



Общероссийский математический портал

В. Г. Бардаков, Линейные представления группы сопрягающих автоморфизмов и групп кос некоторых многообразий, *Сиб. матем. журн.*, 2005, том 46, номер 1, 17–31

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

23 января 2025 г., 20:04:32



УДК 512.54

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ СОПРЯГАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ И ГРУПП КОС НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. Г. Бардаков

Аннотация: Построено продолжение представления Бурау на группу сопрягающих автоморфизмов C_n . Установлено, что точное линейное представление Лоуренс — Крамера группы кос B_3 продолжается на группу C_3 , а при $n \geq 4$ построено продолжение этого представления при некоторых дополнительных ограничениях на параметры представления. Доказано, что группа кос $B_n(S^2)$ сферы, а также группа классов отображений $M(0, n)$ сферы с n выколотыми точками являются линейными при всех $n \geq 2$. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(F_n)$ не линейна при $n \geq 3$, а группа $\text{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос B_4 . С учетом представления Лоуренс — Крамера построено точное линейное представление группы $\text{Aut}(F_2)$.

Ключевые слова: группа кос Артина, группы кос многообразий, автоморфизм свободной группы, сопрягающие автоморфизмы, точное линейное представление.

Классическая группа кос Артина B_n , $n \geq 2$, на n нитях (см. [1]) задается порождающими $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \quad (2)$$

Вопрос о линейности (т. е. о точной представимости конечномерными матрицами над полем) групп кос сформулировал Бурау [2] в 1936 г. Отметим, что группа B_2 бесконечная циклическая, а потому является линейной. Линейность B_3 доказал Магнус (см. [1, теорема 3.15]). Вопрос о линейности групп B_n при $n \geq 4$ почти 65 лет оставался открытым. Долгое время существовала гипотеза о том, что представление Бурау является точным. В 1991 г. Муди [3] опроверг эту гипотезу, построив нетривиальный элемент, лежащий в ядре представления Бурау группы B_n при $n \geq 9$. Позднее Лонг и Патон [4] показали, что представление Бурау не является точным уже при $n \geq 6$, а Бигелу [5] снизил эту границу до 5. Вопрос о точности представления Бурау группы B_4 до сих пор остается открытым.

Лоуренс [6] построила новые представления группы кос B_n , а в работах Крамера [7] и Бигелу [8] показано, что одно из этих представлений является точным. Следовательно, группы кос являются линейными.

Как установил Артин (см. [1, теорема 1.9]), группа кос B_n вкладывается в группу автоморфизмов $\text{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n со свободными порождающими x_1, x_2, \dots, x_n . При этом известно [9], что сама группа $\text{Aut}(F_n)$ не является линейной при $n \geq 3$. Возникает естественный

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-01118).

Вопрос 1. Найти максимальную по включению линейную подгруппу группы автоморфизмов $\text{Aut}(F_n)$, $n \geq 3$, содержащую группу кос B_n .

По упоминавшейся теореме Артина [1, теорема 1.9] автоморфизм β из $\text{Aut}(F_n)$ принадлежит группе кос B_n тогда и только тогда, когда β удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) $\beta(x_i) = f_i^{-1} x_{\pi(i)} f_i$, $1 \leq i \leq n$,
- 2) $\beta(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$,

где $f_i \in F_n$, а π — некоторая перестановка множества индексов $\{1, 2, \dots, n\}$. Автоморфизмы, удовлетворяющие условию 1, называются *сопрягающими автоморфизмами*. Очевидно, множество сопрягающих автоморфизмов образует группу, которая называется *группой сопрягающих автоморфизмов* и обозначается символом C_n . Группа кос B_n является подгруппой группы C_n . Строение группы C_n похоже на строение группы B_n [10]. Поэтому можно сформулировать вопрос (см. [11, вопрос 15.9]) о линейности группы C_n при $n \geq 3$ ($C_2 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$, а потому группа C_2 линейна). Один из возможных подходов к решению этого вопроса состоит в продолжении известных линейных представлений группы кос B_n на группу C_n .

В предлагаемой работе мы построим продолжение представления Бурау на группу C_n , а также покажем, что точное линейное представление Лоуренс — Крамера группы B_3 продолжается на группу C_3 , а при $n \geq 4$ будет построено продолжение этого представления при некоторых дополнительных ограничениях на параметры представления.

Группу кос B_n можно рассматривать как частный случай общей конструкции группы кос $B_n(M)$ на n нитях многообразия M (точное определение см. в § 2).

Возникает следующий

Вопрос 2. Для каких многообразий M и для каких значений n группа кос $B_n(M)$ является линейной?

Наибольший интерес представляют двумерные связные многообразия. Так как все компактные связные двумерные многообразия классифицированы, естественно начать исследовать группы кос этих многообразий. При этом особую роль играют группы кос $B_n(S^2)$ сферы S^2 и $B_n(P^2)$ проективной плоскости P^2 , поскольку группы кос только этих многообразий имеют кручение.

В работе мы докажем, что группа кос $B_n(S^2)$ сферы является линейной при всех $n \geq 2$. С группой $B_n(S^2)$ тесно связана группа классов отображений $M(0, n)$ сферы с n выколотыми точками. Мы докажем, что группа $M(0, n)$ является линейной для всякого $n \geq 2$.

Как отмечалось выше, группа автоморфизмов $\text{Aut}(F_n)$ не линейна при $n \geq 3$. В [12] установлено, что группа $\text{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос B_4 . В последнем параграфе, используя представление Лоуренс — Крамера, укажем в явном виде точное линейное представление группы $\text{Aut}(F_2)$.

Автор благодарит участников семинара «Эварист Галуа» за полезные обсуждения, а также А. А. Коробова, прочитавшего рукопись и внесшего ряд полезных предложений.

Результат о линейности группы кос сферы анонсирован в [13]. Пока работа готовилась к печати, мне стало известно, что Бигелу и Будней [14] независимо доказали линейность группы кос сферы и группы классов отображений сферы с n выколотыми точками.

