И. С. Рахимов, Выборочные суммы зависимых величин, смеси безгранично делимых законов и ветвящиеся случайные процессы, *Дискрет. матем.*, 1991, том 3, выпуск 2, 128–147

Дискретная математика

том 3 выпуск 2 * 1991

УДК 519.21

ВЫБОРОЧНЫЕ СУММЫ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН, СМЕСИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ И ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

И. Рахимов

Доказываются предельные теоремы о сходимости к смеси безгранично делимых законов распределения суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k(n)\, X_k(n),$$

где $X_k(n)$ – некоторые (вообще говоря, зависимые) случайные величины, а $\nu_k(n)$ – случайные величины, принимающие значения 0 и 1. Полученные результаты применяются в двух задачах: при исследовании ветвящихся процессов с иммиграцией, в которых допускается зависимость процессов размножения и иммиграции, и при доказательстве предельных теорем для выборочных сумм из конечной совокупности зависимых случайных величин.

Введение

Рассмотрим семейство случайных величин $\{X_i(n),\ (i, n) \in \mathbf{N}^2\}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, определенных на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}\}$, и семейство $\{\mathcal{F}_i(n), (i, n) \in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}\}$, $\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \mathbf{N}$, σ-подалгебр $\mathcal{A}$ таких, что для любой пары (i, n) величина $X_i(n)$ измерима относительно $\mathcal{F}_i(n)$; $\mathcal{F}_0(n)$ – некоторая σ-алгебра.

Нас будет интересовать предельное распределение случайных величин

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(n)\, X_i(n), \tag{1}$$

где $\nu_i(n)$ – случайные величины, принимающие значения 0 и 1 и такие, что для любой пары (i, n) величина $\nu_i(n)$ измерима относительно $F_{i-1}(n)$; здесь и далее

$$F_k(n) = \prod_{j=0}^{k} \mathcal{F}_j(n).$$

Отметим, что никаких предположений о независимости величин, входящих в S_n, не делается.

Представление в виде (1) допускает хорошо известная выборочная сумма из конечной совокупности [8–10, 17–24]. Кроме того, ясно, что в (1) содержится обычная схема суммирования случайного числа случайных величин. Формально сумма (1) является частным случаем двойной суммы

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\eta_k(n)} \xi_{i,k}(n), \tag{2}$$

в которой $\eta_k(n)$ принимают целые неотрицательные значения. Однако ниже будет показано, что из результатов, полученных для S_n, легко могут быть выведены предельные теоремы для S_n^*.

Суммы вида (2) ранее изучались в [11, 12] в связи с приложениями в теории ветвящихся случайных процессов в случае, когда $\xi_{ik}(n)$ независимы по i, k, имеют одно и то же распределение при разных i и не зависят от $\eta_k(n)$.

В данной работе мы докажем предельные теоремы для S_n. Как уже было отмечено, обычная схема суммирования случайного числа слагаемых может быть сведена к схеме (1). Покажем теперь, что кратные суммы вида (2) также могут быть выражены через суммы (1). Пусть N_n – такая последовательность целых чисел, что

$$\mathsf{P}\{\mathcal{M}_n\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \qquad \mathcal{M}_n = \{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \eta_k^{(n)} \geqslant N_n\},$$

χ – индикаторная случайная величина. Тогда для любой случайной величины ξ и любого $x \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ справедливо неравенство

$$|\mathsf{P}\{\chi\xi < x\} - \mathsf{P}\{\xi < x\}| \leqslant \mathsf{P}\{\chi = 0\}.$$

Пусть всюду далее $\chi(A)$ обозначает индикатор события A. Положим

$$X_{kN_n+j}(n) = \xi_{j\,k+1}(n), \qquad \nu_{kN_n+j}(n) = \chi(j \leqslant \eta_{k+1}(n)),$$
$$j = 1, \ldots, N_n, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Соотношение

$$\chi(\overline{\mathcal{M}}_n) S_n^* = \chi(\overline{\mathcal{M}}_n) S_{nN_n}, \qquad \overline{\mathcal{M}}_n = \Omega \setminus \mathcal{M}_n,$$

в силу приведенного неравенства и выбора последовательности N_n показывает, что суммы S_n и S_n^* имеют одно и то же предельное распределение.

Ясно, что проведенные выше рассуждения позволяют сводить кратные суммы любой конечной кратности к однократной схеме суммирования (1).

Основная теорема 1 дает общие условия сходимости распределения S_n к смеси безгранично делимых законов. Теорема 3 относится к случаю конечной дисперсии. Разумеется, с их помощью могут быть получены условия сходимости к смесям различных конкретных безгранично делимых распределений. Из теоремы 3 может быть получен (если положить $\nu_k(n) \equiv 1$) результат Иглсона [1] о сходимости суммы мартингал-разностей к смеси безгранично делимых распределений. Поскольку в (1) содержится обычная схема суммирования случайного числа слагаемых, из теоремы 3 следуют, например, результаты работ [2–4], а из теоремы 1 можно получить результаты [5, 6].

Доказательство теоремы 1 проводится методом стохастических экспонент для семимартингалов [15, 16]. Вспомогательная теорема 2 выводится из теоремы о сходимости условных характеристических функций к характеристической функции процесса с условно независимыми приращениями [15]. Затем с помощью теоремы 2 доказывается сходимость распределения S_n к смеси безгранично делимых законов.

Последние параграфы посвящены приложениям доказанных теорем к изучению ветвящихся случайных процессов с иммиграцией [7, 13] и к доказательству предельных теорем для сумм величин, случайно отобранных из конечной совокупности [8–10], [17–24].

Рассматриваемые здесь ветвящиеся процессы с иммиграцией отличаются от традиционных тем, что, во-первых, допускается зависимость процессов размножения и иммиграции (более точно об этом см. § 3), во-вторых, иммигрирующие частицы могут давать начало как критическим, так и докритическим или надкритическим процессам, в-третьих, эволюция процесса зависит от состояния случайной среды в начале процесса.

Что касается выборочных сумм из конечной совокупности, то оказывается, что с помощью теоремы 3 можно изучить обобщенную схему выбора без возвращения, в которой вопрос о включении данной величины в сумму решается в зависимости от значений предыдущих случайных величин.

§ 1. Формулировка основной теоремы

Пусть $\tau_i(n)$ – такое семейство неотрицательных случайных величин, что почти всюду

$$|\mathsf{M}_{i-1\,n}[X_i(n)\chi(|X_i(n)|\leqslant\tau_i(n))]|<\infty. \tag{3}$$

Здесь и всюду в дальнейшем

$$\mathsf{M}_{in}[\xi]=\mathsf{M}[\xi\,|\,F_i(n)].$$

Пусть $\mathscr{F}_0$ – такая σ-алгебра, что $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_0(n)$ для всех $n\in\mathbf{N}$. Через $K=K(x,\omega)$ обозначим функцию, отображающую $\mathbf{R}\times\Omega$ в $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ и такую, что при любом фиксированном x она является $\mathscr{F}_0$-измеримой случайной величиной, а для почти всех $\omega\in\Omega$ является неубывающей ограниченной функцией от x, причем $K(-\infty,\omega)=0$.

Полагая

$$h(t,x)=\begin{cases}\left(e^{itx}-1-\dfrac{itx}{1+x^2}\right)\dfrac{1+x^2}{x^2}, & x\neq 0,\\[2ex] -t^2/2, & x=0,\end{cases}$$

определим функцию

$$\psi(t)=\exp\{it\gamma+\int_{-\infty}^{\infty}h(t,x)\,dK(x)\}, \tag{4}$$

где γ – случайная величина, измеримая относительно $\mathscr{F}_0$. Тогда для почти всех $\omega\in\Omega$ функции $\psi(t)$ будет характеристической функцией безгранично делимого распределения [14].

