L. A. Molotkov, A. V. Bakulin, Sources of the center of dilatation and center of compression types in the Biot model, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 230, 196–213

Л. А. Молотков, А. В. Бакулин

ОБ ИСТОЧНИКАХ ТИПА ЦЕНТРОВ РАСШИРЕНИЯ И ДАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ БИО

В предлагаемой работе определяются волновые поля точечных источников типа центров расширения и давления в однородной изотропной и безграничной модели Био пористой среды. Каждый из этих источников первоначально задается на сфере малого радиуса R_0. Внутри этой сферы может находиться или отсутствовать среда. В случае полого шара $R < R_0$ на сфере $R = R_0$ заданы смещения и напряжения, и такой источник называется источником первого рода [1]. В другом случае, когда сфера $R = R_0$ не является границей сред, на ней задаются скачки смещений и напряжений и этот источник относится к источникам второго рода [1]. Для указанных сферических источников определяется волновое поле, в котором совершается предельный переход при $R_0 \to 0$. При переходе от сферических источников к точечным устанавливаются условия конечности волнового поля. Эти условия характеризуют возрастание смещений, напряжений или их скачков на сфере $R = R_0$ при $R_0 \to 0$. Для источников второго рода и типа центра давлений дополнительно выясняется, при каких условиях выполняется принцип Сен-Венана в случае модели Био. В тех частных случаях, когда модель Био переходит в упругую или жидкую среду, выражения волнового поля переходят в соответствующие выражения для упругой и жидкой сред [1]. Такое соответствие устанавливается для источников второго рода.

Рассмотрению полей источников в пористых средах, описываемых моделью Био, посвящен ряд работ [2–6]. В большинстве из них в безграничной однородной изотропной пористой среде рассматривается источник типа направленных сил, которые учитываются в правых частях волновых уравнений [2–5]. Трудность такого подхода состоит в том, что из 6 компонент сил независимыми являются только 4. Чтобы система уравнений не была бы неопределенной или переопределенной, в работе [4] используются в качестве независимых переменных три компоненты смещений в скелете и давление в жидкой фазе, а уравнения Био заменяются четырьмя уравнениями, аналогичными уравнениям термоупругости. Применяемая в настоящей работе методика свободна от указанных трудностей.

§ 1. Источники первого рода

Пусть в сферической системе координат R, θ, φ задана однородная изотропная пористая среда Био со сферическим вырезом $R < R_0$. К границе этого выреза $R = R_0$ приложен некоторый сферически симметричный источник, заданный соотношениями

$$\sigma^{(1)} = B_1 f_1(t), \quad \sigma^{(2)}_{RR} = B_2 f_2(t) \tag{1.1}$$

или

$$u^{(1)}_R = B_3 f_3(t), \quad u^{(2)}_R = B_4 f_4(t) \tag{1.2}$$

при $R = R_0$ и действующий с момента времени $t = 0$. Величины $u^{(1)}_R$, $u^{(2)}_R$, $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}_{RR}$ описывают определенные смещения и напряжения, при этом верхние индексы 1 и 2 относятся соответственно к жидкой и упругой фазам. Как и в работе [7], осреднение напряжений производится по всему объему малых окрестностей рассматриваемой точки, а осреднение смещений осуществляется по малой окрестности только внутри своей фазы. Образующееся волновое поле выражается равенствами

$$\begin{aligned} &u^{(1)}_R = \frac{\partial \varphi_1}{\partial R}, \quad u^{(2)}_R = \frac{\partial \varphi_2}{\partial R}, \\ &\sigma^{(1)} = \tilde{R}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\right) + M\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\right), \\ &\sigma^{(2)}_{RR} = M\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\right) + P\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial R^2} + \frac{2F}{R}\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \end{aligned} \tag{1.3}$$

через потенциалы φ_1 и φ_2, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\right) + M\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\right) = \rho_{11}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\ &M\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\right) + \tilde{R}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\right) = \rho_{12}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

В соотношениях (1.3) и (1.4) используются обозначения, предложенные Био в работе [8]. Для коэффициентов $P, F, M, \tilde{R}, \rho_{11}$, ρ_{12} и ρ_{22} выполняются неравенства

$$P\tilde{R} - M^2 > 0, \quad P > F, \quad P > 0, \quad \tilde{R} > 0, \quad \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0, \tag{1.5}$$

обеспечивающие положительность плотностей кинетической и потенциальной энергий.