§ 1. Продолжение линейных представлений группы кос на группу сопрягающих автоморфизмов

Напомним, что представление Бурау $\psi : B_n \rightarrow \text{GL}(W_n)$ отображает группу кос B_n в группу автоморфизмов $\text{GL}(W_n)$ свободного n -мерного модуля W_n над кольцом лорановских многочленов $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$. Если w_1, w_2, \dots, w_n — базис модуля W_n , то элементы $\psi(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, действуют на базисных элементах по правилу (условимся писать вместо $\psi(\sigma_i)(w_j)$ или $w_j^{\psi(\sigma_i)}$ просто $\sigma_i(w_j)$ или $w_j^{\sigma_i}$ соответственно):

$$\begin{aligned}\sigma_i(w_i) &= (1-q)w_i + qw_{i+1}, \\ \sigma_i(w_{i+1}) &= w_i, \\ \sigma_i(w_l) &= w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1.\end{aligned}$$

При этом мы рассматриваем правое действие. Как установила А. Г. Савушкина [15], группа сопрягающих автоморфизмов C_n порождается автоморфизмами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ свободной группы F_n . Эти автоморфизмы действуют на свободных порождающих по правилу

$$\begin{aligned}\sigma_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ x_l \mapsto x_l \quad \text{при } l \neq i, i+1. \end{cases} \\ \alpha_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, \\ x_{i+1} \mapsto x_i, \\ x_l \mapsto x_l \quad \text{при } l \neq i, i+1. \end{cases}\end{aligned}$$

При этом автоморфизмы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ порождают группу кос B_n и удовлетворяют соотношениям (1), (2). Автоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ порождают группу подстановок S_n , которая задается соотношениями

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3)$$

$$\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (4)$$

$$\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2. \quad (5)$$

Система определяющих соотношений группы C_n помимо соотношений (1)–(5) содержит соотношения

$$\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \quad (6)$$

$$\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (7)$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \alpha_{i+1} = \alpha_i \sigma_{i+1} \sigma_i \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2. \quad (8)$$

Справедливо

Предложение 1. Существует линейное представление $\tilde{\psi} : C_n \rightarrow \text{GL}(W_n)$, являющееся продолжением представления Бурау $\psi : B_n \rightarrow \text{GL}(W_n)$.

Доказательство. Для порождающих группы кос положим $\tilde{\psi}(\sigma_i) = \psi(\sigma_i)$, а действие автоморфизмов $\tilde{\psi}(\alpha_i)$ определим на базисных элементах модуля W_n равенствами

$$\begin{aligned}\alpha_i(w_i) &= w_{i+1}, \\ \alpha_i(w_{i+1}) &= w_i, \\ \alpha_i(w_l) &= w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1.\end{aligned}$$

Так как всякий элемент группы C_n является словом от порождающих $\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, тем самым мы определяем отображение $\tilde{\psi} : C_n \rightarrow \text{GL}(W_n)$. Покажем, что это отображение является гомоморфизмом. Для этого достаточно проверить, что все соотношения, выполненные в группе C_n , имеют место и в группе $\tilde{\psi}(C_n)$. Для соотношений (1)–(5) это очевидно. Проверим, что в группе $\tilde{\psi}(C_n)$ выполняется образ соотношения (7), т. е. справедливо равенство

$$\tilde{\psi}(\sigma_i)\tilde{\psi}(\alpha_{i+1})\tilde{\psi}(\alpha_i) = \tilde{\psi}(\alpha_{i+1})\tilde{\psi}(\alpha_i)\tilde{\psi}(\sigma_{i+1}). \quad (9)$$

Для этого надо проверить, что для всякого вектора $v \in W_n$ его образ под действием автоморфизма, стоящего в левой части равенства (9), совпадает с образом этого вектора под действием правой части равенства (9). Так как v является линейной комбинацией базисных векторов, требуемое равенство достаточно проверить только для них. Действуя левой частью, получим

$$\begin{aligned} w_i^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= (1-q)w_{i+1} + qw_{i+2}, \\ w_{i+1}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= w_{i+1}, \\ w_{i+2}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= w_i, \\ w_l^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1, i+2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, действуя правой частью соотношения (9), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} w_i^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= (1-q)w_{i+1} + qw_{i+2}, \\ w_{i+1}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= w_{i+1}, \\ w_{i+2}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= w_i, \\ w_l^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= w_l \quad \text{при } l \neq i, i+1, i+2. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (9) выполняется. Аналогично проверяется, что сохраняются и соотношения (5) и (8). Предложение доказано.

Напомним [6–8] определение точного линейного представления Лоуренс — Крамера. Пусть V_n — свободный модуль размерности $m = n(n-1)/2$ с базисом v_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, над кольцом лорановских многочленов $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$. Тогда представление $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}(V_n)$ определяется действием порождающих σ_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, на базисе модуля V_n равенствами

$$\begin{aligned} \sigma_i(v_{k,i}) &= (1-q)v_{k,i} + qv_{k,i+1} + q(q-1)v_{i,i+1}, \\ \sigma_i(v_{k,i+1}) &= v_{k,i} \quad \text{при } k < i, \\ \sigma_i(v_{i,i+1}) &= tq^2v_{i,i+1}, \\ \sigma_i(v_{i,l}) &= tq(q-1)v_{i,i+1} + (1-q)v_{i,l} + qv_{i+1,l} \quad \text{при } i+1 < l, \\ \sigma_i(v_{i+1,l}) &= v_{i,l}, \\ \sigma_i(v_{k,l}) &= v_{k,l} \quad \text{при } \{k, l\} \cap \{i, i+1\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Из этих формул нетрудно получить формулы действия элемента σ_i^{-1} :

$$\begin{aligned}\sigma_i^{-1}(v_{k,i}) &= v_{k,i+1}, \\ \sigma_i^{-1}(v_{k,i+1}) &= q^{-1}v_{k,i} + q^{-1}(q-1)v_{k,i+1} - t^{-1}q^{-2}(q-1)v_{i,i+1} \quad \text{при } k < i, \\ \sigma_i^{-1}(v_{i,i+1}) &= t^{-1}q^{-2}v_{i,i+1}, \\ \sigma_i^{-1}(v_{i,l}) &= v_{i+1,l} \quad \text{при } i+1 < l, \\ \sigma_i^{-1}(v_{i+1,l}) &= -q^{-2}(q-1)v_{i,i+1} + q^{-1}v_{i,l} + q^{-1}(q-1)v_{i+1,l}, \\ \sigma_i^{-1}(v_{k,l}) &= v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i,i+1\} = \emptyset.\end{aligned}$$