Теперь введем обозначения, необходимые для формулировки основного результата. Пусть

$$\theta_i(n)=\mathsf{M}_{i-1\,n}[X_i(n)\chi(|X_i(n)|\leqslant\tau_i(n))],\quad Y_i(n)=X_i(n)-\theta_i(n),$$

$$f_j^{(n)}(t)=\mathsf{M}_{j-1\,n}e^{itX_j(n)},\qquad \varphi_j^{(n)}(t)=\mathsf{M}_{j-1\,n}e^{itY_j(n)},$$

$$B_i(n)=\mathsf{M}_{i-1\,n}\frac{Y_i(n)}{1+Y_i^2(n)},\qquad D_i(n)=\mathsf{M}_{i-1\,n}\frac{Y_i^2(n)}{1+Y_i^2(n)}.$$

Введем следующие условия: для любой точки $x\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ и некоторой $\mathscr{F}_0$-измеримой функции $K(x)$ при $n\to\infty$

$$K_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\nu_i(n)\,\mathsf{M}_{i-1\,n}\left[\frac{Y_i^2(n)}{1+Y_i^2(n)}\chi(Y_i(n)<x)\right]\xrightarrow{\mathbf{P}}K(x) \tag{5}$$

для некоторого семейства $C_i(n)$ случайных величин таких, что при любом $(i,n)\in\mathbf{N}^2$ величина $C_i(n)$ измерима относительно $F_{i-1}(n)$, и для некоторой $\mathscr{F}_0$-измеримой случайной величины γ при $n \to \infty$

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(n)\,[\theta_i(n) + B_i(n) - C_i(n)] \xrightarrow{\mathsf{P}} \gamma; \tag{6}$$

$$\epsilon_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(n)\,|\,1 - \varphi_i^{(n)}(t)|^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Теорема 1. *Если для любого $i = 1, \ldots, n$ случайная величина $\nu_i(n)$ измерима относительно $F_{i-1}(n)$ и для семейства $F_{i-1}(n)$-измеримых случайных величин $C_i(n)$ выполнены условия (5)–(7), то при $n \to \infty$*

$$S_n - \sum_{i=1}^{n} \nu_i(n)\,C_i(n) \xrightarrow{\mathsf{D}} W,$$

где распределение W является смесью безгранично делимых законов, характеристическая функция которой равна $\mathsf{M}\psi(t)$, $\psi(t)$ – функция, определенная соотношением (4).

§ 2. Доказательство основной теоремы

Следующее утверждение, по существу, является вспомогательным при доказательстве теоремы 1. Ввиду того, что оно представляет и независимый интерес, выделим его в качестве теоремы.

Теорема 2. *Пусть для любого $i = 1, \ldots, n$ величина $\nu_i(n)$ измерима относительно $F_{i-1}(n)$ и для семейства $F_{i-1}(n)$-измеримых случайных величин $L_i(n)$ и некоторого действительного t*

$$\prod_{j=1}^{n} \{ e^{-itL_j(n)} f_j^{(n)}(t) \}^{\nu_j(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \varphi(t), \quad n \to \infty, \tag{8}$$

где $\varphi(t)$ – комплексная $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина с почти всюду положительным модулем. Тогда

$$\mathsf{M}[\exp\{it(S_n - \sum_{j=1}^{n} L_j(n)\,\nu_j(n))\}\,|\,\mathcal{F}_0] \xrightarrow{\mathsf{P}} \varphi(t), \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 2. Положим

$$V_\tau^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n)\,X_k(n), \quad \tau \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty), \quad X_0^{(n)} = 0, \quad \nu_0(n) = 0. \tag{10}$$

Процесс $V_\tau^{(n)}$ можно представить в виде разности двух процессов с неубывающими траекториями:

$$V_\tau^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n)\,X_k^+(n) - \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n)\,X_k^-(n) = {}_1V_\tau^{(n)} - {}_2V_\tau^{(n)},$$

где

$$X_k^+(n) = X_k(n) \vee 0, \quad X_k^-(n) = -(X_k(n) \wedge 0).$$

Поскольку

$$\mathrm{Var}(V^{(n)})_\tau = \int_0^\tau |\,dV_s^{(n)}| = {}_1V_\tau^{(n)} + {}_2V_\tau^{(n)}$$

и величины $X_k(n)$ собственные, траектории процесса $V_s^{(n)}$ имеют ограниченные вариации в любом конечном отрезке $[0, \tau]$. Значит, $(V_\tau^{(n)}, F_{[n\tau]}(n))$ является семимартингалом [15, 16]. Вычислим триплет $T^n = (B^n, C^n, \pi^n)$. Находим, что мера скачков $V_\tau^{(n)}$ равна

$$\mu^{(n)}((0, \tau] \times \Gamma) = \sum_{k=0}^{[n\tau]} \chi(\nu_k(n) X_k(n) \in \Gamma), \tag{11}$$

где Γ – борелевское множество из $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Для любого борелевского множества Γ, не содержащего точку 0,

$$\{\nu_k(n) X_k(n) \in \Gamma\} = \{\nu_k(n) = 1\} \cap \{X_k(n) \in \Gamma\}.$$

Поэтому

$$\mu^{(n)}((0, \tau] \times \Gamma) = \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n) \chi(X_k(n) \in \Gamma), \tag{12}$$

и компенсатор этой меры скачков равен

$$\pi^{(n)}((0, \tau] \times \Gamma) = \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n) \mathsf{P}\{X_k(n) \in \Gamma \mid F_{k-1}(n)\}. \tag{13}$$

Здесь $F_{-1}(n) = \{\phi, \Omega\}$. Поэтому

$$B_\tau^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n) \mathsf{M}[X_k(n) \chi(|X_k(n)| \leqslant 1) \mid F_{k-1}(n)]. \tag{14}$$

Поскольку непрерывная часть семимартингала $V_\tau^{(n)}$ равна нулю, $C_\tau^{(n)} \equiv 0$.

Вычислим теперь стохастическую экспоненту $V_\tau^{(n)}$. Пусть

$$\pi_{kn}(x) = \mathsf{P}\{X_k(n) \leqslant x \mid F_{k-1}(n)\}.$$

Тогда (см. [15, с. 256]) учитывая (13), получим, что

$$G_\tau^n(t) = itB_\tau^n + \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n) \int_{R_0} (e^{itx} - 1 - itx\chi(|x| \leqslant 1)) \pi_{kn}(dx). \tag{15}$$

Легко видеть, что почти всюду

$$\int_{R_0} x\chi(|x| \leqslant 1) \pi_{kn}(dx) = \mathsf{M}[X_k(n) \chi(|X_k(n)| \leqslant 1) \mid F_{k-1}(n)] \tag{16}$$

$$\int_{R_0} (e^{itx} - 1) \pi_{kn}(dx) = \mathsf{M}[(e^{itX_k(n)} - 1) \mid F_{k-1}(n)]. \tag{17}$$

Из соотношений (15)–(17) следует, что

$$G_\tau^n(t) = \sum_{k=0}^{[n\tau]} \nu_k(n) \mathsf{M}[(e^{itX_k(n)} - 1) \mid F_{k-1}(n)].$$

Отсюда, по определению стохастической экспоненты, получим, что

$$\epsilon_\tau(G_\tau^n(t)) = e^{G_\tau^n(t)} \prod_{0 \leqslant s \leqslant \tau} (1 + \Delta G_s^n(t)) e^{-\Delta G_s^n(t)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{[n\tau]} [1 + \nu_k(n) \mathsf{M}[(e^{itX_k(n)} - 1) \mid F_{k-1}(n)]].$$

Очевидно, что случайная величина под знаком произведения при всех $\omega \in \Omega$ равна

$f_{kn}^{\nu_k(n)}(t)$. Поэтому

$$\epsilon_\tau(G_\tau^n(t)) = \prod_{k=0}^{[n\tau]} f_{kn}^{\nu_k(n)}(t). \tag{18}$$

Значит, в силу условия (8)

$$\epsilon_1(G_1^n(t)) \xrightarrow{\mathsf{P}} \varphi(t).$$

Так как функция $\varphi(t)$ измерима относительно $\mathcal{F}_0$, в силу [15, теорема 4.4.1] семимартингал V_τ с такой стохастической экспонентой является процессом с $\mathcal{F}_0$-независимыми приращениями. Поэтому ([15, с. 256])

$$\varphi(t) = \epsilon_1(G_1(t)) = \mathsf{M}[e^{itV_1} \mid \mathcal{F}_0].$$

Далее, в силу [15, теорема 5.1.1]

$$\mathsf{M}[e^{itV_1^{(n)}} \mid F_{n-1}(n)] \xrightarrow{\mathsf{P}} \varphi(t), \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из теоремы о сходимости под знаком условных математических ожиданий ([25], с. 232) получаем, что при $n \to \infty$

$$\mathsf{M}[e^{itS_n} \mid \mathcal{F}_0] \xrightarrow{\mathsf{P}} \varphi(t),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. В силу теоремы 2 достаточно доказать, что при условиях (5) – (7) для любого t

$$\prod_{k=1}^{n} \{e^{-itC_k(n)} f_k^{(n)}(t)\}^{\nu_k(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \psi(t) \tag{19}$$

при $n \to \infty$, где $\psi(t)$ при любом t – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, определенная в (4).