При рассмотрении сферически симметричных волновых полей полезно перейти к другим потенциалам ϕ_1 и ϕ_2 по формулам

$$\varphi_1 = \phi_1/R, \quad \varphi_2 = \phi_2/R. \tag{1.6}$$

Для новых потенциалов справедливы уравнения

$$\begin{aligned} P\frac{\partial^2\phi_2}{\partial R^2} + M\frac{\partial^2\phi_1}{\partial R^2} &= \rho_{11}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}, \\ M\frac{\partial^2\phi_2}{\partial R^2} + \tilde{R}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial R^2} &= \rho_{12}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Смещения и напряжения выражаются через новые потенциалы равенствами

$$\begin{aligned} &u_R^{(1)} = \frac{1}{R}\frac{\partial\phi_1}{\partial R} - \frac{\phi_1}{R^2}, \quad u_R^{(2)} = \frac{1}{R}\frac{\partial\phi_2}{\partial R} - \frac{\phi_2}{R^2}, \\ &\sigma^{(1)} = \frac{1}{R}\left(\rho_{12}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}\right), \\ &\sigma_r^{(2)} = \frac{1}{R}\left(\rho_{11}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}\right) - \frac{4L}{R^2}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial R} - \frac{\phi_2}{R}\right), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $L = (P - F)/2$.

Решение системы уравнений с постоянными коэффициентами (1.7) представим в виде соотношений

$$\begin{aligned} \phi_1 &= F_1\left(t - \frac{R}{V_1}\right) + F_2\left(t - \frac{R}{V_2}\right), \\ \phi_2 &= A_1F_1\left(t - \frac{R}{V_1}\right) + A_2F_2\left(t - \frac{R}{V_2}\right), \end{aligned} \tag{1.9}$$

в которых F_1 и F_2 – произвольные функции своих аргументов. Из условия совместности решений (1.9) уравнений (1.7) следуют равенства

$$\begin{aligned} V_{1,2}^2 = \Bigg[&\pm\sqrt{(P\rho_{22} + \tilde{R}\rho_{11} - 2M\rho_{12})^2 - 4(\rho_{11}\rho_{12} - \rho_{12}^2)(P\tilde{R} - M^2)} + \\ &+ P\rho_{22} + \tilde{R}\rho_{11} - 2M\rho_{12}\Bigg] / [2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)], \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$A_{1,2} = \frac{\rho_{12}V_{1,2}^2 - M}{P - \rho_{11}V_{1,2}^2} = \frac{\rho_{22}V_{1,2}^2 - \tilde{R}}{M - \rho_{12}V_{1,2}^2}, \tag{1.11}$$

определяющие скорости распространения V_1, V_2 и относительные амплитуды A_1 и A_2, при этом на основании неравенств (1.5) $V_1 > 0$

и $V_2 > 0$. После подстановки формул (1.9) в соотношения (1.8) приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
u_R^{(1)} &= -\frac{1}{RV_1}F_1'\left(t-\frac{R}{V_1}\right)-\frac{1}{RV_2}F_2'\left(t-\frac{R}{V_2}\right)- \\
&\quad -\frac{1}{R^2}F_1\left(t-\frac{R}{V_1}\right)-\frac{1}{R^2}F_2\left(t-\frac{R}{V_2}\right), \\
u_R^{(2)} &= -\frac{A_1}{RV_1}F_1'\left(t-\frac{R}{V_1}\right)-\frac{A_2}{RV_2}F_2'\left(t-\frac{R}{V_2}\right)- \\
&\quad -\frac{A_1}{R^2}F_1\left(t-\frac{R}{V_1}\right)-\frac{A_2}{R^2}F_2\left(t-\frac{R}{V_2}\right), \\
\sigma_{RR}^{(2)} &= \frac{1}{R}\left[(\rho_{12}+\rho_{11}A_1)F_1''\left(t-\frac{R}{V_1}\right)+\right. \\
&\quad \left.+(\rho_{12}+\rho_{11}A_2)F_2''\left(t-\frac{R}{V_2}\right)\right]-\frac{4L}{R}u_R^{(2)}, \\
\sigma^{(2)} &= \frac{1}{R}\left[(\rho_{11}+\rho_{12}A_1)F_1''\left(t-\frac{R}{V_1}\right)+\right. \\
&\quad \left.+(\rho_{11}+\rho_{12}A_2)F_2''\left(t-\frac{R}{V_2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Граничные условия (1.1), определяющие источник типа центра давлений, с учетом третьего и четвертого соотношений (1.12), заменяются равенствами

