

В. П. ИЛЬИН

К ВОПРОСУ О НЕРАВЕНСТВАХ МЕЖДУ НОРМАМИ
ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 12 I 1963)

1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция, заданная в некоторой области D n -мерного евклидова пространства E^n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, имеющая непрерывные производные любого порядка.

Пусть заданы $n + 1$ целых неотрицательных векторов $g_i = (l_1^i, \dots, l_n^i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $l_j^i \geq 0$ — целые), относительно которых мы требуем, чтобы

$$\begin{vmatrix} 1 & l_1^0 & \dots & l_n^0 \\ 1 & l_1^1 & \dots & l_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & l_1^n & \dots & l_n^n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1)$$

Положим

$$D^{r_i} f = \frac{\partial^{l_1}}{\partial x_1^{l_1}} \dots \frac{\partial^{l_n}}{\partial x_n^{l_n}} f,$$

где $r = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j \geq 0$ — целые.

Предположим, что

$$\|D^{r_i} f\|_{L_p(D)} \leq \infty \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (2)$$

где $p \geq 1$.

Ставится задача нахождения множества целых неотрицательных векторов $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ и соответствующих им значений параметра $q \geq p$, для которых будет иметь место неравенство

$$\|D^{\vec{p}} f\|_{L_q(D)} \leq C \sum_{i=0}^n \|D^{r_i} f\|_{L_p(D)}, \quad (3)$$

где C — константа, не зависящая от f .

Неравенства типа неравенства (3) для того случая, когда векторы g_i являются векторами вида $g_0 = (0, \dots, 0)$, $g_i = (0, \dots, l_i^i, \dots, 0)$ ($i = 1, \dots, n$), а область D совпадает со всем пространством E^n или является прямоугольным параллелепипедом с ребрами, параллельными осям координат, впервые изучались С. М. Никольским (1)*; при $l_i^i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) результаты типа неравенства (3) вытекают из еще более ранних работ С. Л. Соболева (2).

Условимся обозначать через Δ_R прямоугольный параллелепипед в пространстве E^n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, характеризуемый неравенствами $0 < x_i < R$ ($i = 1, \dots, n$).

В настоящей заметке формулируются необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на векторы g_i ($i = 0, 1, \dots, n$) и \vec{p} для того, чтобы неравенство (3) имело место для $D = \Delta_R$ с каким-либо показателем $q > p$, а также приводится ряд результатов отрицательного характера.

2. Будем говорить, что неравенство (3) для данных g_i ($i = 0, 1, \dots, n$), \vec{p} , p , q и D не имеет места, если, какую бы ни взять константу C , найдется функция f , имеющая в D непрерывные производные любого порядка и удов-

* С. М. Никольский допускал не только целые, но и дробные значения l_i^i ($i=1, \dots, n$).

летворяющая условиям (2), для которой неравенство (3) с этой константой не имеет места.

Будем писать $r_1 = (l_1^1, \dots, l_n^1) \geq r_2 = (l_1^2, \dots, l_n^2)$, если $l_j^1 \geq l_j^2$ ($j = 1, \dots, n$).

В дальнейшем нам иногда удобнее будет интерпретировать векторы $r_i = (l_1^i, \dots, l_n^i)$ и $\vec{p} = (v_1, \dots, v_n)$, как точки $M_i (l_1^i, \dots, l_n^i)$ и соответственно $N (v_1, \dots, v_n)$ евклидова пространства E^n . Множество точек $M (l_1, \dots, l_n)$ пространства E^n , координаты которых удовлетворяют условиям: $0 \leq l_i \leq v_i$ ($i = 1, \dots, n$), будем обозначать через $\delta(N)$.

Л е м м а 1. Пусть заданы целые неотрицательные векторы $r_i \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$) и $\vec{p} \geq 0$. Если существует вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ (не обязательно целый положительный) такой, что

$$(r_i, \vec{x}) = \sum_{j=1}^n l_j^i x_j = C_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (\vec{p}, \vec{x}) = \sum_{j=1}^n v_j x_j = C$$

и $C_i > C$ ($i = 0, 1, \dots, n$) или $C_i < C$ ($i = 0, 1, \dots, n$), то для $D = \Delta_R$ неравенство (3) не имеет места ни при каком $q \geq p$.

С л е д с т в и е. Если точка N находится вне n -мерного симплекса с вершинами в M_i ($i = 0, 1, \dots, n$), то для $D = \Delta_R$ неравенство (3) не имеет места ни при каком $q \geq p$.

Л е м м а 2. Пусть выполнено одно из следующих условий:

- 1) точки $M_i (l_1^i, \dots, l_n^i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) содержатся в $\delta(N)$;
- 2) точки M_i ($i = 0, 1, \dots, n$) находятся вне $\delta(N)$.

Тогда для $D = \Delta_R$ неравенство (3) не имеет места ни при каком $q \geq p$.

Пусть теперь k точек M_0, \dots, M_{k-1} , где $1 \leq k \leq n$, содержатся в $\delta(N)$, а $n+1-k$ точек M_k, \dots, M_n — вне $\delta(N)$ (точка M_0 , следовательно, всегда будет считаться точкой $\delta(N)$). Пусть

$$l_1 x_1 + \dots + l_n x_n = C \geq 0 \tag{4}$$

уравнение гиперплоскости, проходящей через точки M_1, \dots, M_n (таким образом, она проходит через все точки, внешние по отношению к $\delta(N)$). Положим

$$v_1 x_1 + \dots + v_n x_n = C_1, \tag{5}$$

$$l_1^0 x_1 + \dots + l_n^0 x_n = C_2. \tag{6}$$

Л е м м а 3. Пусть $N (v_1, \dots, v_n)$ — точка симплекса с вершинами в M_i ($i = 0, 1, \dots, n$), не принадлежащая грани (4) ($C_1 \neq C$).