Из условия (5) следует, что найдется такая положительная $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина T, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) D_k(n) > T\} = 0 \tag{20}$$

(достаточно взять $T > 2K(+\infty)$ почти всюду).

Введем события

$$\mathcal{B}_k(n) = \{\sum_{i=1}^{k} \nu_i(n) D_i(n) \leqslant T\}$$

и определим случайные величины $Y_k^*(n) = Y_k(n)\,\chi(\mathcal{B}_k(n))$. Ясно, что для любого $k \leqslant n$ и $n \in \mathbf{N}$ $\mathcal{B}_k(n) \in F_{k-1}(n)$ и $\mathcal{B}_k(n) \subseteq \mathcal{B}_{k-1}(n)$. Введем обозначения для характеристик $Y_k^*(n)$, снабдив соответствующие характеристики $Y_k(n)$ звездочкой. Покажем, что для любых n и $m \leqslant n$

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k(n) D_k^*(n) \leqslant T \tag{21}$$

почти всюду. Из определения величин $Y_k^*(n)$ следует равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \nu_k(n) D_k^*(n) = \sum_{k=1}^{m} \nu_k(n)\,\chi(\mathcal{B}_k(n))\,D_k(n). \tag{22}$$

Очевидно, что

$$\nu_1(n) D_1^*(n) = \nu_1(n) D_1(n)\,\chi(\mathcal{B}_1(n)) \leqslant T$$

почти всюду. Если (21) выполняется для некоторого $m < n$, то из соотношения

$$\sum_{k=1}^{m+1} \nu_k(n) D_k^*(n) = \sum_{k=1}^{m} \nu_k(n) D_k^*(n) + \nu_{m+1}(n) \chi(\mathcal{B}_{m+1}(n)) D_{m+1}(n)$$

с учетом (22) и того, что $\mathcal{B}_{m+1}(n) \subset \mathcal{B}_m(n) \subset \ldots \subset \mathcal{B}_1(n)$, следует справедливость (21) для $m+1$. Таким образом, (21) верно для любого $m \leqslant n$.

Покажем теперь, что для $Y_k^*(n)$ выполняются условия (5) – (7). В соотношении

$$K_n^*(x) = K_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) \mathsf{M}_{k-1\,n} \left[\frac{Y_k^2(n)}{1+Y_k^2(n)} \chi(Y_k(n) < x)\, \chi(\bar{\mathcal{B}}_k(n)) \right]$$

второе слагаемое правой части при $n \to \infty$ по вероятности сходится к нулю. Действительно, $\bar{\mathcal{B}}_k(n) \in F_{k-1}(n)$ и для любого $k \leqslant n$

$$\bar{\mathcal{B}}_k(n) \subseteq \{ \sum_{j=1}^{n} \nu_j(n) D_j(n) > T \},$$

а вероятность последнего события стремится к нулю при $n \to \infty$. Далее, так как для $k \leqslant n$

$$\theta_k^*(n) = \chi(\mathcal{B}_k(n))\, \theta_k(n), \quad B_k^*(n) = \chi(\mathcal{B}_k(n))\, B_k(n), \tag{23}$$

то при $C_k^*(n) = \chi(\mathcal{B}_k(n))\, C_k(n)$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant \gamma_n - \gamma_n^* \leqslant \chi(\sum_{j=1}^{n} \nu_j(n) D_j(n) > T)\, \gamma_n,$$

и условие (6) выполняется для γ_n^*. Используя тождество

$$\varphi_k^{(n)*}(t) = \chi(\mathcal{B}_k(n))\, \varphi_k^{(n)}(t) + \chi(\bar{\mathcal{B}}_k(n)), \tag{24}$$

убедимся в том, что условие (7) также выполняется для $\varphi_k^{(n)*}(t)$.

Положим $f_k^{(n)*}(t) = \mathsf{M}_{k-1\,n} e^{itX_k^*(n)}$, $X_k^*(n) = X_k(n)\, \chi(\mathcal{B}_k(n))$; из определения величин $C_k^*(n)$ следует, что

$$\{ \prod_{k=1}^{n} \{ e^{-itC_k^*(n)} f_k^{(n)*}(t) \}^{\nu_k(n)} \neq \prod_{k=1}^{n} \{ e^{-itC_k(n)} f_k^{(n)}(t) \}^{\nu_k(n)} \} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{ \nu_k(n) = 1 \} \cap \{ \{ X_k^*(n) \neq X_k(n) \} \cup \{ C_k^*(n) \neq C_k(n) \} \} \subseteq$$

$$\subseteq \{ \sum_{j=1}^{n} \nu_j(n) D_j(n) > T \}.$$

Значит, достаточно доказать сходимость

$$H_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \{ e^{-itC_k^*(n)} f_k^{(n)*}(t) \}^{\nu_k(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \psi(t) \tag{25}$$

при $n \to \infty$. Используя соотношение

$$f_k^{(n)*}(t) = \exp\{ it\theta_k^*(n) \}\, \varphi_k^{(n)*}(t),$$

с помощью элементарных преобразований получим равенство

$$\ln H_n(t) = it\gamma_n^* + \epsilon_1(n) + \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) \mathsf{M}_{k-1\,n} \left[h(t, Y_k^*(n)) \frac{Y_k^{*2}(n)}{1+Y_k^{*2}(n)} \right], \tag{26}$$

где $|\epsilon_1(n)| \leqslant \epsilon^*(n)$, $\epsilon^*(n)$ – сумма из аналога условия (7) для $\varphi_k^{(n)*}(t)$. Из условий (6) и (7) следует, что сумма первых двух слагаемых в (26) при $n \to \infty$ по вероятности сходится к $it\gamma$. Нам остается доказать, что третье слагаемое в (26) при $n \to \infty$ по вероятности сходится к стохастическому интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t,x)\, dK(x). \tag{27}$$

Ввиду непрерывности и ограниченности $h(t, x)$ по x, интеграл Лебега–Стилтьеса (27) может быть рассмотрен как несобственный интеграл Римана–Стилтьеса.

Пусть ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 – некоторые сколь угодно малые положительные числа, натуральное число m и точки $x_k \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, таковы, что $x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_m$,

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |x_j - x_{j-1}| < \epsilon_1, \qquad \max_{1 \leqslant j \leqslant m} |h(t, x_j) - h(t, x_{j-1})| < \epsilon_2,$$

$$K(x_0) < \epsilon_2, \qquad K(+\infty) - K(x_m) < \epsilon_2,$$

$$\left| \sum_{j=1}^{m} h(t, x_{j-1})[K(x_j) - K(x_{j-1})] - \int_{-\infty}^{\infty} h(t,x)\, dK(x) \right| < \epsilon_3 \tag{28}$$

почти всюду. Ввиду ограниченности $h(t, x)$ найдется такое $C(t)$, что $|h(t, x)| \leqslant$ $\leqslant C(t)$ для всех x при фиксированном t.

