^p} \right)' \right|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqslant [f'_{\mu,n}(\zeta, \zeta)]^p.$$

Отсюда для любой заданной замкнутой части $D'$ области $D$ и всех достаточно больших $n$ следует такое же неравенство, но с интегралом по области $D'$. После предельного перехода в этом последнем неравенстве при $n \to \infty$ на основании леммы 2 получим такое же неравенство с интегралом по области $D'$ и функцией $f_\mu(z, \zeta)$ и, следовательно, в силу произвольности $D'$, неравенство

$$|a_p| \exp \frac{1}{2\pi p} \iint_{D} \left| \left( \log \frac{f(z)}{[f_{\mu}(z, \zeta)]^p} \right)' \right|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqslant [f'_{\mu}(\zeta, \zeta)]^p.$$

Из этой оценки, очевидно, следует оценка (6) и утверждение о знаке равенства в ней.

Следствие 1. *Если $\hat{E}$ — круг $|z| < 1$ с конечным числом концентрических относительно начала круговых разрезов, $f(z) \in \overline{\mathfrak{B}}_p(\hat{E}; 0; |z| = 1)$ и в окрестности $z = 0$*

$$f(z) = a_p z^p + \ldots,$$

*то*

$$|a_p| \leqslant 1$$

*со знаком равенства только для функций $f(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z^p$, где $\theta$ вещественно.*

Доказательство. Так как для $D \equiv \hat{E}$, $\zeta = 0$, $C_\mu \equiv \{|z| = 1\}$ в силу единственности имеем $f_\mu(z, \zeta) \equiv z$, то утверждения непосредственно следуют из теоремы 1.

**§ 3. Оценка снизу коэффициента $a_p$.**

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $E^*$ — круг $|z| < 1$ с конечным числом радиальных разрезов в $0 < |z| < 1$; $f(z) \in \overline{\mathfrak{B}}_p(E^*; 0; |z| = 1)$ и в окрестности $z = 0$ $f(z) = a_p z^p + \ldots$; $d = \liminf\limits_{|z| \to 1} |f(z)|$. Тогда*

$$|a_p| \geqslant d^2$$

*со знаком равенства только для функций $f(z) = \mathrm{e}^{i\theta} z^p$, где $\theta$ вещественно.*

Доказательство. В силу условий теоремы необходимо $d > 0$. Пусть разрезы круга $|z| < 1$ лежат на $l$ лучах. Перенумеруем эти лучи в порядке возрастания их аргументов и для любого заданного $\varepsilon$, $0 <$

$< \varepsilon < d$, рассмотрим систему взаимно неналегающих углов

$$\varphi_j < \arg z < \varphi_j', \quad j = 1, \ldots, l,$$

где $\varphi_j' < \varphi_{j+1}$, $\varphi_{l+1} = \varphi_1 + 2\pi$, таких, что каждый $j$-й из них содержит $j$-й луч и что $\varphi_j' - \varphi_j < \varepsilon$. Рассмотрим какое-нибудь кольцо $(0 <) r_0 < |z| < r_1 (< 1)$, содержащее все радиальные разрезы круга $|z| < 1$ и такое достаточно малое $\delta > 0$, что $1 - \delta > r_1$ и что в кольце $1 - \delta \leqslant |z| < 1$ имеем $|f(z)| \geqslant d - \varepsilon$. Положив $z = re^{i\varphi}$, рассмотрим $(l+1)$-связную область $D_{\varepsilon,\delta}$, ограниченную окружностью $|z| = 1 - \delta$, отрезками

$$\{z\colon \varphi = \varphi_j,\ r_0 \leqslant r \leqslant r_1\},\quad \{z\colon \varphi = \varphi_j',\ r_0 \leqslant r \leqslant r_1\},\quad j = 1, \ldots, l,$$

и дугами окружностей

$$\{z\colon r = r_0,\ \varphi_j \leqslant \varphi \leqslant \varphi'_j\},\quad \{z\colon r = r_1,\ \varphi_j \leqslant \varphi \leqslant \varphi_j'\},\quad j = 1, \ldots, l.$$