Группа крашенных кос P_n порождается элементами

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2, \quad a_{i,j} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1}, \quad 1 \leq i < j-1 \leq n-1.$$

Выпишем действие порождающих $a_{i,i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, на базисе модуля V_n :

$$\begin{aligned}a_{i,i+1}(v_{k,i}) &= (q^2 - q + 1)v_{k,i} + q(1 - q)v_{k,i+1} + q(q-1)(tq^2 - q + 1)v_{i,i+1}, \\ a_{i,i+1}(v_{k,i+1}) &= (1 - q)v_{k,i} + qv_{k,i+1} + q(q-1)v_{i,i+1} \quad \text{при } k < i, \\ a_{i,i+1}(v_{i,i+1}) &= t^2q^4v_{i,i+1}, \\ a_{i,i+1}(v_{i,l}) &= tq(q-1)(tq^2 - q + 1)v_{i,i+1} + (q^2 - q + 1)v_{i,l} + q(1 - q)v_{i+1,l} \quad \text{при } i+1 < l, \\ a_{i,i+1}(v_{i+1,l}) &= tq(q-1)v_{i,i+1} + (1 - q)v_{i,l} + qv_{i+1,l}, \\ a_{i,i+1}(v_{k,l}) &= v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i,i+1\} = \emptyset.\end{aligned}$$

Можно дать геометрическую интерпретацию порождающих модуля V_n . Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ — единичный диск. Зафиксируем множество $n \geq 1$ различных точек $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, лежащих внутри диска на вещественной оси, и $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Положим $D_n = D \setminus Y$. Тогда группа гомеоморфизмов $\text{Homeo}(D_n)$ изоморфна B_n . При этом элементами $\text{Homeo}(D_n)$ являются изотопные классы гомеоморфизмов $D_n \rightarrow D_n$, оставляющие неподвижной каждую точку границы $\partial D_n = \partial D = S^1$. Каждый такой гомеоморфизм единственным образом продолжается до гомеоморфизма всего диска D , переставляющего точки y_1, y_2, \dots, y_n . Вилкой в D_n называется дерево F , вложенное в D , имеющее три ребра и четыре различные вершины d, y_i, y_j, z такие, что $F \cap \partial D = d = \sqrt{-1}$, $F \cap Y = \{y_i, y_j\}$ и z — общая вершина всех трех ребер. Ребро H , соединяющее d с z , называется *ручкой* вилки F . Обозначим через T дугу, являющуюся объединением двух других ребер. Тогда $\partial T = \{y_i, y_j\}$. Эта дуга называется *зубьями* вилки. Вилка называется *стандартной*, если все ее точки имеют неотрицательную мнимую часть. Стандартная вилка задается с точностью до изотопии парой точек $\partial T = \{y_i, y_j\}$. Сопоставим этой стандартной вилке базисный элемент v_{ij} модуля V_n . При этом мы считаем $v_{ij} = v_{ji}$ при $i > j$.

Чтобы продолжить представление Лоуренс — Крамера на группу C_n , мы должны определить действие группы S_n на базисных элементах модуля V_n . Пусть группа S_n действует на множестве Y перестановками. Это действие индуцирует действие на множестве стандартных вилок v_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, а потому и на всем модуле V_n . Если π — подстановка из S_n , действующая на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, то положим $\pi(v_{ij}) = v_{\pi(i), \pi(j)}$. Тогда автоморфизмы α_i будут дей-

ствовать на базисе модуля V_n по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\alpha_i(v_{k,i}) &= v_{k,i+1}, \\ \alpha_i(v_{k,i+1}) &= v_{k,i} \quad \text{при } k < i, \\ \alpha_i(v_{i,i+1}) &= v_{i,i+1}, \\ \alpha_i(v_{i,l}) &= v_{i+1,l} \quad \text{при } i+1 < l, \\ \alpha_i(v_{i+1,l}) &= v_{i,l}, \\ \alpha_i(v_{k,l}) &= v_{k,l} \quad \text{при } \{k, l\} \cap \{i, i+1\} = \emptyset.\end{aligned}$$

Чтобы проверить, что так определенное действие задает гомоморфизм группы S_n в группу $\text{GL}(V_n)$, достаточно проверить, что образы автоморфизмов α_i удовлетворяют соотношениям группы S_n . Для этого заметим, что формулы действия элементов α_i на базисе модуля V_n получаются из соответствующих формул действия порождающих σ_i , если положить $q = t = 1$. Следовательно, при нашем представлении сохраняются соотношения (4), (5). То, что соотношение $\alpha_i^2 = 1$ сохраняется, легко следует из формул действия элемента $\alpha_{i,i+1} = \sigma_i^2$ на базисе модуля V_n . Таким образом, мы построили линейное представление группы S_n . Так как при $n \geq 5$ группа S_n содержит простую группу A_n индекса 2, легко заметить, что построенное представление является точным. Тем самым установлена

Лемма 1. *Построенное представление $S_n \rightarrow \text{GL}(V_n)$ является точным линейным представлением группы S_n .*

Следовательно, мы имеем отображение группы C_n в группу $\text{GL}(V_n)$, заданное на порождающих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. При этом отображении будут сохраняться все соотношения, связывающие порождающие α_i , а также соотношения, связывающие порождающие σ_i . Проверим теперь, будут ли сохраняться соотношения, содержащие одновременно порождающие α_i и σ_i .