Представим сумму в (26) в виде суммы трех слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k(n)\, \mathsf{M}_{k-1\, n}\left[h(t, Y_k^*(n))\, \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)}\, \chi(Y_k^*(n) \leqslant x_0)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n)\, \mathsf{M}_{k-1\, n}\left[h(t, Y_k^*(n))\, \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)}\, \chi(Y_k^*(n) > x_m)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) \sum_{j=1}^{m} \mathsf{M}_{k-1\, n}\left[h(t, Y_k^*(n))\, \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)}\, \chi(E_k(n,j))\right], \tag{29}$$

где $E_k(n, j) = \{x_{j-1} < Y_k^*(n) \leqslant x_j\}$. Модуль первого слагаемого в (29) почти всюду меньше величины $C(t)\, K_n^*(x_0)$, которая сходится по вероятности при $n \to \infty$ и фиксированном x_0 к величине $C(t) K(x_0) < C(t)\epsilon_2$. Аналогично, модуль второго слагаемого почти всюду не превосходит величины $C[K_n^*(\infty) - K_n^*(x_m)]$, которая по вероятности сходится к $C(t)\, [K(\infty) - K(x_m)] < C(t)\epsilon_2$ при $n \to \infty$ и фиксированном x_m.

Если через $\epsilon_2(m, n)$ обозначить разность третьего слагаемого в (29) и интеграла (27), то

$$\epsilon_2(m,n) = \epsilon_3(m,n) + \epsilon_4(m,n) + \epsilon_5(m), \tag{30}$$

где

$$\epsilon_3(m,n) = \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) \sum_{j=1}^{m} \mathsf{M}_{k-1\, n}\left[h(t, Y_k^*(n))\, \frac{Y_k^{*2}(n)}{1 + Y_k^{*2}(n)}\, \chi(E_k(n,j))\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} h(t, x_{j-1})[K_n^*(x_j) - K_n^*(x_{j-1})],$$

$$\epsilon_4(m,n) = \sum_{j=1}^{m} h(t, x_{j-1})[K_n^*(x_j) - K(x_j) + K_n^*(x_{j-1}) - K(x_{j-1})],$$

$\epsilon_5(m)$ – разность из соотношения (28).

Учитывая выбор точек x_j и свойство (21) величин $Y_k^*(n)$, получим, что почти всюду для всех n

$$|\epsilon_3(m,n)| \leqslant \epsilon_2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) D_k^*(n) \leqslant \epsilon_2 T. \tag{31}$$

Наконец, в силу условия (5) при любом фиксированном разбиении и $n \to \infty$ величина $\epsilon_4(n,m)$ по вероятности сходится к нулю. Чтобы получить нужную нам сходимость, сначала выберем разбиение $x_0, \ldots, x_m$ таким, что $(2C(t)+T)\epsilon_2 + \epsilon_3 < \epsilon$, затем, зафиксировав это разбиение, устремим n к бесконечности и получим, что разность третьего слагаемого в (26) и интеграла (27) по вероятности сходится к нулю. Теорема 1 доказана.

Приведем теперь результат в случае конечной дисперсии. Предположим, что для любой пары $(k,n) \in \mathbf{N}^2$ почти всюду

$$\mathsf{M}_{k-1\,n}[X_k^2(n)] < \infty. \tag{32}$$

Тогда, если $Y_k(n) = X_k(n) - \mathsf{M}_{k-1\,n}[X_k(n)]$, то $\mathsf{M}_{k-1\,n}[Y_k(n)] = 0$. Значит, стохастическая последовательность $(Y_k(n),\ F_k(n))$, где $F_k(n) = \prod_{i=1}^{k} \mathscr{F}_i(n)$, образует мартингал-разность.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_k^2(n) = \mathsf{M}_{k-1\,n}[Y_k^2(n))], \qquad \theta_k(n) = \mathsf{M}_{k-1\,n}[X_k(n)],$$

$$L(t,x) = \begin{cases} (e^{itx} - 1 - itx)x^{-2}, & x \neq 0, \\ -t^2/2, & x = 0. \end{cases}$$

Положим также

$$\pi(t) = \exp\{\, it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} L(t,x)\, dK(x) \,\},$$

где γ – некоторая $\mathscr{F}_0$-измеримая случайная величина, $K(x)$ – та же функция, что и в (4).

Теорема 3. *Пусть для любого $k = 1, \ldots, n$ случайная величина $\nu_k(n)$ измерима относительно $F_{k-1}(n)$, для последовательности положительных постоянных B_n существует конечная $\mathscr{F}_0$-измеримая случайная величина T такая, что при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\{B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) \sigma_k^2(n) > T\} \to 0, \qquad \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \nu_k(n)\sigma_k^2(n) B_n^{-2} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{33}$$

Тогда, если для некоторого семейства $F_{k-1}(n)$-измеримых случайных величин $C_k(n)$

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) \left[\frac{1}{B_n} \theta_k(n) - C_k(n) \right] \xrightarrow{\mathsf{P}} \gamma, \quad n \to \infty, \tag{34}$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) \mathsf{M}_{k-1\,n}[Y_k^2(n)\, \chi(Y_k(n) < xB_n)] \xrightarrow{\mathsf{P}} K(x) \tag{35}$$

при $n \to \infty$ для любого $x \in \mathbf{R}$, то

$$\frac{1}{B_n} S_n - \sum_{k=1}^{n} \nu_k(n) C_k(n) \xrightarrow{\mathsf{D}} \omega,$$

где ω имеет характеристическую функцию $\mathsf{M}\pi(t)$.

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 2 и следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть для последовательности случайных величин* $\nu_k(n)$, $k = 1, \ldots, n$, *принимающих значения* 0 *и* 1, *выполнены условия* (33)–(35). *Тогда при* $n \to \infty$

$$\prod_{k=1}^{n} \left\{ e^{-itC_k(n)} f_k^{(n)}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right\}^{\nu_k(n)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \pi(t).$$

§ 3. Ветвящиеся процессы с обобщенной иммиграцией

Рассматриваемая нами схема возникла в связи с задачами теории ветвящихся случайных процессов. Используя теоремы 1–3, можно изучить различные модели ветвящихся процессов с иммиграцией, в которых процессы размножения и иммиграции могут быть определенным образом зависимыми. Можно также рассмотреть процессы, в которых размножение частиц внутри каждого "семейства" происходит независимо, а эволюции потомств разных "частиц-иммигрантов" могут зависеть друг от друга, и т.д.

В качестве примера рассмотрим процесс с иммиграцией, вся эволюция которого зависит от состояния случайной среды в начале процесса и не зависит от состояния среды в другие моменты времени. Пусть $\{\mu_{ik}(n)\}$ – (не обязательно независимые) ветвящиеся случайные процессы с дискретным временем, задаваемые производящими функциями числа непосредственных потомков $f_{ik}(s)$, $|s| \leqslant 1$.

Предположим, что производящие функции $f_{ik}(s)$ при фиксированном s являются $\mathcal{F}_0$-измеримыми случайными величинами, где $\mathcal{F}_0$ – σ-алгебра, относительно которой измеримо состояние случайной среды в момент начала процесса. В момент времени k происходит иммиграция случайного числа частиц $\eta_k(n)$. Через $Z(n)$ обозначим число частиц в момент n при условии, что в начале прòцесса не было частиц.

Нетрудно видеть, что описанный процесс укладывается в рассмотренную выше схему и может быть представлен в виде

$$Z(n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\eta_k(n)} \mu_{ik}(n-k), \tag{36}$$

где $\mu_{ik}(n)$ – процесс, начавшийся от i-й из иммигрировавших в момент k частиц.

Пусть $\mathcal{F}_{ik}(n)$, $(i, k, n) \in \mathbf{N}^3$, – σ-алгебры, порожденные величинами $\mu_{ik}(n-k)$, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{11}(n)$ при любом $n \in \mathbf{N}$.

Предположим, что при фиксированном начальном состоянии случайной среды иммигрировавшие частицы размножаются по процессу Гальтона–Ватсона независимо друг от друга, а числа иммигрирующих частиц $\eta_k(n)$ таковы, что для любого j

$$\{\eta_k(n) \leqslant j\} \in F_{jk}(n) = \prod_{l=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{\eta_l(n)} \mathcal{F}_{il}(n) \times \prod_{i=1}^{j} \mathcal{F}_{ik}(n) \times \mathcal{F}_0, (k, n) \in \mathbf{N}^2. \tag{37}$$

Здесь и в дальнейшем $\prod_{i=1}^{0} \mathcal{F}_{ik}(n) = \{\Omega, \phi\}$ для любых k, n.

В дальнейшем целочисленную случайную величину $\eta_k(n)$, удовлетворяющую условию (37), назовем *двойным моментом остановки* относительно системы $\{F_{jk}(n), (j, k, n) \in \mathbf{N}^3\}$.