$$\begin{gathered}
R_0^2\left[(\rho_{12}+\rho_{11}A_1)F_1''\left(t-\frac{R_0}{V_1}\right)+(\rho_{12}+\rho_{11}A_2)F_2''\left(t-\frac{R_0}{V_2}\right)\right]+ \\
+4LR_0\left[\frac{A_1}{V_1}F_1'\left(t-\frac{R_0}{V_1}\right)+\frac{A_2}{V_2}F_2'\left(t-\frac{R_0}{V_2}\right)\right]+ \\
+4L\left[A_1F_1\left(t-\frac{R_0}{V_1}\right)+A_2F_2\left(t-\frac{R_0}{V_1}\right)\right]=B_2R_0^3f_2(t), \\
(\rho_{11}+\rho_{12}A_1)F_1''\left(t-\frac{R_0}{V_1}\right)+(\rho_{11}+\rho_{12}A_2)F_2''\left(t-\frac{R_0}{V_2}\right)=B_1R_0f_1(t).
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Чтобы в формулах (1.13) перейти к заданию точечного истчника типа центра давлений, необходимо совершить предельный переход при $R_0 \to 0$ и потребовать, чтобы величины B_1R_0 и $B_2R_0^3$ оставались при этом конечными. Аналогичные требования были поставлены в работе [1] при рассмотрении точечных источников центра давлений в упругих и жидких средах. Поскольку, по-видимому, невозможно практически выполнить одновременно оба эти требования, то положим

$$B_1 R_0 = 1, \quad B_2 R_0^3 = 0 \tag{1.14}$$

и придем к равенствам

$$\begin{gathered} A_1 F_1(t) + A_2 F_2(t) = 0, \\ (\rho_{11} + \rho_{12} A_1) F_1''(t) + (\rho_{11} + \rho_{12} A_2) F_2''(t) = f_1(t), \end{gathered} \tag{1.15}$$

показывающими, что рассматриваемая среда Био возбуждается точечным источником только через жидкую фазу. После двойного дифференцирования первого равенства (1.15) и исключения одной из вторых производных получаем выражение

$$F_1''(t) = \frac{A_2 f_1(t)}{\rho_{11}(A_2 - A_1)}, \quad F_2''(t) = -\frac{A_1 f_1(t)}{\rho_{11}(A_2 - A_1)}. \tag{1.16}$$

Полученное волновое поле полезно также представить и в цилиндрической системе координат r, φ, z. Если выразить определенную только при положительном аргументе функцию $f(t - R/v)$ интегралом Меллина

$$f\left(t - \frac{R}{v}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s) e^{s(t - \frac{R}{v})} ds, \tag{1.17}$$

использовать формулу [9]

$$\frac{e^{-SR/v}}{R} = \int\limits_0^\infty k J_0(kr) \frac{e^{-|z|\sqrt{k^2 + s^2/v^2}}}{\sqrt{k^2 + s^2/v^2}} dk \tag{1.18}$$

и произвести перестановку интегралов и замену переменной интегрирования $s = k\eta$, то придем к соотношению

$$f(t - R/v)/R = \int\limits_0^\infty \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{G(k\eta) e^{k(t\eta - |z|\alpha)}}{\alpha} d\eta, \tag{1.19}$$

где

$$\alpha = \sqrt{1 + \eta^2/v^2}, \quad G(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-k\eta t} dt. \tag{1.20}$$

Применяя формулу (1.19), представим волновое поле (1.6), (1.9) и (1.16) в цилиндрических координатах равенствами

$$\varphi_i = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr) dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} Z_i e^{kt\eta} d\eta, \tag{1.21}$$