Пусть $F(z) = \log(f(z)/a_p z^p)$ — та регулярная в области $E^*$ ветвь этой логарифмической функции, для которой $F(0) = 0$. Полагая $z = x + iy$, $f(z) = \rho e^{i\psi}$, $F(z) = U + iV$ и обозначая через $C_{\varepsilon,\delta}$ границу области $D_{\varepsilon,\delta}$, имеем

$$\iint_{D_{\varepsilon,\delta}} |F'(z)|^2 \, dx\, dy = \int_{C_{\varepsilon,\delta}} U\, dV = \int_{C_{\varepsilon,\delta}} \log \frac{\rho}{r^p} (d\psi - p\, d\varphi).$$

Из регулярности в $D_{\varepsilon,\delta} \cup C_{\varepsilon,\delta}$ функции $F(z)/z$ следует, что

$$0 = \operatorname{Im}\left\{\int_{C_{\varepsilon,\delta}} \frac{F(z)}{z}\, dz\right\} =$$

$$= \int_{C_{\varepsilon,\delta}} \left[\log \frac{\rho}{r^p}\, d\varphi + (\psi - p\varphi)\frac{dr}{r}\right] - 2\pi \log |a_p|, \qquad (9)$$

а из однозначности в $E^*$ функций $\log r$ и $\operatorname{Im}\{F(z) + \log a_p\} = \psi - p\varphi$, что

$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} (\psi - p\varphi)\frac{dr}{r} = -\int_{C_{\varepsilon,\delta}} \log r\, d(\psi - p\varphi). \qquad (10)$$

Из (9) и (10) заключаем, что

$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} (\log \rho\, d\varphi - \log r\, d\psi) = 2\pi \log |a_p|$$

и что, следовательно,

$$\iint_{D_{\varepsilon,\delta}} |F'(z)|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{C_{\varepsilon,\delta}} (\log\rho\,\mathrm{d}\psi - 2p\log\rho\,d\varphi + p^2\log r\,d\varphi) + 2\pi p\log|a_p|. \qquad (11)$$

Так как функция $f(z)$ принадлежит классу $\overline{\mathfrak{B}}_p(D_{\varepsilon,\delta}; 0; |z| = 1-\delta)$ и регулярна в $D_{\varepsilon,\delta} \cup C_{\varepsilon,\delta}$, то по лемме 1

$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} \log\rho\,\mathrm{d}\psi \leqslant 0. \qquad (12)$$

Далее, полагая $\rho_0 = \min\limits_{|z|=r_0} |f(z)|$ (в силу условий теоремы необходимо $\rho_0 > 0$), $\rho_1 = \max\limits_{|z|=r_1} |f(z)|$, имеем

$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} \log\rho\,\mathrm{d}\varphi \geqslant 2\pi\log(d-\varepsilon) + \log\frac{\rho_0}{\rho_1}\sum_{j=1}^{l}(\varphi_j' - \varphi_j). \qquad (13)$$

Учитывая неравенство (12) и (13), а также неравенство

$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} \log r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\log(1-\delta) + \log\frac{r_0}{r_1}\sum_{j=1}^{l}(\varphi_j' - \varphi_j) < 0,$$

из (11) находим

$$\iint_{D_{\varepsilon,\delta}} |F'(z)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant 2\pi p\log|a_p| - 4\pi p\log(d-\varepsilon) - 2p\log\frac{\rho_0}{\rho_1}\sum_{j=1}^{l}(\varphi_j' - \varphi_j).$$

Полагая сначала $\delta \to 0$, а затем $\varepsilon \to 0$, получаем

$$|a_p| \geqslant d^2\exp\frac{1}{2\pi p}\iint_{E^*} |F'(z)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

откуда, очевидно, следует оценка (8) и утверждение о знаке равенства в ней.