Каждому автоморфизму φ модуля V_n сопоставим его носитель

$$\text{supp}(\varphi) = \{v_{i,j} \mid \varphi(v_{i,j}) \neq \lambda v_{i,j} \text{ ни для какого } \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Иными словами, носитель автоморфизма φ состоит из таких базисных векторов, которые не являются собственными для φ . Легко проверить, что

$$\text{supp}(\alpha_i) = \text{supp}(\sigma_i) = \{v_{k,i}, v_{k,i+1} (1 \leq k < i \leq n); v_{i,l}, v_{i+1,l} (2 \leq i+1 < l \leq n)\}.$$

Непосредственно проверяется

Лемма 2. *Пусть натуральные числа i и j таковы, что $1 \leq i < j-1 \leq n-1$. Тогда справедливо равенство*

$$\text{supp}(\beta_i) \cap \text{supp}(\beta_j) = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}\},$$

где $\beta_i \in \{\alpha_i, \sigma_i\}$, $\beta_j \in \{\alpha_j, \sigma_j\}$.

Покажем теперь, что определенное выше действие порождающих σ_i и α_i на модуле V_n определяет гомоморфизм $\rho : C_n \rightarrow \text{GL}(V_n)$. Для этого надо проверить, что при гомоморфизме ρ сохраняются соотношения группы C_n .

Рассмотрим соотношения $\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i$ при $|i-j| \geq 2$. Нам надо показать, что для любого базисного вектора $v_{k,l}$ справедливо равенство $v_{k,l}^{\alpha_i \sigma_j} = v_{k,l}^{\sigma_j \alpha_i}$. Зафиксируем индексы i и j . Не уменьшая общности, можно считать, что $1 \leq i < j-1 \leq n-1$. Если $v_{k,l} \notin \text{supp}(\alpha_i) \cap \text{supp}(\sigma_j)$, то, очевидно, требуемое равенство

выполняется. Рассмотрим теперь базисные векторы из пересечения $\text{supp}(\alpha_i) \cap \text{supp}(\sigma_j) = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}\}$. Действуя на них произведением $\alpha_i \sigma_j$, получим

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{\alpha_i \sigma_j} &= (1-q)v_{i+1,j} + qv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1}, \\ v_{i,j+1}^{\alpha_i \sigma_j} &= v_{i+1,j}, \\ v_{i+1,j}^{\alpha_i \sigma_j} &= (1-q)v_{i,j} + qv_{i,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1}, \\ v_{i+1,j+1}^{\alpha_i \sigma_j} &= v_{i,j}. \end{aligned}$$

Поддействуем теперь на эти векторы произведением $\sigma_j \alpha_i$. Имеем

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{\sigma_j \alpha_i} &= (1-q)v_{i+1,j} + qv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1}, \\ v_{i,j+1}^{\sigma_j \alpha_i} &= v_{i+1,j}, \\ v_{i+1,j}^{\sigma_j \alpha_i} &= (1-q)v_{i,j} + qv_{i,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1}, \\ v_{i+1,j+1}^{\sigma_j \alpha_i} &= v_{i,j}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные равенства с предыдущими, видим, что соотношение $\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i$ при $|i-j| \geq 2$ действительно сохраняется.

Рассмотрим соотношение $\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}$. Действуя его левой частью на базисные элементы, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} v_{k,i}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= (1-q)v_{k,i+1} + qv_{k,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2}, \\ v_{k,i+1}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= v_{k,i+1} \quad \text{при } k < i, \\ v_{i,i+1}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= tq^2 v_{i+1,i+2}, \\ v_{i,l}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i+1,l} + qv_{i+2,l} \quad \text{при } i+2 < l, \\ v_{i,i+2}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i,i+1} + qv_{i,i+2}, \\ v_{i+1,l}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= v_{i+1,l} \quad \text{при } l > i+2, \\ v_{i+1,i+2}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= v_{i,i+1}, \\ v_{k,l}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i,i+1,i+2\} = \emptyset, \\ v_{k,i+2}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= v_{k,i} \quad \text{при } k < i, \\ v_{i+2,l}^{\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i} &= v_{i,l}. \end{aligned}$$

Действуя правой частью, получим

$$\begin{aligned} v_{k,i}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= (1-q)v_{k,i+1} + qv_{k,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2}, \\ v_{k,i+1}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= v_{k,i+1} \quad \text{при } k < i, \\ v_{i,i+1}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= tq^2 v_{i+1,i+2}, \\ v_{i,l}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= tq(q-1)v_{i+1,i+2} + (1-q)v_{i+1,l} + qv_{i+2,l} \quad \text{при } i+2 < l, \\ v_{i,i+2}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= (1-q)v_{i,i+1} + qv_{i,i+2} + q(q-1)v_{i+1,i+2}, \\ v_{i+1,l}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= v_{i+1,l} \quad \text{при } l > i+2, \\ v_{i+1,i+2}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= v_{i,i+1}, \\ v_{k,l}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i,i+1,i+2\} = \emptyset, \\ v_{k,i+2}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= v_{k,i} \quad \text{при } k < i, \\ v_{i+2,l}^{\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}} &= v_{i,l}. \end{aligned}$$

Сравнивая действие автоморфизмов $\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i$ и $\alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}$ на элементе $v_{i,i+2}$, видим, что они совпадают тогда и только тогда, когда $t = 1$.

Аналогичным образом проверяется, что при гомоморфизме ρ сохраняются соотношения $\sigma_{i+1} \sigma_i \alpha_{i+1} = \alpha_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ при любых значениях t и q . Тем самым установлено

Предложение 2. *Определенное выше действием на порождающих отображение $\rho : C_n \rightarrow \text{GL}(V_n)$ является линейным представлением тогда и только тогда, когда $t = 1$.*

При $t = 1$ модуль V_n является симметрическим квадратом модуля W_n , на котором определено представление Бурау. Следовательно, построенное нами представление $\rho : C_n \rightarrow \text{GL}(V_n)$ не является точным при $n \geq 5$. В случае $n = 3, 4$ вопрос о точности представления ρ остается открытым.