в которых

$$Z_1 = \frac{G_1(k\eta)}{\rho_{11}(A_2 - A_1)k^2\eta^2}\left(\frac{A_2 e^{-k|z|\alpha_1}}{\alpha_1} - \frac{A_1 e^{-k|z|\alpha_2}}{\alpha_2}\right),$$
$$Z_2 = -\frac{G_1(k\eta)A_1A_2}{\rho_{11}(A_2 - A_1)k^2\eta^2}\left(\frac{e^{-k|z|\alpha_1}}{\alpha_1} - \frac{e^{-k|z|\alpha_2}}{\alpha_2}\right); \tag{1.22}$$

$$\alpha_i = \sqrt{1 + \eta^2/v_i^2}\ (i = 1, 2), \quad G_1(k\eta) = \int\limits_0^\infty f_1(t)e^{-k\eta t}dt. \tag{1.23}$$

Рассмотрим теперь действие источника типа центра расширения. Задача о нахождениии поля источника (1.2) сводится к определению функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$ из системы уравнений

$$\frac{R_0}{V_1}F_1'\left(t - \frac{R_0}{V_1}\right) + F_1\left(t - \frac{R_0}{V_1}\right) +$$
$$+\frac{R_0}{V_2}F_2'\left(t - \frac{R_0}{V_2}\right) + F_2\left(t - \frac{R_0}{V_2}\right) = -B_1R_0^2 f_1(t),$$
$$A_1\left[\frac{R_0}{V_1}F_1'\left(t - \frac{R_0}{V_1}\right) + F_1\left(t - \frac{R_0}{V_1}\right)\right] +$$
$$+A_2\left[\frac{R_0}{V_2}F_2'\left(t - \frac{R_0}{V_2}\right) + F_2\left(t - \frac{R_0}{V_2}\right)\right] = -B_2R_0^2 f_2(t), \tag{1.24}$$

записанной на основании первого и второго соотношения (1.12). В равенствах (1.24) совершим предельный переход при $R_0 \to 0$ и для получения конечных выражений предположим, что коэффициенты B_1 и B_2 удовлетворяют условиям

$$B_1R_0^2 = \bar{B}_1 = \text{const}, \quad B_2R_0^2 = \bar{B}_2 = \text{const}. \tag{1.25}$$

После предельного перехода система (1.24) заменится равенствами

$$F_1(t) + F_2(t) = -\bar{B}_1 f_1(t), \quad A_1F_1(t) + A_2F_2(t) = -\bar{B}_2 f_2(t), \tag{1.26}$$

из которых следуют выражения

$$F_1(t) = -\frac{A_2\bar{B}_1 f_1(t) - \bar{B}_2 f_2(t)}{A_2 - A_1}, \quad F_2(t) = \frac{\bar{B}_1 A_1 f_1(t) - \bar{B}_2 f_2(t)}{A_2 - A_1} \tag{1.27}$$

для функций $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Переход к цилиндрической системе координат в построенном волновом поле производится с помощью формулы (1.18). Потенциалы также представляются соотношениями (1.21), в которых

$$Z_1 = \frac{k}{A_2 - A_1}\times$$
$$\times\left[(\bar{B}_2G_2 - A_2\bar{B}_1G_1)\frac{e^{-k|z|\alpha_1}}{\alpha_1} + (\bar{B}_1A_1G_1 - \bar{B}_2G_2)\frac{e^{-k|z|\alpha_2}}{\alpha_2}\right],$$
$$Z_2 = \frac{k}{A_2 - A_1}\times$$
$$\times\left[A_1(\bar{B}_2G_2 - A_2\bar{B}_1G_1)\frac{e^{-k|z|\alpha_1}}{\alpha_1} + A_2(\bar{B}_1A_1G_1 - \bar{B}_2G_2)\frac{e^{-k|z|\alpha_2}}{\alpha_2}\right],$$
$$G_i = G_i(k\eta) = \int\limits_0^\infty f_i(t)e^{-kt\eta}dt \quad (i = 1, 2). \tag{1.28}$$

Формулы (1.21) и (1.28) определяют волновое поле источника типа центра расширения в цилиндрической системе координат.