Следствие 2. *Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и* $d_\mu = \liminf\limits_{z\to C_\mu} |f(z)|$. *Тогда*

$$|a_p| \geqslant d_\mu^2\,[g_\mu'(\zeta, \zeta)]^p, \qquad (14)$$

*где $t = g_\mu(z, \zeta)$ — функция, однолистно и конформно отображающая область $D$ на круг $|t| < 1$ с радиальными разрезами в $0 < |t| < 1$, переводящая $C_\mu$ в окруж-*

*ность* $|t| = 1$ *и нормированная условиями* $g_\mu(\zeta, \zeta) = 0$, $g'_\mu(\zeta, \zeta) > 0$. *Знак равенства в оценке* (14) *достигается только для функций* $f(z) = e^{i\theta}[g_\mu(z, \zeta)]^p$.

Доказательство. Обозначим через $E^*$ ту область плоскости $t$, на которую функция $t = g_\mu(z, \zeta)$ отображает область $D$. Так как функция $\varphi(t) = f[g_\mu^{-1}(t)]$, $t \in E^*$, принадлежит классу $\overline{\mathfrak{B}}_p(E^*; 0; |t| = 1)$, имеет в окрестности $t = 0$ разложение вида

$$\varphi(t) = \frac{a_p}{[g'_\mu(\zeta, \zeta)]^p} t^p + \ldots$$

и

$$d = \liminf_{|t|\to 1} |\varphi(t)| = \liminf_{z\to C_\mu} |f(z)| = d_\mu,$$

то по теореме 2 придем к утверждениям данного следствия.

**§ 4. Оценки коэффициента $a_p$ для функций с полюсом.** Основываясь на результатах предшествующих параграфов, получим аналогичные оценки для функций, $p$-листных в среднем в данной области с $p$-кратным нулем и $p$-кратным полюсом.

Пусть $D$ — конечносвязная область плоскости $z$ с невырожденными граничными компонентами; $\overline{\mathfrak{M}}_p^0(D; \zeta; \zeta')$ — класс всех функций $f(z)$, регулярных в области $D$, за исключением полюса порядка $p$ в ее точке $z = \zeta'$, имеющих $p$-кратный нуль в ее точке $z = \zeta$, $p$-листных в среднем (по площади) в этой области и таких, что при отображении $w = f(z)$ число обхода вокруг $w = 0$ образа каждой ее граничной компоненты равно нулю.

ЛЕММА 3. *Если $D$ — конечносвязная область плоскости $z$ с границей $C$, состоящей из простых замкнутых кусочно-аналитических кривых, а функция $f(z)$ принадлежит классу $\overline{\mathfrak{M}}_p^0(D; \zeta; \zeta')$ и регулярна на $C$*, то

$$\int_C \log|f(z)|\, d\arg f(z) \leqslant 0. \qquad (15)$$

Доказательство. Следует лишь незначительно изменить доказательство леммы 1. Именно, предположим сначала, что $D$ — конечная область и, вернувшись к доказательству леммы 1, рассмотрим еще окрестность точки $z = \zeta'$, ограниченную простой замкнутой аналитической кривой, являющуюся для достаточно большого $M > 0$ прообразом $p$-листной области $|w| > M$ при отображении $w = f(z)$. Для получения требуемой теперь области $\widetilde{D}_0$ проведем в области $D$ разрез, соединяющий границы рассмотренных окрестностей точек $z = \zeta$ и $z = \zeta'$. Функция $w = f(z) = \rho e^{i\psi}$ будет отображать полученную область $\widetilde{D}_0$ на риманову поверхность $\widetilde{W}_{\varepsilon, M}$, проективно лежащую в кольце $\varepsilon < |w| < M$, ограниченную образом $\Gamma$ границы области $D$, $p$-кратно покрытыми окружностями $|w| = \varepsilon$, $|w| = M$ и некоторой аналитической кривой $T$ — образом проведенного разреза.