Если среди коэффициентов x_i уравнения (4) имеются неположительные, например, если $x_i > 0$ ($i = 1, \dots, k$), $x_i = 0$ ($i = k+1, \dots, t$), $x_i < 0$ ($i = t+1, \dots, n$), то для $D = \Delta_R$ неравенство (3) возможно лишь при $q = p$ и только в одном из следующих случаев:

- 1) $C_2 < C_1 < C$, причем точка M_0 находится в гиперплоскости $l_{k+1} = v_{k+1}, \dots, l_n = v_n$;
- 2) $C_2 > C_1 > C$, причем точка M_0 находится в гиперплоскости $l_1 = v_1, \dots, l_m = v_m$.

Л е м м а 4. Если точка $N (v_1, \dots, v_n)$ находится на грани симплекса (с вершинами в M_i ($i = 0, 1, \dots, n$)), содержащей точки M_1, \dots, M_n ($C_1 = C$), то, каковы бы ни были коэффициенты x_i ($i = 1, \dots, n$) уравнения (4), неравенство (3) для $D = \Delta_R$ не имеет места при $q > p$.

Заметим, что утверждение, аналогичное данному, вообще говоря, не имеет места относительно точек других граней рассматриваемого симплекса.

Л е м м а 5. Пусть у каждой точки M_i ($i = k, \dots, n$), внешней по отношению к $\delta(N)$, хоть одна из координат l_1, \dots, l_s , где $s < n$, больше соответствующей координаты точки $N (v_1, \dots, v_n)$.

Тогда неравенство (3) для $D = \Delta_R$ может иметь место только при $q = p$ и лишь в том случае, когда хоть одна из точек M_0, \dots, M_{k-1} , содержащихся в $\delta(N)$, находится в гиперплоскости $l_{s+1} = v_{s+1}, \dots, l_n = v_n$.

Следствие. Из леммы 5 вытекает, что неравенство (3) при $q > p$ может иметь место лишь тогда, когда в $\delta(N)$ находится одна точка M_0 , а вне $\delta(N)$ — n точек M_1, \dots, M_n , причем у каждой точки M_i ($i = 1, \dots, n$) лишь одна координата больше соответствующей координаты точки N и у всех точек эти координаты разные.

Теорема. Для того чтобы для $D = \Delta_R$ имело место неравенство (3) при каком-либо $q > p$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) координаты векторов \mathbf{r}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) и $\vec{\rho}$ удовлетворяли неравенствам:

$$l_j^0 \leq v_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$l_j^i \leq v_j \quad (j = 1, \dots, n, j \neq i), \quad l_i^i > v_i \quad \text{при } i = 1, \dots, n;$$

2) существовали числа $\chi_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$) такие, что

$$l_1^i \chi_1 + \dots + l_n^i \chi_n = A \quad (i = 1, \dots, n);$$

3) $v_1 \chi_1 + \dots + v_n \chi_n = A_1 < A$.

Если указанные условия выполнены, то существует интервал значений параметра q , для которых имеет место (3), определяемый из соотношений

$$1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad A - A_1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{j=1}^n \chi_j = \varepsilon \geq 0,$$

причем, если $\varepsilon = 0$, то предполагается $1 < p < q < \infty$.

Необходимость условий 1) — 3) вытекает из лемм 5, 3, 4, а достаточность доказывается методом интегральных представлений.

Отметим, что если векторы \mathbf{r}_i ($i = 0, 1, \dots, n$) удовлетворяют условиям С. М. Никольского, то условие 2) выполнено автоматически и для каждой точки N (v_1, \dots, v_n) симплекса с вершинами в M_i справедливы неравенства 1).

3. Ниже для случая $n = 2$ приведены примеры различных симплексов с вершинами в M_i ($i = 0, 1, 2$), обладающих разными, в смысле рассматриваемого в статье вопроса, свойствами.

На рис. 1а приведен случай, когда неравенство (3) для $D = \Delta_R$ не имеет места ни для какого вектора $\vec{\rho}$, отличного от \mathbf{r}_i ($i = 0, 1, 2$). На рис. 1б, в, г точкам N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) отвечают векторы $\vec{\rho}_i$, для которых неравенство (3) имеет место

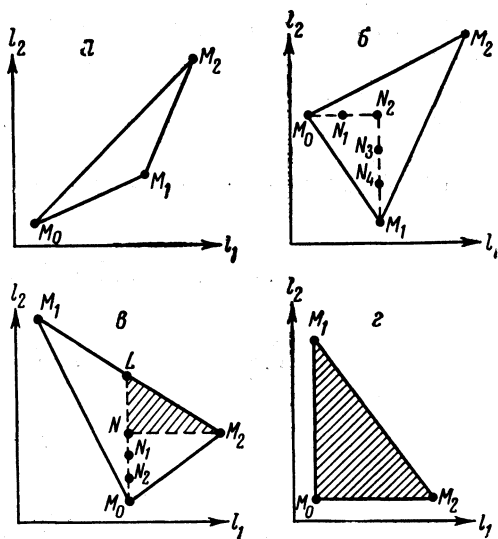


Рис. 1

при $q = p$, а точкам треугольников $LN M_2$ (рис. 1б) и $M_0 M_1 M_2$ (рис. 1г), за исключением точек отрезков LM_2 и $M_1 M_2$, отвечают неравенства с $q > p$. Эти результаты устанавливаются методом интегральных представлений. На основании приведенных выше лемм легко установить, что ни для каких других векторов $\vec{\rho}$ неравенство (3) для $D = \Delta_R$ не имеет места.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. М. Никольский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 38, 244 (1951). ² С. Л. Соболев, Матем. сборн., 4 (46), 3, 471 (1938).