Положим

$$\mathsf{M}_{jkn}[\xi] = \mathsf{M}[\xi \mid F_{jk}(n)].$$

В наших предположениях для $(j, k, n) \in \mathbf{N}^3$

$$\mathsf{M}_{j-1\,kn} e^{it\mu_{jk}(n-k)} = \mathsf{M}[e^{it\mu_{jk}(n-k)} \mid \mathcal{F}_0] = f_{jk}^{(n-k)}(e^{it}), \tag{38}$$

где $f_{jk}^{(n)}(s)$ — n-я функциональная итерация $f_{jk}(s)$ и процессы $\mu_{jk}(\cdot)$ при фиксированном начальном состоянии случайной среды условно независимы.

Используя (38), стандартными вычислениями находим, что

$$\mathsf{M}[\mu_{ik}(n)|\,\mathcal{F}_0] = a_{ik}^n, \qquad a_{ik} = \mathsf{M}[\mu_{ik}(1)|\,\mathcal{F}_0],$$

$$\mathsf{D}[\mu_{ik}(n)|\,\mathcal{F}_0] = \mathsf{D}[\mu_{ik}(1)|\,\mathcal{F}_0]\left[\frac{a_{ik}^n(1-a_{ik}^n)}{a_{ik}(1-a_{ik})}\,\chi(a_{ik}\neq 1) + n\chi(a_{ik}=1)\right]. \tag{39}$$

Для упрощения выкладок предположим, что $f_{ik}(s)$ совпадают при разных i, т.е. одновременно иммигрировавшие частицы размножаются по одному и тому же закону распределения. Введем обозначения $a_{ik} = a_k$, $b(k) = \mathsf{D}[\mu_{ik}(1)\,|\,\mathcal{F}_0]$, определим события

$$\mathcal{B}_D(k) = \{a_k < 1\}, \qquad \mathcal{B}_K(k) = \{a_k = 1\}, \qquad \mathcal{B}_H(k) = \{a_k > 1\}$$

и предположим, что

$$\sup_k a_k < \infty, \quad 0 < \inf_k b(k) \leqslant \sup_k b(k) < \infty. \tag{40}$$

Пусть для некоторых последовательностей положительных чисел A_n и C_n при $n \to \infty$ выполняются условия

$$\frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(n)\,\chi(\mathcal{B}_K(k)) - A_n \xrightarrow{\mathsf{P}} \gamma, \tag{41}$$

$$\frac{1}{C_n^2}\sum_{k=1}^{n}\eta_k(n)\,\chi(\mathcal{B}_K(k))\,b(k)(n-k) \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma^2, \tag{42}$$

$$\frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n}\chi(\mathcal{B}_D(k)\cup\mathcal{B}_H(k))\,a_k^{n-k}\,\eta_k(n) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \tag{43}$$

где σ^2, γ — $\mathcal{F}_0$-измеримые случайные величины и $\sigma^2 > 0$ почти всюду.

Теорема 4. *Если выполнены условия* (40)–(43), $\eta_k(n)$ *является двойным моментом остановки относительно* $\{F_{jk}(n)\}$ *и для любого* $\epsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{n}\eta_k(n)\,\chi(\mathcal{B}_K(k))\mathsf{M}\left[\left(\frac{\mu_{1k}(n-k)-1}{C_n}\right)^2\chi\left(\left|\frac{\mu_{1k}(n-k)-1}{C_n}\right|\geqslant\epsilon\right)\Big|\,\mathcal{F}_0\right]\xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \tag{44}$$

то $Z(n)/C_n - A_n \xrightarrow{\mathsf{D}} Z$, *где* $\mathsf{M}\,e^{itZ} = \mathsf{M}\,e^{it\gamma - t^2\sigma^2/2}$

Замечание. Из совокупности условий (41)–(43) следует, что асимптотическое поведение процесса определяется частицами, дающими начало критическим процессам. Однако, изменив эти условия соответствующим образом, можно получить аналогичные теоремы и для докритических и надкритических процессов.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим соотношение

$$Z(n)/C_n = W_1(n) + W_2(n) + W_3(n), \tag{45}$$

где

$$W_1(n) = \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n}\chi(\mathcal{B}_K(k))\sum_{i=1}^{\eta_k(n)}\mu_{ik}(n-k),$$

$$W_2(n) = \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n}\chi(\mathcal{B}_D(k))\sum_{i=1}^{\eta_k(n)}\mu_{ik}(n-k),$$

$$W_3(n) = \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n}\chi(\mathcal{B}_H(k))\sum_{i=1}^{\eta_k(n)}\mu_{ik}(n-k).$$

Из замечания, сделанного во введении, следует, что если

$$X_{kN_n+j}(n) = \mu_{jk+1}(n-k), \quad \nu_{kN_n+j}(n) = \chi(j \leqslant \eta_{k+1}(n)),$$
$$j = 1, \dots, N_n, \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{46}$$

то

$$\chi(\bar{\mathcal{M}}_n)\, W_1(n) = \chi(\bar{\mathcal{M}}_n)\, W_1^*(n), \tag{47}$$

где $\mathcal{M}_n$ – определенные во введении события и

$$W_1^*(n) = \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^{n} \chi(\mathcal{B}_K(k)) \sum_{j=1}^{N_n} \nu_{kN_n+j}(n)\, X_{kN_n+j}(n-k).$$

Докажем, что для $W_1^*(n)$ выполняются условия теоремы 3. Действительно, из условия (42) с учетом (39) и (44) следует, что условие (33) выполняется для любой случайной величины $T \geqslant \sigma^2 + 1$ почти всюду. Далее, используя (42) и (44), получим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k(n)\, \chi(\mathcal{B}_K(k))\, \mathsf{M}\left[\left(\frac{\mu_{1k}(n-k)-1}{C_n}\right)^2 \chi\left(\left|\frac{\mu_{1k}(n-k)-1}{C_n}\right| < \epsilon\right) \Big| \mathcal{F}_0\right] \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma^2$$

при $n \to \infty$ и любом $\epsilon > 0$. Значит, условие (35) также выполняется, причем $K(x) = 0$, когда $x < 0$; $K(x) = \sigma^2$, когда $x \geqslant 0$.

Из условия (43) и неравенства Чебышева следует, что последние две величины в (45) по вероятности сходятся к нулю при $n \to \infty$.Тогда из (45), теоремы 3 и неравенства

$$|\mathsf{P}\{\xi\chi < x\} - \mathsf{P}\{\xi < x\}| \leqslant \mathsf{P}\{\chi = 0\}, \tag{48}$$

справедливого для любой случайной величины ξ и любого индикатора χ, получим утверждение теоремы. Теорема 4 доказана.

Чтобы сформулировать следующую теорему для $Z(n)$, обозначим $\rho_n(x, y) =$
$= n(1-x)\chi(\mathcal{B}_k([nx]))\mathsf{P}\left\{\dfrac{\mu_{[nx]}([n(1-x)])}{n(1-x)} > y \,|\, \mathcal{F}_0\right\}$, $T_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{[nx]} \eta_i(n)\,\chi(\mathcal{B}_K(k))$

и введем новые условия. Пусть при $n \to \infty$

$$\rho_n(x, y) \xrightarrow{\mathsf{P}} \frac{1}{r(x)}\, e^{-y/r(x)}, \tag{49}$$

равномерно по $x \in (0, a]$ для любого a и y, случайная величина $r(x)$ при любом x $\mathcal{F}_0$-измерима,

$$T_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} T(x) \tag{50}$$

при $n \to \infty$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$, где $T(x)$ – некоторый $\mathcal{F}_0$-измеримый стохастический непрерывный при $x = 1$ случайный процесс с неубывающими траекториями, $T(0) = 0$ и $T(1) < \infty$ почти всюду.