Будем иметь

$$A(\log f, \widetilde{D}_0) = \int_\Gamma \log \rho \, d\psi + 2\pi p \log \frac{M}{\varepsilon} =$$
$$= \int_\varepsilon^M P(\rho) \frac{d\rho}{\rho} + 2\pi p \log \frac{M}{\varepsilon}$$

и прежние рассуждения приведут к неравенству (15). Случай области $D$ с внутренней точкой $z = \infty$ сводится к рассмотренному однолистным конформным отображением этой области на конечную область.

Пусть $t = j_\alpha(z, \zeta, \zeta')$, $\alpha \in [0, \pi)$,— функция, однолистно и конформно отображающая конечносвязную область $D$ плоскости $z$ с невыроженными граничными компонентами на плоскость $t$ с разрезами по дугам логарифмических спиралей наклона $\alpha$ к лучам, выходящим из начала, и притом так, что ее точки $\zeta$ и $\zeta'$ переходят соответственно в 0 и $\infty$ и первый коэффициент разложения этой функции в окрестности $z = \zeta'$ равен единице; $t = j_{\alpha, n}(z, \zeta, \zeta')$ — так же определяемая функция для области $D^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ В работе [6] доказан, в частности, следующий результат:

ЛЕММА 4. *Если $D$ — конечносвязная область плоскости $z$ с невырожденными граничными компонентами и $D^{(n)} \to D$, $n \to \infty$, то*

$$\lim_{n \to \infty} j_{\alpha, n}(z, \zeta, \zeta') = j_\alpha(z, \zeta, \zeta')$$

*равномерно внутри $D$.*

ТЕОРЕМА 3. *Если $D$ — конечная и конечносвязная область плоскости $z$ с невырожденными граничными компонентами, $f(z) \in \mathfrak{M}_p^0(D; \zeta; \zeta')$ и в окрестности $z = \zeta'$*

$$f(z) = b_p/(z - \zeta')^p + \ldots, \quad |b_p| = 1,$$

*в окрестности* $z = \zeta$

$$f(z) = a_p (z - \zeta)^p + \ldots,$$

*то*

$$|a_p| \leqslant |j'_{\pi/2}(\zeta, \zeta, \zeta')|^p$$

*со знаком равенства только для функций*

$$f(z) = e^{i\theta} [j_{\pi/2}(z, \zeta, \zeta')]^p.$$

Доказательство. Легко проверить, что для $f(z) \in \overline{\mathfrak{M}}_p^0 (D;\ \zeta;\ \zeta')$ на основании лемм 3 и 4 и условия $|b_p| = 1$ справедливы все рассуждения и выкладки доказательства теоремы 1 с заменой в них $f_{\mu, n}(z, \zeta)$ на $j_{\pi/2, n}(z, \zeta, \zeta')$, что и доказывает теорему 3.

Следствие 3. *Если $\widehat{P}$ — плоскость $z$ с конечным числом концентрических относительно начала круговых разрезов,* $f(z) \in \overline{\mathfrak{M}}_p^0 (\widehat{P};\ 0;\ \infty)$ *и в окрестности* $z = \infty$

$$f(z) = b_p z^p + \ldots, \qquad |b_p| = 1,$$

*в окрестности* $z = 0$

$$f(z) = a_p z^p + \ldots,$$

*то*

$$|a_p| \leqslant 1$$

*со знаком равенства только для функций* $f(z) = e^{i\theta} z^p$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть любое однолистное и конформное отображение $t = h(z)$ области $\widehat{P}$ на какую-нибудь конечную область $D$ плоскости $t$ с разложением в окрестности $z = \infty$ вида $h(z) = \tau' + 1/z + \ldots$ и к функции $\tilde{f}(t) = f[h^{-1}(t)]$ и области $D$ применить теорему 3.