Как мы заметили выше, для построенного отображения ρ перестает выполняться образ соотношения $\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}$ на элементе $v_{i,i+2}$. Можно попробовать определить действие элементов α_i на базисе модуля V_n по-другому, чтобы соотношение $\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}$ сохранялось. Справедлива следующая легко проверяемая

Лемма 3. *Для всякого элемента $x \in \mathbb{R}$ отображение $\rho_1 : S_n \rightarrow \text{GL}(V_n)$, заданное действием порождающих α_i на базисе модуля V_n равенствами*

$$\begin{aligned} \alpha_i(v_{k,i}) &= xv_{k,i+1}, \\ \alpha_i(v_{k,i+1}) &= x^{-1}v_{k,i} \quad \text{при } k < i, \\ \alpha_i(v_{i,i+1}) &= v_{i,i+1}, \\ \alpha_i(v_{i,l}) &= xv_{i+1,l} \quad \text{при } i+1 < l, \\ \alpha_i(v_{i+1,l}) &= x^{-1}v_{i,l}, \\ \alpha_i(v_{k,l}) &= v_{k,l} \quad \text{при } \{k,l\} \cap \{i,i+1\} = \emptyset, \end{aligned}$$

является точным.

Если продолжить отображение ρ_1 на всю группу C_n , полагая $\rho_1(\sigma_i) = \rho(\sigma_i)$, то получим отображение $\rho_1 : C_n \rightarrow \text{GL}(V_n)$. Проверяя соотношения группы C_n на образах порождающих, заметим, что если положить $x = t^{-1/3}$, то нетрудно проверить, что соотношения

$$\sigma_i \alpha_{i+1} \alpha_i = \alpha_{i+1} \alpha_i \sigma_{i+1}, \quad \sigma_{i+1} \sigma_i \alpha_{i+1} = \alpha_i \sigma_{i+1} \sigma_i$$

будут сохраняться. Но в этом случае не сохраняется соотношение $\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i$. Действительно, так как

$$v_{i,j}^{\alpha_i \sigma_j} = x(1-q)v_{i+1,j} + xqv_{i+1,j+1} + xq(q-1)v_{j,j+1},$$

$$v_{i,j}^{\sigma_j \alpha_i} = x(1-q)v_{i+1,j} + xqv_{i+1,j+1} + q(q-1)v_{j,j+1},$$

для выполнения равенства $v_{i,j}^{\alpha_i \sigma_j} = v_{i,j}^{\sigma_j \alpha_i}$ мы должны положить $x = 1$. С другой стороны, группа C_3 не содержит соотношений вида $\alpha_i \sigma_j = \sigma_j \alpha_i$. Следовательно, справедливо

Предложение 3. *Линейное представление $\rho_1 : C_3 \rightarrow \text{GL}(V_3)$ является продолжением представления Лоуренс — Крамера на группу C_3 .*

§ 2. Линейные представления групп кос некоторых многообразий

Напомним вначале определение группы кос многообразия (см. [1, п. 1.1]). Пусть M — связное многообразие размерности ≥ 2 . Конфигурационным пространством $F_n(M)$, $n \in \mathbb{N}$, многообразия M называется множество

$$F_n(M) = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in M^n \mid z_i \neq z_j \text{ при } i \neq j\}$$

упорядоченных наборов n различных точек из M . Его фундаментальная группа $\pi_1(F_n(M))$ называется n -нитиевой группой крашенных кос многообразия M и обозначается через $P_n(M)$. Симметрическая группа S_n действует на пространстве $F_n(M)$ перестановкой координат. Известно, что это действие свободно и индуцирует регулярное накрытие пространства орбит $F_n(M)/S_n$ пространством $F_n(M)$. Фундаментальная группа $B_n(M) = \pi_1(F_n(M)/S_n)$ называется n -нитиевой группой кос многообразия M . Накрывающее отображение $F_n(M) \rightarrow F_n(M)/S_n$ индуцирует короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow B_n(M) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1.$$

Если M — замкнутое гладкое многообразие, то отображение $F_n(M) \rightarrow M^n$ индуцирует эпиморфизм $P_n(M) \rightarrow \pi_1(M) \times \dots \times \pi_1(M)$ группы крашенных кос $P_n(M)$ на прямое произведение n экземпляров фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Более того, если размерность многообразия M больше двух, то этот эпиморфизм является инъективным. Поэтому наибольший интерес представляют группы кос двумерных многообразий.

Среди замкнутых двумерных многообразий особую роль играют сфера S^2 и проективная плоскость P^2 , так как группы кос только этих поверхностей имеют кручение. Если же M — замкнутая поверхность, отличная от S^2 и P^2 , то в последовательности

$$1 \longrightarrow P_n(E^2) \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow \prod_{i=1}^n \pi_1(M) \longrightarrow 1$$

ядро каждого гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием образа предыдущего гомоморфизма. Здесь E^2 — евклидова плоскость, а $\prod_{i=1}^n \pi_1(M)$ — прямое произведение n экземпляров группы $\pi_1(M)$.

Классическая группа кос B_n , введенная Артином, является группой кос евклидовой плоскости, т. е. $B_n = B_n(E^2)$. В дальнейшем будем называть ее просто *группой кос*.

Как установили Фадель и Ван Бускирк (см. [1, теорема 1.11; 16]), группа кос $B_n(S^2)$ двумерной сферы S^2 порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$ и определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \delta_i \delta_{i+1} \delta_i &= \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1} \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n-2, \\ \delta_i \delta_j &= \delta_j \delta_i \quad \text{при } |i-j| \geq 2, \\ \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-2} \delta_{n-1}^2 \delta_{n-2} \dots \delta_2 \delta_1 &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что группа $B_n(S^2)$ является гомоморфным образом группы B_n . В частности, группа $B_2(S^2)$ — циклическая группа порядка 2, а $B_3(S^2)$ — метациклическая группа порядка 12. Поэтому далее будем считать, что $n > 3$.