Введем случайную функцию

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \exp\left\{-\frac{x}{r(u)(1-u)}\right\} \frac{dT(u)}{r(u)(1-u)}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть $\eta_k(n)$ является двойным моментом остановки относительно $\{F_{jk}(n)\}$, выполнено* (40) *и условие* (43) *для $C_n = n$. Тогда при условиях* (49), (50)

$$Z(n)/n \xrightarrow{\mathsf{D}} Z$$

при $n \to \infty$, где характеристическая функция Z имеет вид

$$\mathsf{M}\, e^{itZ} = \mathsf{M} \exp\left\{-\int_0^\infty (e^{itx} - 1)\, dF(x)\right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение (45), полагая в нем $C_n = n$. Покажем, что случайные величины $W_1^*(n)$ из (47) удслетворяют условиям теоремы 3. Действительно, так как случайные величины $b(k)$ равномерно ограничены, то из (50) следует, что условия (33) и (34) выполняются, при этом $\gamma = T(1)$, и в качестве T можно взять любую случайную величину такую, что $T \geqslant T(1) + 1$.

Остается доказать выполнение условия (35). Рассмотрим сумму

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\eta}_k(n)\, \mathsf{M}\left[\left(\frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n}\right)^2 \chi\left(\frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} < y\right) \Big|\, \mathscr{F}_0\right], \tag{51}$$

где $\hat{\eta}_k(n) = \eta_k(n)\,\chi(\mathscr{B}_K(k))$, $\hat{\mu}_k(n-k) = \mu_{1k}(n-k) - 1$.

Предположим, что $y > 0$, и выберем $\epsilon \in (0, 1)$. Отрезок $[0, y]$ разобьем на части точки $0 < x_0 < \ldots < x_m = y$ такими, что $x_j - x_{j-1} < \epsilon$, $x_0 \leqslant \epsilon$. Тогда

$$S_1(n) = S_2(n, m) + \epsilon_1(n, m) + \epsilon_2(n, m), \tag{52}$$

где

$$S_2(n, m) = \sum_{j=1}^{m} x_{j-1}^2 \sum_{k=1}^{n} \hat{\eta}_k(n)\, \mathsf{P}\left\{x_{j-1} < \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leqslant x_j \Big|\, \mathscr{F}_0\right\},$$

$$|\epsilon_1(n, m)| \leqslant 2\epsilon y \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \hat{\eta}_k(n)\, \mathsf{P}\left\{x_{j-1} < \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leqslant x_j \Big|\, \mathscr{F}_0\right\},$$

$$\epsilon_2(n, m) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\eta}_k(n)\, \mathsf{M}\left[\left(\frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n}\right)^2 \chi\left(-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leqslant x_0\right) \Big|\, \mathscr{F}_0\right].$$

Покажем, что при $n \to \infty$ и любом $x > 0$

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} \hat{\eta}_k(n)\, \mathsf{P}\{\hat{\mu}_k(n-k) > xn \mid \mathscr{F}_0\} \xrightarrow{\mathsf{P}} F(x). \tag{53}$$

Для этого представим $S_3(n)$ в виде

$$S_3(n) = S'_3(n) + S''_3(n) + S'''_3(n), \tag{54}$$

где

$$S'_3(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \exp\left\{-\frac{xn}{r\left(\frac{k}{n}\right)(n-k)}\right\} \frac{\hat{\eta}_k(n)}{r\left(\frac{k}{n}\right)(n-k)},$$

$$S''_3(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \Big[\mathsf{P}\{\hat{\mu}_k(n-k) > xn \mid \mathscr{F}_0\}\,(n-k) -$$

$$- \frac{1}{r(\frac{k}{n})} \exp\left\{- \frac{xn}{r(\frac{k}{n})(n-k)}\right\}\Bigg] \frac{\hat{\eta}_k(n)}{n-k},$$

$$S_3'''(n) = \sum_{k=[n(1-\epsilon)]+1}^{n} \hat{\eta}_k(n) \, \mathsf{P}\{\hat{\mu}_k(n-k) > xn \mid \mathcal{F}_0\}.$$

Оценки слагаемых в (54) проведем в обратном порядке. С помощью неравенства Чебышева легко получим, что

$$S_3'''(n) \leqslant \frac{1}{x} [T_n(1) - T_n(1-\epsilon)] \xrightarrow{\mathsf{P}} [T(1) - T(1-\epsilon)] \frac{1}{x} \tag{55}$$

при $n \to \infty$. Представляя второе слагаемое в виде

$$S_3''(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \Bigg[\rho_{\left[n\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]}\left(\frac{k}{n}, \frac{x}{1-\frac{k}{n}}\right) -$$

$$- \frac{1}{r\left(\frac{k}{n}\right)} \exp\left\{- \frac{x}{r\left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}\right\}\Bigg] \frac{\hat{\eta}_k(n)}{n-k},$$

убедимся в том, что справедлива оценка

$$|S_3''(n)| \leqslant \sup_m \sup_t \sup_z |\rho_m(t, z) - \frac{1}{r(t)} \exp\left\{\frac{z}{r(t)}\right\} | \, \epsilon^{-1} T_n(1-\epsilon),$$

где $m \in [n\epsilon, n]$, $t \in [0, \ 1-\epsilon]$, $z \in [x, x\epsilon^{-1}]$.

Отсюда и из условия (49) следует, что при $n \to \infty$ и любом x и ϵ

$$S_3''(n) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{56}$$

Наконец, так как $T_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} T(x)$ при $n \to \infty$, сумма

$$S'_3(n) = \sum_{k=1}^{[n(1-\epsilon)]} \exp\left\{- \frac{x}{r(\frac{k}{n})\left(1-\frac{k}{n}\right)}\right\} \frac{T_n\left(\frac{k}{n}\right) - T_n\left(\frac{k-1}{n}\right)}{r(\frac{k}{n})\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

при $n \to \infty$, любом $\epsilon \in (0, 1)$ и фиксированном x сходится по вероятности к интегралу

$$\int_0^{1-\epsilon} \exp\left\{- \frac{x}{r(u)(1-u)}\right\} \frac{dT(u)}{r(u)(1-u)}$$

Таким образом, из (54)–(56) ввиду стохастической непрерывности $T(x)$ в точке 1 получим (53).

Из (53) следует, что при $n \to \infty$ и фиксированном разбиении $\{x_j\}$ оценивающая $|\epsilon_1(n, m)|$ величина сходится по вероятности к $2\epsilon y[F(x_0) - F(y)]$. Далее, используя равенство

$$\left\{-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leqslant x_0\right\} = \{\hat{\mu}_k(n-k) = -1\} \cup \left\{0 \leqslant \frac{\hat{\mu}_k(n-k)}{n} \leqslant x_0\right\},$$

получим, что $\epsilon_2(n, m)$ не превосходит величину, по вероятности сходящуюся к $\epsilon T(1)$.

Теперь $S_1(n)$ из (52) можно представить в виде

$$S_1(n) = -\int_0^y x^2 dF(x) + \sum_{i=1}^4 \epsilon_i(n, m), \tag{57}$$

где $\epsilon_1(n, m)$ и $\epsilon_2(n, m)$ определены в (52),

$$\epsilon_3(n, m) = \int_0^y x^2 dF(x) - \sum_{j=1}^m x_{j-1}^2 [F(x_j) - F(x_{j-1})],$$

$$\epsilon_4(n, m) = S_2(n, m) - \sum_{j=1}^m x_{j-1}^2 [F(x_{j-1}) - F(x_j)].$$

С помощью (57) и оценок величин, входящих в (57), получим, что для любого $\delta > 0$ величину ϵ можно подобрать такой, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{|S_1(n) + \int_0^y x^2 dF(x)| > \delta\} = 0,$$

т.е. условие (35) теоремы 3 выполняется. При этом

$$K(y) = -\int_0^y x^2 dF(x).$$

Чтобы получить утверждение теоремы, достаточно учесть, что

$$\gamma = T(1), \qquad \int_0^\infty x dF(x) = T(1),$$

и тот факт, что второе и третье слагаемые соотношения (45) сходятся по вероятности к нулю при $n \to \infty$ ввиду условия (43). Теорема доказана.

В отличие от традиционных процессов с иммиграцией, рассматриваемая нами схема, кроме "критических" частиц, допускает также "докритические" и "надкритические" частицы. Если выполнено условие (43), то эти частицы не влияют на ход процесса. Интересно выяснить, в каких границах это происходит.