§ 2. Источники второго рода

Пусть в сферической системе координат R, θ, φ задана однородная изотропная безграничная пористая среда Био, которая возбуждается источником, приложенным к сфере $R = R_0$ и действующим с момента $t = 0$. Источник задается граничными условиями

$$\begin{aligned} [\sigma^{(1)}] &= B_1f_1(t), & [\sigma^{(2)}_{RR}] &= B_2f_2(t),\\ [u^{(1)}_R] &= B_3f_3(t), & [u^{(2)}_R] &= B_4f_4(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

при $R = R_0$ и в соответствии с работой [1] будет называться источником второго рода. Входящие в равенства (2.1) символы [ ] определяют скачки при $R = R_0$ функций, заключенных в квадратных скобках.

Образующееся поле удовлетворяет уравнениям и равенствам (1.3)–(1.8) и характеризуется потенциалами $\varphi_1 = \phi_1/R$ и $\varphi_2 = \phi_2/R$. Величины ϕ_1 и ϕ_2 являются решениями уравнений (1.7) и представляются соотношениями

$$\phi_1 = \begin{cases} F_1\left(t - \frac{R-R_0}{V_1}\right) + F_2\left(t - \frac{R-R_0}{V_2}\right), & R > R_0 \\ F_{10}\left(t + \frac{R+R_0}{V_1}\right) - F_{10}\left(t - \frac{R-R_0}{V_1}\right) + F_{20}\left(t + \frac{R+R_0}{V_2}\right) - \\ -F_{20}\left(t - \frac{R-R_0}{V_2}\right), & R < R_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\phi_2 = \begin{cases} A_1 F_1\left(t - \frac{R-R_0}{V_1}\right) + A_2 F_2\left(t - \frac{R-R_0}{V_2}\right), & R > R_0 \\ A_1 F_{10}\left(t + \frac{R+R_0}{V_1}\right) - A_1 F_{10}\left(t - \frac{R-R_0}{V_1}\right) + & \\ +A_2 F_{20}\left(t + \frac{R+R_0}{V_2}\right) - A_2 F_{20}\left(t - \frac{R-R_0}{V_2}\right), & R < R_0, \end{cases}$$

в которых F_1, F_2, F_{10} и F_{20} – произвольные функции своих аргументов. Эти функции описывают в области $R > R_0$ уходящие на бесконечность волны, а внутри сферы $R = R_0$ волны, распространяющиеся как от центра, так и к центру, при этом выполняются условия $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$, обеспечивающие конечность потенциалов φ_1 и φ_2 в центре сферы.

Нахождение образующегося поля сводится к определению явных выражений функций $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_{10}(t)$ и $F_{20}(t)$ на основе граничных условий (2.1). С этой целью представим левые части равенств (2.1) соотношениями

$$\begin{aligned} [u_R^{(1)}] &= \frac{1}{R_0}\left[\frac{\partial\phi_1}{\partial R}\right] - \frac{1}{R_0^2}[\phi_1], \\ [u_R^{(2)}] &= \frac{1}{R_0}\left[\frac{\partial\phi_2}{\partial R}\right] - \frac{1}{R_0^2}[\phi_2], \\ [\sigma^{(1)}] &= \frac{1}{R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{12}[\phi_2] + \rho_{22}[\phi_1]), \\ [\sigma_{RR}^{(2)}] &= \frac{1}{R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}[\phi_2] + \rho_{12}[\phi_1]) - \frac{4L}{R_0}[u_R^{(2)}] \end{aligned} \tag{2.3}$$

на основании формул (1.8). Скачки потенциалов ϕ_1 и ϕ_2, а также скачки их производных выражаются равенствами