Строение группы $B_n(S^2)$ исследовалось в работе Жилета и Ван Бускирка [17]. Напомним полученные там результаты. Определим элементы

$$a_{i,i} = 1, \quad a_{i,j} = \delta_i^{-1} \delta_{i+1}^{-1} \dots \delta_{j-2}^{-1} \delta_{j-1}^2 \delta_{j-2} \dots \delta_{i+1} \delta_i, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (1)$$

Легко проверить, что они лежат в группе $P_n(S^2)$, которая является ядром гомоморфизма $\nu : B_n(S^2) \rightarrow S_n$, переводящего порождающий δ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$. Более того, $P_n(S^2)$ порождается элементами (1). Для каждого $i = 1, 2, \dots, n-1$ определим подгруппу A_{n-i+1} , порожденную элементами $a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \dots, a_{i,n}$. Группа A_n нормальна в $P_n(S^2)$, и мы можем рассмотреть короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow A_n \longrightarrow P_n(S^2) \longrightarrow P_{n-1}(S^2) \longrightarrow 1.$$

При этом $P_n(S^2)$ является полупрямым произведением: $P_n(S^2) = A_n \rtimes P_{n-1}(S^2)$, а в группе A_n порождающие связаны соотношением

$$a_{1,2} a_{1,3} \dots a_{1,n} = 1.$$

Кроме того, в группе $P_n(S^2)$ выполнены соотношения

$$a_{i,i+1} a_{i,i+2} \dots a_{i,i+n-1} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где мы полагаем $a_{j,i} = a_{i,j}$ при $j > i$ и все индексы берутся по модулю n . Из этих соотношений получаются следующие равенства:

$$a_{i,n} = a_{i,n-1}^{-1} \dots a_{i,i+1}^{-1} a_{i-1,i}^{-1} \dots a_{1,i}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Используя эти равенства, мы можем исключить $a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{n-1,n}$ из системы порождающих группы $P_n(S^2)$. Подгруппа A_{n-i+1} свободно порождается элементами $a_{i,i+1}, a_{i,i+2}, \dots, a_{i,n-1}$.

Центр группы $B_n(S^2)$ порождается элементом

$$\Delta_n = (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-2})^{n-1} = (a_{1,2} a_{1,3} \dots a_{1,n-1}) (a_{2,3} a_{2,4} \dots a_{2,n-1}) \dots (a_{n-2,n-1})$$

и имеет порядок 2.

Группа $P_n(S^2)$ распадается в полупрямое произведение

$$P_n(S^2) = A_n \rtimes (A_{n-1} \rtimes (\dots \rtimes A_3) \dots).$$

Обозначим $L_n = A_n \rtimes (A_{n-1} \rtimes (\dots \rtimes A_4) \dots)$. Так как A_3 — циклическая подгруппа с порождающим $a_{n-2,n-1}$, можно заметить, что $P_n(S^2) = L_n \rtimes \langle \Delta_n \rangle \simeq L_n \rtimes \mathbb{Z}_2$. Далее, группа L_n изоморфна группе $U_n \rtimes (U_{n-1} \rtimes (\dots \rtimes U_4) \dots) \leq P_n$.

С группой кос сферы тесно связана группа классов отображений сферы с n выколотыми точками, которую мы обозначим через $M(0, n)$. Группа $M(0, n)$ является фактор-группой группы $B_n(S^2)$ по центру [1, теорема 4.5], т. е. генетический код группы $M(0, n)$ получается из генетического кода группы $B_n(S^2)$ введением дополнительного соотношения $\Delta_n = (\delta_1 \delta_2 \dots \delta_{n-2})^{n-1} = 1$. Поэтому существует эпиморфизм из $B_n(S^2)$ на $M(0, n)$, ядро которого совпадает с центром группы $B_n(S^2)$. Можно сказать, что $M(0, n)$ — это фактор-группа группы сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы S^2 с n выколотыми точками по нормальной подгруппе, состоящей из гомеоморфизмов, изотопных тождественному.

Для группы $M(0, n)$ существует короткая точная последовательность

$$1 \longrightarrow L_n \longrightarrow M(0, n) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1,$$

где подгруппа L_n является ядром эпиморфизма $\nu : M(0, n) \rightarrow S_n$, посылающего порождающий δ_i в транспозицию $(i, i + 1)$, $i = 1, 2, \dots, n - 2$.

В работе А. И. Мальцева [18, лемма 1; 19, § 12] установлено, что если подгруппа H конечного индекса группы G является линейной, то и сама группа G является линейной. Пусть $|G : H| = m$ и $\psi : H \rightarrow \text{GL}_l(F)$ — точное представление группы H матрицами порядка l над полем F . Группа G является объединением правых смежных классов:

$$G = He \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_m.$$

Произведение $g_i g$, где g — произвольный элемент из G , можно единственным образом записать в виде $h_i g_{n_i}$, $h_i \in H$. Таким образом, каждому элементу g соответствуют последовательность элементов h_1, h_2, \dots, h_m из H и последовательность чисел n_1, n_2, \dots, n_m . Последовательности $\{n_i\}$ поставим в соответствие матрицу $D(n_i)$, определенную следующим образом:

$$D(n_i) = \| d_{j,k} \| \in M_{lm}(\mathbb{Z}), \quad d_{j,n_j} = E_l, \quad d_{j,k} = 0, \text{ если } k \neq n_j,$$

E_l — единичная матрица порядка l . Тогда элементу $g \in G$ поставим в соответствие матрицу

$$\text{diag}(\psi(h_1), \psi(h_2), \dots, \psi(h_m)) D(n_i).$$

Тем самым определено линейное представление группы G в группу $\text{GL}_{lm}(F)$. Это представление является точным.

Теорема 1. *Группы $M(0, n)$ и $B_n(S^2)$ являются линейными для любого $n \geq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено выше, при $n = 2, 3$ группы $M(0, n)$ и $B_n(S^2)$ конечны, а потому являются линейными. Пусть $R = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ — кольцо лорановских многочленов. Так как группа L_n изоморфно вкладывается в группу кос B_n , существует точное линейное представление $\rho : L_n \rightarrow \text{GL}_l(R)$, где $l = (n - 1)(n - 2)/2$, индуцированное представлением Лоуренс — Крамера.

Чтобы построить представление группы $M(0, n)$, воспользуемся описанной выше конструкцией.