Пример 1. Пусть $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, величины $\eta_k(n) = \alpha(k) = \alpha(1)$, $k \geqslant 1$, – детерминированные, а надкритические процессы имеют одно и то же среднее числа потомков $a > 1$. Ясно, что иммиграция надкритических частиц в начале процесса приводит к нарушению условия (43). Но если они иммигрировали в конце, например, в промежутке $[n - L(n), n]$, то условие (43) теоремы 5 может выполняться. Действительно, тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha(k) a^{n-k} \chi(\mathcal{B}_H(k)) \sim \frac{\alpha(1)}{n} \sum_{k=n-L(n)}^n a^{n-k} \sim \text{const} \frac{a^{L(n)}}{n}, \quad n \to \infty.$$

Значит, надкритические частицы, иммигрировавшие в промежутке $[n - C_0 \log_a n, n]$, когда $C_0 < 1$, не меняют асимптотическое поведение процесса. Но если хотя бы одна частица иммигрировала в таком промежутке с $C_0 \geqslant 1$, то асимптотическое поведение процесса может измениться.

Такие же рассуждения относительно докритических частиц показывают, что в случае стационарной иммиграции они никак не могут повлиять на асимптотическое поведение процесса. Но если они иммигрировали в большом количестве (растущая иммиграция) перед моментом наблюдения, то поведение процесса может измениться.

Следующий пример относится к случаю, когда критические процессы имеют разные распределения числа потомков.

Пример 2. Пусть $\mathcal{F}_0 = (\phi, \Omega)$, $T(u) = \lambda u$, λ – некоторое положительное число и $f_k(s)$ имеют два вида:

$$f_{2k+1}(s) = f_1(s), \quad f_{2k}(s) = f_0(s), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Тогда из предельной теоремы для критических процессов следует, что

$$\rho_n(2k+1, y) \to \frac{1}{b(1)} e^{-y/b(1)}, \quad \rho_n(2k, y) \to \frac{1}{b(0)} e^{-y/b(0)}$$

при $n \to \infty$, $k = 0, 1, \ldots$ Несложные вычисления показывают, что в этом случае

$$F(x) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b(n)} \int_{n+1}^{n+2} e^{-xu/b(n)} \frac{du}{u},$$

и предельная характеристическая функция в теореме 5 будет иметь вид

$$\mathsf{M}\, e^{itz} = \exp\left\{ \lambda \int_0^{\infty} \frac{e^{itx} - 1}{x} \left[\frac{e^{-x/b(0)}}{b(0)(1 + e^{-x/b(0)})} + \frac{e^{-2x/b(1)}}{b(1)(1 + e^{-x/b(1)})} \right] dx \right\}.$$

Теперь приведем одно следствие теоремы 5. Пусть, как и прежде, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, $\eta_k(n)$ при любом k – момент остановки относительно системы $\{\mathcal{F}_0 \times \prod_{j=1}^{i} \mathcal{F}_{jk}(n),\ i \in \mathbf{N}\}$ и, кроме того, они имеют одно и то же распределение при разных k и n, $f_k(s) = f(s)$, $k = 0, 1, \ldots$

Из предположения $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ следует, что иммигрировавшие частицы эволюционируют независимо друг от друга. Поэтому величина $\eta_k(n)$ и процессы $\{\mu_{ij}(n), i, j \in \mathbf{N}^2, j \neq k\}$ являются независимыми.

Следствие 1. *Если* $f'(1) = 1$, $b = f''(1)/2 \in (0, \infty)$, $\alpha = M\eta_k(n) \in (0, \infty)$, *то* $Z(n)/bn \xrightarrow{D} Z$ *при* $n \to \infty$, *где* $\mathsf{M} e^{itz} = (1 + it)^{-\alpha/b}$.

Следствие показывает, что хорошо известная теорема [13] о сходимости к гамма-распределению без дополнительных условий справедлива и когда число иммигрирующих частиц является моментом остановки.

§ 4. Выборочные суммы из конечной совокупности

Пусть теперь $X_1, X_2, \ldots$ – некоторые, вообще говоря, зависимые случайные величины; $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ – σ-алгебры, порожденные этими величинами; $\nu_1, \nu_2, \ldots$ – принимающие значения 0 и 1 случайные величины такие, что при любом $k \geqslant 1$ величина ν_k измерима относительно $\prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{F}_j$, где $\mathcal{F}_0$ – некоторая σ-алгебра. В этом случае сумму

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k \nu_k$$

можно интерпретировать как выборочную сумму случайного объема из конечной совокупности $\{X_1, \ldots, X_N\}$.

В работе Эрдеша и Реньи [8] была доказана асимптотическая нормальность при $n \to \infty$ суммы n величин, случайно отобранных из совокупности действительных чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ по схеме выбора без возвращения. (В наших обозначениях это соответствует случаю, когда величины X_k, $k \geqslant 1$, имеют вырожденные распределения.) А. Бикялисом [10] изучена скорость сходимости в теореме Эрдеша и Реньи. Б. фон Бар [9] оценил отклонение в равномерной метрике от нормального распределения суммы n величин случайно выбранных из совокупности независимых случайных величин $\{X_1, \dots, X_N\}$ в равновероятной схеме выбора без возвращения. Чтобы в нашей схеме получить эту сумму, достаточно предположить X_k, $k \geqslant 1$, независимыми, не зависящими от $\nu_k, k \geqslant 1$, и

$$\sum_{k=1}^{N} \nu_k = n, \quad \mathsf{P}\{\nu_k = 1\} = \frac{n}{N}, \qquad k \geqslant 1.$$

В [17–20] изучаются асимптотические разложения распределений выборочных сумм. Работы М. Иржины [23, 24] посвящены аппроксимации распределения выборочных сумм распределениями, отличающимися от нормального.

В отличие от выборочных сумм, рассмотренных в упомянутых выше работах, здесь векторы $(\nu_1, \dots, \nu_N)$ и $(X_1, \dots, X_N)$ могут быть зависимыми. Поэтому наша схема включает, например, случай, когда решение о включении в сумму величины X_k принимается в зависимости от значений $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}$.

Как и прежде, положим $\mathsf{M}_k[\cdot] = \mathsf{M}[\cdot \mid \prod_{j=0}^{k} \mathscr{F}_j]$ и введем обозначения

$$\mu_k = \mathsf{M}_{k-1}[X_k], \qquad \beta_k = \mathsf{M}_{k-1}[X_k^2], \qquad \sigma_k^2 = \beta_k - \mu_k^2,$$
$$\delta_k(x) = \mathsf{M}_{k-1}[(X_k - \mu_k)^2 \chi(|X_k - \mu_k| > x)], \qquad x > 0.$$

Теорема 6. *Пусть для некоторых последовательностей действительных чисел A_N и C_N*

$$\frac{1}{C_N} \sum_{k=1}^{N} \nu_k \mu_k - A_N \xrightarrow{\mathsf{P}} \gamma, \tag{58}$$

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^{N} \nu_k \sigma_k^2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma^2, \tag{59}$$

и для любого $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^{N} \delta_k(\epsilon C_N)\nu_k \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \tag{60}$$

где γ и σ^2 – некоторые $\mathscr{F}_0$-измеримые случайные величины. Тогда при $n \to \infty$

$$\frac{1}{C_N} S_N - A_N \xrightarrow{\mathsf{D}} X, \qquad \mathsf{M}\, e^{itX} = \mathsf{M}\, e^{it\gamma - t^2\sigma^2/2}.$$

Замечание.

Если $\mu_k = 0$, $k \geqslant 1$, и σ^2 имеет вырожденное распределение, то из теоремы 6 получим, что S_N при $N \to \infty$ асимптотически нормальна с параметрами $(0, C_N \sigma^2)$. Если же $\sigma_k^2 = 0$, $k \geqslant 1$, то утверждение теоремы 6 является простым следствием условия (58). Тем самым теорема содержательна именно для случайных X_k. Поэтому из теоремы 6 нельзя вывести, например, результаты Эрдеша–Реньи [8], относящиеся к выборочным суммам детерминированных слагаемых. Однако, как показывают приводимые ниже следствия, в случае невырожденных (зависимых или независимых) X_k теорема 6 дает новые содержательные утверждения.

Доказательство теоремы 6. Легко видеть, что из условия (59) следует выполнение первого из условий (33) теоремы 3 для любой случайной величины T такой, что $T \geqslant \sigma^2 + 1$ почти всюду.