$$\begin{aligned} [\phi_1] &= F_1(t) + F_2(t) + F_{10}\left(t - \frac{2R_0}{V_1}\right) - \\ &\quad - F_{10}(t) + F_{20}\left(t - \frac{2R_0}{V_2}\right) - F_{20}(t), \\ [\phi_2] &= A_1F_1(t) + A_2F_2(t) + A_1F_{10}\left(t - \frac{2R_0}{V_1}\right) - \\ &\quad - A_1F_{10}(t) + A_2F_{20}\left(t - \frac{2R_0}{V_2}\right) - A_2F_{20}(t), \\ \left[\frac{\partial\phi_1}{\partial R}\right] &= -\frac{1}{V_1}F_1'(t) - \frac{1}{V_2}F_2'(t) - \frac{1}{V_1}F_{10}'\left(t - \frac{2R_0}{V_1}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{V_1}F_{10}'(t) - \frac{1}{V_2}F_{20}'\left(t - \frac{2R_0}{V_2}\right) - \frac{1}{V_2}F_{20}'(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\left[\frac{\partial\phi_2}{\partial R}\right] = -\frac{A_1}{V_1}F_1'(t) - \frac{A_2}{V_2}F_2'(t) - \frac{A_1}{V_1}F_{10}'\left(t - \frac{2R_0}{V_1}\right) - \\ - \frac{A_1}{V_1}F_{10}'(t) - \frac{A_2}{V_2}F_{20}'\left(t - \frac{2R_0}{V_2}\right) - \frac{A_2}{V_2}F_{20}'(t),$$

На основании соотношений (2.1), (2.3) и (2.4) может быть записана система из четырех линейных операторных уравнений относительно функций F_1, F_2, F_{10} и F_{20}. Эта система решается, в частности, с помощью преобразования Лапласа и ее решение определяет волновое поле от сферического источника. После предельного перехода при $R_0 \to 0$ в выражениях для F_1, F_2, F_{10} и F_{20} приходим к формулам, определяющим поле точечного источника.

Однако для простоты преобразований ограничимся сперва подстановкой формул (2.4) в соотношения (2.3) и в полученных выражениях используем разложения в ряды Тейлора, сохранив при малых R_0 только старшие члены в коэффициентах при функциях $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_{10}(t)$ и $F_{20}(t)$ или при их производных. В результате получим:

$$[u_R^{(1)}] = -\frac{1}{R_0^2}F_1(t) - \frac{1}{R_0^2}F_2(t) - \frac{2}{3}\frac{R_0}{V_1^3}F_{10}'''(t) - \frac{2}{3}\frac{R_0}{V_2^3}F_{20}'''(t),$$

$$[u_R^{(2)}] = -\frac{A_1}{R_0^2}F_1(t) - \frac{A_2}{R_0^2}F_2(t) - \frac{2}{3}\frac{A_1R_0}{V_1^3}F_{10}'''(t) - \frac{2}{3}\frac{A_2R_0}{V_2^3}F_{20}'''(t),$$

$$R_0[\sigma^{(1)}] = (\rho_{12}A_1 + \rho_{22})F_1''(t) + (\rho_{12}A_2 + \rho_{22})F_2''(t) - \\ - \frac{2R_0}{V_1}(\rho_{12}A_1 + \rho_{22})F_{10}'''(t) - \frac{2R_0}{V_2}(\rho_{12}A_2 + \rho_{22})F_{20}'''(t), \tag{2.5}$$

$$R_0[\sigma_{RR}^{(2)}] + 4L[u_R^{(2)}] = (\rho_{11}A_1 + \rho_{12})F_1''(t) + (\rho_{11}A_2 + \rho_{12})F_2''(t) - \\ - \frac{2R_0}{V_1}(\rho_{11}A_1 + \rho_{12})F_{10}'''(t) - \frac{2R_0}{V_2}(\rho_{11}A_2 + \rho_{12})F_{20}'''(t).$$

Затем из первых двух уравнений (2.5) выразим величины $F_{10}'''(t)$ и $F_{20}'''(t)$, подставим их в третье и четвертое уравнения и в полученных равенствах отбросим члены, содержащие $F_1''(t)$ и $F_2''(t)$, вследствие их малости при малых R_0. После этого функции $F_1(t)$