Пусть $m_1, m_2, \dots, m_{n!}$ — представители правых смежных классов группы $M(0, n)$ по подгруппе L_n . Так как группа $M(0, n)$ порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$, достаточно сопоставить матрицы этим порождающим. Каждый порождающий δ_k действует на множестве правых смежных классов перестановками. Найдем

$$m_i \delta_k = h_i^k m_{\pi_k(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n!, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1,$$

где символ k , стоящий сверху, означает индекс, а не показатель степени. Это соглашение будет действовать до конца доказательства теоремы. Сопоставим порождающему δ_k матрицу

$$\varphi(\delta_k) = \text{diag}(\rho(h_1^k), \rho(h_2^k), \dots, \rho(h_{n!}^k)) \pi(\delta_k) \in \text{GL}_m(R),$$

где $\text{diag}(\rho(h_1^k), \rho(h_2^k), \dots, \rho(h_{n!}^k))$ — блочно-диагональная матрица, а $\pi(\delta_k)$ — блочно-мономиальная матрица, у которой блок, стоящий на месте $(j, \pi(j))$, является единичной матрицей порядка l , а блок, стоящий на месте (j, s) при $s \neq \pi(j)$, — нулевой матрицей порядка l . Определенное таким образом представление φ является точным линейным представлением группы $M(0, n)$.

Рассмотрим теперь группу $B_n(S^2)$. Она содержит линейную подгруппу L_n индекса $2n!$. В качестве представителей правых смежных классов группы $B_n(S^2)$ по подгруппе L_n можно выбрать элементы

$$m_i \Delta_n^\epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n!, \quad \epsilon = 0, 1,$$

где Δ_n — порождающий центра группы $B_n(S^2)$. Так как группа $B_n(S^2)$ порождается элементами $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$, достаточно определить представление φ_1 на этих элементах. Упорядочим представители смежных классов $m_i \Delta_n^\epsilon$ и обозначим их символами $n_1, n_2, \dots, n_{2n!}$. Каждый порождающий δ_k группы $B_n(S^2)$ действует на этих представителях по формуле

$$n_j \delta_k = g_j^k n_{\pi_k(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n!, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Сопоставим порождающему δ_k матрицу

$$\varphi_1(\delta_k) = \text{diag}(\rho(g_1^k), \rho(g_2^k), \dots, \rho(g_{2n!}^k)) \pi(\delta_k) \in \text{GL}_{2m}(R),$$

где $\text{diag}(\rho(g_1^k), \rho(g_2^k), \dots, \rho(g_{2n!}^k))$ — блочно-диагональная матрица, а $\pi(\delta_k)$ — блочно-мономиальная матрица, у которой блок, стоящий на месте $(j, \pi(j))$, является единичной матрицей порядка l , а блок, стоящий на месте (j, s) при $s \neq \pi(j)$, — нулевой матрицей порядка l . Построенное представление φ_1 — точное линейное представление группы $B_n(S^2)$ над кольцом R . Так как кольцо R вложимо в поле комплексных чисел \mathbb{C} (достаточно в качестве t и q взять обратимые трансцендентные над \mathbb{Q} комплексные числа), получаем требуемое утверждение.

§ 3. Точное линейное представление группы $\text{Aut}(F_2)$

Известно [9], что группа автоморфизмов $\text{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n не является линейной при $n \geq 3$. С другой стороны, как установлено в работе [12], группа $\text{Aut}(F_2)$ линейна тогда и только тогда, когда линейна группа кос на четырех нитях B_4 . Так как последняя является линейной, можно построить в явном виде точное линейное представление группы $\text{Aut}(F_2)$. Для этого нам потребуются некоторые результаты из работы [12]. Напомним их.

Обозначим $B_4^* = B_4/Z(B_4)$, где $Z(B_4)$ — центр группы B_4 . Как отмечено выше, $Z(B_4)$ — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $\Delta_4 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^4$. Группа B_4^* изоморфна группе $\text{Aut}^+(F_2)$, которая является прообразом подгруппы $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ при гомоморфизме $\xi : \text{Aut}(F_2) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z})$, переводящем автоморфизм группы F_2 в автоморфизм свободной абелевой группы ранга 2. При этом $\text{Aut}^+(F_2)$ является подгруппой индекса 2 группы $\text{Aut}(F_2)$.

Пусть $\rho : B_4 \rightarrow \text{GL}_6(\mathbb{C})$ — точное представление Лоуренс — Крамера, которое, как заметил Зино [20], является неприводимым.

Символом F обозначим подгруппу группы B_4 , порожденную элементами $x = \sigma_1 \sigma_3^{-1}$, $y = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1}$. Эта группа является свободной группой со свободными порождающими x и y , и, кроме того, F нормальна в B_4 . Внутренние автоморфизмы группы B_4 индуцируют автоморфизмы группы F , т. е. существует эпиморфизм $h : B_4 \rightarrow \text{Aut}^+(F_2)$. Ядро этого эпиморфизма совпадает с центром группы B_4 , а образы порождающих $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяют автоморфизмы

$$h(\sigma_1) = \alpha_1 : \begin{cases} x \mapsto x, \\ y \mapsto yx^{-1}, \end{cases}$$

$$h(\sigma_2) = \alpha_2 : \begin{cases} x \mapsto y, \\ y \mapsto yx^{-1}y, \end{cases}$$

$$h(\sigma_3) = \alpha_3 : \begin{cases} x \mapsto x, \\ y \mapsto x^{-1}y. \end{cases}$$

Вся группа $\text{Aut}(F_2)$ порождается автоморфизмами

$$P : \begin{cases} x \mapsto y, \\ y \mapsto x, \end{cases} \quad \omega : \begin{cases} x \mapsto x^{-1}, \\ y \mapsto y, \end{cases} \quad U : \begin{cases} x \mapsto xy, \\ y \mapsto y \end{cases}$$

и определяется соотношениями

$$P^2 = \omega^2 = (\omega P)^4 = (P\omega PU)^2 = (UP\omega)^3 = [\omega, \omega U\omega] = 1.$$