Так как в силу (60) найдется последовательность положительных чисел $\epsilon_N \to 0$, $N \to \infty$ такая, что

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^{N} \nu_k \delta_k(\epsilon_N C_N) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

при $N \to \infty$, то из следующего неравенства следует выполнение второго условия в (33):

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \nu_k \sigma_k^2 \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \nu_k (\epsilon_N^2 + \delta_k(\epsilon_N C_N)) \leqslant \epsilon_N^2 + \sum_{k=1}^{N} \nu_k \delta_k(\epsilon_N C_N).$$

Далее, используя (59) и (60), получим, что

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^{N} \nu_k \mathsf{M}_{k-1} [(X_k - \mu_k)^2 \chi(|X_k - \mu_k| < \epsilon C_N)] =$$

$$= \frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^{N} \nu_k (\sigma_k^2 - \delta_k(C_N \epsilon)) \xrightarrow{\mathsf{P}} \sigma^2$$

при $N \to \infty$ и любом $\epsilon > 0$. Это показывает, что условие (35) теоремы 3 также выполняется, причем $K(x) = 0$, когда $x < 0$, и $K(x) = \sigma^2$, когда $x \geqslant 0$.

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены. Утверждение теоремы 6 следует из теоремы 3.

Рассмотрим некоторые частные случаи описанной выше схемы. Пусть $\nu_1, X_1, X_2, \ldots, X_N, \ldots$ – независимые случайные величины, $\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \ldots$ – порожденные ими σ-алгебры. Тогда очевидно, что

$$\mu_k = \mathsf{M} X_k, \quad \sigma_k^2 = \mathsf{D} X_k, \quad \delta_k(x) = \mathsf{M}[(X_k - \mu_k)^2; \ |X_k - \mu_k| > x].$$

Положим $C_N^2 = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 \mathsf{M} \nu_k$. Из неравенства Чебышева следует, что если

$$\frac{1}{C_N^4} \sum_{k,l=1}^{N} [\sigma_k^2 \sigma_l^2 + \delta_k(\epsilon C_N) \delta_l(\epsilon C_N)] \operatorname{cov}(\nu_k, \nu_l) \to 0 \tag{61}$$

при $n \to \infty$, то в условиях (59) и (60) величину ν_k можно заменить ее математическим ожиданием. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $\mu_k = 0$, $k \geqslant 1$, *и выполнено условие* (61). *Тогда, если для любого* $\epsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\frac{1}{C_N^2} \sum_{k=1}^{N} \delta_k(\epsilon C_N) \mathsf{M} \nu_k \to 0,$$

то величина S_N / C_N *при* $N \to \infty$ *асимптотически нормальна с параметрами* 0 *и* 1.

Пусть теперь последовательности $\{\nu_k, k \geqslant 1\}$ и $\{X_k, k \geqslant 1\}$ независимы и

$$\sum_{k=1}^{N} \nu_k = n, \quad \mathsf{P}\{\nu_k = 1\} = \frac{n}{N}, \quad k \geqslant 1. \tag{62}$$

В этом случае S_N будет выборочной суммой в схеме равновероятного выбора без возвращения, рассмотренной в работах [8–10], [17–24]. В качестве $\mathscr{F}_0$ возьмем σ-алгебру, порожденную величинами $\{\nu_k, k \geqslant 1\}$. Ясно, что тогда для любого k

величина ν_k будет $\prod_{j=1}^{k-1} \mathcal{F}_j$-измеримой. В этом случае из теоремы 6 получим следующий результат.

Пусть

$$f = \frac{n}{N}, \quad C_n^2 = f \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2.$$

Следствие 3. *Если* $\mu_k = 0, k \geqslant 1$, *выполнено* (62) *и*

$$C_n^{-2}(1-f) \max_{1 \leqslant k \leqslant N} \sigma_k^2 \to 0, \tag{63}$$

$$C_n^{-2} f \sum_{k=1}^{N} \delta_k(\epsilon C_n) \to 0 \tag{64}$$

при $n \to \infty$ *для любого* $\epsilon > 0$, *то величина* $C_n^{-1} S_N$ *при* $n \to \infty$ *асимптотически нормальна с параметрами* $(0, 1)$.

Доказательство. В этом случае $\mathsf{D}\nu_k = f(1-f)$, $\operatorname{cov}(\nu_k, \nu_l) \leqslant 0$ при $k \neq l$, $f(1-f) \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^4 = o(C_n^4)$ при $n \to \infty$, следовательно, условие (61) выполняется. Поэтому в соотношениях (59) и (60) величину ν_k можно заменить на $f = \mathsf{M}\nu_k$.

В заключение выражаю глубокую признательность А.М. Зубкову за полезные обсуждения и внимание, проявленное к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eagleson G.K. Martingale convergence to mixtures of infinitely divisible laws//The annals of probab. – 1975. – V. 3, № 3. – P. 557–562.
2. Csörgo M. On the strong law of large numbers and the central limit theorems for martingales // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – № 131. – P. 259–275.
3. Rychlik Z. Martingal random sentral limit theorems//Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1979. – № 34. – P. 129–139.
4. Gaenssler P., Strobel J., Stute W. On central limit theorems for martingale triangular arrays//Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1978. – № 31. – P. 205–216.
5. Klopotowski A. Mixtures of infinitely divisible distributions as limit laws for sums of dependent random variables//Z. Wahrschein. Verw. Geb. – 1980. – V. 51, № 3. – P. 101–113.
6. Kubaski K.S. On a random-sums limit problem//Proc. of the 4-th Pannonian Symp. on Math. Statirtics. Bad Tatzmannsdorf, Austria. – 1983. – P. 231–263.
7. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971.
8. Erdös P., Renyi A. On the central limit theorem for samples from a finite population//Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci. – 1959. – V. 4, № 1. – P. 49–61.
9. Bahr von B. On sampling from a finite set of the independent random variables//Z. Wahrschein. Verw. Geb. – 1972. – V. 24, № 4. – P. 279–286.
10. Bikelis A. On estimation of the remainger term in the central limit theorem for samples from finite populations//Studia Sci. Math. Hungar. – 1969. – № 4. – P. 345–354.
11. Рахимов И. Об аппроксимации распределения суммы случайного числа случайных слагаемых//ДАН УзССР. – 1987. – № 1. – С. 5–7.
12. Рахимов И., Сиражддинов С.Х. Аппроксимация распределения суммы в одной схеме суммирования независимых случайных величин//ДАН СССР. – 1988. – Т. 301, № 1. – С. 31–34.
13. Athreya K., Ney P. Branching processes. – Berlin: Springer, 1972. – 287 p.
14. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987.
15. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.
16. Jacod J., Shiryaev A.N. Limit theorems for stochastic processes. – Springer–Verlag, 1987. – 600 p.
17. Robinson P.J. An asymptotic expansion for samples from a finite population//Ann. Statist. – 1978. – V. 6, № 5. – P. 1004–1011.

18. Bickel P.J., Von Zwet W.R. Asymptotic expansions in the twosample problem//Ann. Statist. – 1978. – V. 6, № 5. – P. 937–1004.
19. Бикялине В. Выборки из конечной совокупности//Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – № 2. – С. 9–56.
20. Мирахмедов Ш.А. Асимптотическое разложение распределения выборочной суммы из конечной совокупности//Теория вероятностей и ее применения. – 1983. – Т. 28, № 3. – С. 468–477.
21. Mitra S.K., Pathak P.K. The nature of simple random sampling//Ann. Statist. – 1984. – V. 12, № 4. – P. 1536–1542.
22. Шипилов О.И. Аналог теоремы Гливенко–Кантелли при биномиальном выборе из конечной совокупности//Теория вероятностей и ее применения. – 1985. – Т. 30. № 3. – С. 574–576.
23. Jirina M. Limit theorems for samples from finite population//J. Austral Math. Soc. Ser. A. – 1982. – V. 32, № 3. – P. 318–327.
24. Jirina M. Limit theorems for sums of independent random variables observed on a finite population//Indian J. of Math. – 1987. – V. 29, № 1. – P. 65–83.
25. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980.

Статья поступила 10.10.89