ТЕОРЕМА 4. *Если $P^*$ — плоскость $z$ с конечным числом разрезов, лежащих на лучах, выходящих из начала, содержащая точки $z = 0$ и $z = \infty$,* $f(z) \in \overline{\mathfrak{M}}_p^0 (P^*;\ 0;\ \infty)$ *и в окрестности*

$$f(z) = b_p z^p + \ldots, \qquad |b_p| = 1,$$

*в окрестности* $z = 0$

$$f(z) = a_p z^p + \ldots,$$

*то*

$$|a_p| \geqslant 1$$

*со знаком равенства только для функций* $f(z) = e^{i\theta} z^p$.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2. Именно, за области, аппроксимирующие область $P^*$, возьмем области $D_\varepsilon$ с внутренними точками $z=0$, $z=\infty$ и с охватывающими резрезы граничными компонентами, построенными так же, как и при доказательстве теоремы 2. Обозначив через $C_\varepsilon$ границу области $D_\varepsilon$ и рассмотрев ту же функцию $F(z)$, по теореме о вычетах, с учетом условия $|b_p|=1$, найдем при прежних обозначениях

$$2\pi\log|a_p| = \operatorname{Im}\left\{\int_{C_\varepsilon}\frac{F(z)}{z}\,dz\right\} = \\ = \int_{C_\varepsilon}\left[\log\frac{\rho}{r^p}\,d\rho + (\psi - p\varphi)\frac{dr}{r}\right].$$

Отсюда, как и ранее, придем к равенству (11) с заменой в нем $D_{\varepsilon,\delta}$ и $C_{\varepsilon,\delta}$ соответственно на $D_\varepsilon$ и $C_\varepsilon$. Так как далее будем иметь

$$\int_{C_\varepsilon}\log\rho\,d\varphi \geqslant \log\frac{\rho_0}{\rho_1}\cdot\sum_{j=1}^{l}(\varphi_j' - \varphi_j),$$

$$\int_{C_\varepsilon}\log r\,d\varphi = \log\frac{r_0}{r_1}\cdot\sum_{j=1}^{l}(\varphi_j' - \varphi_j) < 0$$

и (по лемме 3)

$$\int_{C_\varepsilon}\log\rho\,d\psi \leqslant 0,$$

то получим неравенство

$$\iint_{D_\varepsilon}|F'(z)|^2\,dx\,dy \leqslant \\ \leqslant 2\pi p\log|a_p| - 2p\log\frac{\rho_0}{\rho_1}\sum_{j=1}^{l}(\varphi_j' - \varphi_j),$$

предельный переход в котором при $\varepsilon\to 0$ приводит к требуемым результатам.

Следствие 4. *Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, то*

$$|a_p| \geqslant |j_0'(\zeta,\ \zeta,\ \zeta')|^p$$

*со знаком равенства только для функций*

$$f(z) = e^{i\theta}[j_0(z,\ \zeta,\ \zeta')]^p.$$

Для доказательства достаточно рассмотреть область $P^*$ плоскости $t$, на которую функция $t = j_0(z, \zeta, \zeta')$ отображает область $D$ и к функции $\varphi(t) = f[j_0^{-1}(t)]$, $t \in P^*$, применить теорему 4.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт Механобр

Поступило
12.XII.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Rengel E., Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung, Schr. d. Math. Semin. und d. Inst. für angew. Math. d. Univ. Berlin, **1**, № 4 (1933), 141—162.
[2] Abe H., On multivalent functions in multiply connected domains. I, Proc. Japan Acad., **53**, № 3 (1977), 116—119.
[3] Abe H., On multivalent functions in multiply connected domains. II, Proc. Japan. Acad., **53**, № 2 (1977), 68—71.
[4] Аленицын Ю. Е., Конформные отображения многосвязной области на многолистные канонические поверхности, Изв. АН СССР, Сер. матем., **28** (1964), 607—664.
[5] Аленицын Ю. Е., Конформные отображения многосвязной области на многолистные поверхности с прямолинейными разрезами, Изв. АН СССР, Сер. матем., **29** (1965), 887—902.
[6] Голузин Г. М., О теоремах искажения для конформного отображения многосвязных областей, Матем. сб., **2** (1937), 37—64.