При этом справедливы равенства

$$\alpha_1 = PU^{-1}P, \quad \alpha_2 = PU\omega U^{-1}, \quad \alpha_3 = P\omega U\omega P.$$

Воспользуемся представлением Лоуренс — Крамера $\rho : B_4 \rightarrow \text{GL}_6(\mathbb{C})$ и найдем образы порождающих группы B_4 :

$$\rho_1 = \rho(\sigma_1) = \begin{pmatrix} tq^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ tq(q-1) & 1-q & 0 & q & 0 & 0 \\ tq(q-1) & 0 & 1-q & 0 & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \rho(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & q(q-1) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & tq^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & tq(q-1) & 1-q & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \rho(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & q & 0 & 0 & q(q-1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & q & q(q-1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & tq^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $(\rho_1\rho_2\rho_3)^4 = t^2q^8E_6$ — образ центра группы B_4 . Положим $\mu = 1/\sqrt[12]{t^2q^8}$ и $\bar{\rho}(\sigma_i) = \mu\rho(\sigma_i) = \mu\rho_i$. Тогда $\bar{\rho}$ индуцирует точное представление группы $B_4^* \simeq \text{Aut}^+ F_2$. Построим теперь точное линейное представление группы $\text{Aut} F_2$.

Подгруппа $\text{Aut}^+ F_2$ имеет индекс 2 в группе $\text{Aut} F_2$, и в качестве представителей правых смежных классов можно взять элементы e и ω . Справедлива следующая легко проверяемая

Лемма 4. В группе $\text{Aut} F_2$ справедливы равенства

- 1) $\omega\alpha_1 = \alpha_1^{-1}\omega$,
- 2) $\omega\alpha_2 = \alpha_3\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}\omega$,

$$3) \omega\alpha_3 = \alpha_3^{-1}\omega.$$

Так как группа $\text{Aut } F_2$ порождается автоморфизмами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega$, действуя на смежные классы группы $\text{Aut } F_2$ по подгруппе $\text{Aut}^+ F_2$, находим соответствующие диагональные и мономиальные матрицы. Положим

$$\psi(\alpha_1) = \text{diag}(\bar{\rho}_1, (\bar{\rho}_1)^{-1}), \quad \psi(\alpha_2) = \text{diag}(\bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3\bar{\rho}_1(\bar{\rho}_2)^{-1}(\bar{\rho}_1)^{-1}(\bar{\rho}_3)^{-1}),$$

$$\psi(\alpha_3) = \text{diag}(\bar{\rho}_3, (\bar{\rho}_3)^{-1}), \quad \psi(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & E_6 \\ E_6 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_6 — единичная матрица порядка 6, а матрицы $\bar{\rho}_i$ определены выше. Сопрягая это представление матрицей $c = \text{diag}(E_6, \bar{\rho}_3\bar{\rho}_1)$, получим новое представление:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\alpha_i) &= c^{-1}\psi(\alpha_i)c = \begin{pmatrix} \bar{\rho}_i & 0 \\ 0 & \bar{\rho}_i^{-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3; \\ \bar{\psi}(\omega) &= c^{-1}\psi(\omega)c = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\rho}_3\bar{\rho}_1 \\ (\bar{\rho}_3\bar{\rho}_1)^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда справедлива

Теорема 2. *Отображение $\bar{\psi} : \text{Aut } F_2 \rightarrow \text{GL}_{12}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}])$, заданное на порождающих равенствами (1) определяет точное линейное представление группы $\text{Aut } F_2$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Birman J. S. Braids, links and mapping class groups. Princeton; Tokyo: Princeton Univ. Press, 1974.
2. Burau W. Uber Zopfgruppen und gleichsinnig verdrehte Verkettungen // Abh. Math. Semin. Hamburg Univ. 1936. V. 11. P. 179–186.
3. Moody J. A. The Burau representation of the braid group B_n is unfaithful for large n // Bull. Amer. Math. Soc. 1991. V. 25, N 2. P. 379–384.
4. Long D. D., Paton M. The Burau representation is not faithful for $n \geq 5$ // Topology. 1993. V. 32, N 2. P. 439–447.
5. Bigelow S. The Burau representation is not faithful for $n \geq 6$ // Geom. Topology. 1999. V. 3. P. 397–404.
6. Lawrence R. J. Homological representation of the Hecke algebra // Comm. Math. Phys. 1990. V. 135, N 1. P. 141–191.
7. Krammer D. Braid groups are linear // Ann. of Math. (2). 2002. V. 155, N 1. P. 131–156.
8. Bigelow S. Braid groups are linear // J. Amer. Math. Soc. 2001. V. 14. P. 471–486.
9. Formanek E., Procesi C. The automorphism groups of a free group is not linear // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 494–499.
10. Бардаков В. Г. Строение группы сопрягающих автоморфизмов // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 515–541.
11. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002.
12. Dyer J. L., Formanek E., Grossman E. K. On the linearity of automorphism groups of free groups // Arch. Math. 1982. V. 38, N 5. P. 404–409.
13. Бардаков В. Г., Нецадим М. В. Некоторые свойства групп кос компактных ориентируемых 2-многообразий // IV Междунар. алгебр. конф., посвященная 60-летию профессора Ю. И. Мерзлякова. Новосибирск, 2000. P. 9–13.
14. Bigelow S. J., Budney R. D. The mapping class group of a genus two surface is linear // Algebr. Geom. Topoljgy. 2001. V. 1. P. 699–708.
15. Савушкина А. Г. О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 1. С. 92–108.
16. Fadell E., Van Buskirk J. The braid groups of E^2 and S^2 // Duke. Math. J. 1962. V. 29, N 2. P. 243–258.

17. Gillette R., Van Buskirk J. The word problem and consequences for the braid groups and mapping class groups of the 2-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131, N 2. P. 277–296.
18. Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 8, № 3. С. 405–422.
19. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 4-е изд. М.: Наука, 1996.
20. Zippin M. G. On Krammer's representation of the braid group // Math. Ann. 2000. V. 321, N 1. P. 197–211.

Статья поступила 14 июля 2004 г.

*Бардаков Валерий Георгиевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bardakov@math.nsc.ru*