и $F_2(t)$ выражаются равенствами

$$\begin{aligned}
F_1(t) = &-\frac{R_0^3}{3V_1^2(A_1-A_2)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}\times\\
&\times\Big[(\rho_{11}A_2+\rho_{12})[\sigma^{(1)}]-(\rho_{12}A_2+\rho_{22})[\sigma_{RR}^{(2)}]\Big]+\\
&+\frac{R_0^2(A_2[u_R^{(1)}]-[u_R^{(2)}])}{A_1-A_2}+\frac{4L(\rho_{12}A_2+\rho_{22})R_0^2[u_R^{(2)}]}{3V_1^2(A_1-A_2)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
F_2(t) = &\frac{R_0^3[(\rho_{11}A_1+\rho_{12})[\sigma^{(1)}]-(\rho_{12}A_1+\rho_{22})[\sigma_{RR}^{(2)}]]}{3V_2^2(A_1-A_2)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}-\\
&-\frac{R_0^2(A_1[u_R^{(1)}]-[u_R^{(2)}])}{A_1-A_2}-\frac{4L(\rho_{12}A_1+\rho_{22})R_0^2[u_R^{(2)}]}{3V_2^2(A_1-A_2)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Чтобы функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ были бы конечными при $R_0 \to 0$, необходимо выполнить условия

$$\begin{aligned}
&B_1R_0^3 = \tilde{B}_1 = \text{const}, \quad B_2R_0^3 = \tilde{B}_2 = \text{const},\\
&B_3R_0^2 = \tilde{B}_3 = \text{const}, \quad B_4R_0^2 = \tilde{B}_4 = \text{const}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

и учесть соотношения (2.1) и (2.7) при уточнении формул (2.6).

Источник второго рода, заданный равенствами (2.1), полезно разделить на два источника: центр давления

$$[\sigma^{(1)}] = \tilde{B}_1f_1(t)/R_0^3, \quad [\sigma_{RR}^{(2)}] = \tilde{B}_2f_2(t)/R_0^3, \quad [u_R^{(1)}] = [u_R^{(2)}] = 0 \tag{2.8}$$

и центр расширения

$$[\sigma^{(1)}] = [\sigma_{RR}^{(2)}] = 0, \quad [u_R^{(1)}] = \tilde{B}_3f_3(t)/R_0^2, \quad [u_R^{(2)}] = \tilde{B}_4f_4(t)/R_0^2. \tag{2.9}$$

Поле источника (2.8) характеризуется формулами

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= \frac{(\rho_{11}A_2+\rho_{12})\tilde{B}_1f_1(t)-(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\tilde{B}_2f_2(t)}{3V_1^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
F_2(t) &= -\frac{(\rho_{11}A_1+\rho_{12})\tilde{B}_1f_1(t)-(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\tilde{B}_2f_2(t)}{3V_2^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

а поле источника (2.9) определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
F_1(t) &= -\frac{A_2\tilde{B}_3f_3(t)-\tilde{B}_4f_4(t)}{A_2-A_1}-\frac{4L(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\tilde{B}_4f_4(t)}{3V_1^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
F_2(t) &= \frac{A_1\tilde{B}_3f_3(t)-\tilde{B}_4f_4(t)}{A_2-A_1}+\frac{4L(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\tilde{B}_4f_4(t)}{3V_2^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Используя соотношения (2.10) и (2.11), получим выражения для потенциалов в жидкой и упругой средах. Для этого применим формулы

$$\begin{aligned} &\rho_{11} = \rho_s(1-\varepsilon) + \varepsilon\rho_f(\alpha - 1), \quad \rho_{22} = \rho_f\varepsilon\alpha, \\ &\rho_{12} = -\rho_f(\alpha-1)\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.12}$$

выражающие плотности в модели Био через пористость ε, плотности ρ_s и ρ_f упругой и жидкой фаз, а также через извилистость порового пространства $\alpha(\alpha \geqslant 1)$. Чтобы перейти к источникам второго рода в жидкой среде, необходимо удовлетворить условиям

$$\tilde{B}_2 = \tilde{B}_4 = 0, \quad \varepsilon = 1, \quad P = F = M = L = 0, \quad \tilde{R} = \lambda_1,$$

где λ_1 – коэффициент Ламе жидкости. При этих условиях приходим к равенствам $V_1^2 = \tilde{R}/\rho_f$, $V_2 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = \infty$, а потенциалы для источников типа центра давления и расширения в жидкости выражаются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} &\phi_1(t) = \tilde{B}_1 f_1(t)/(3\tilde{R}), \\ &\phi_1(t) = -\tilde{B}_3 f_3(t). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для перехода к упругой среде необходимо выполнить условия

$$\tilde{B}_1 = \tilde{B}_3 = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad M = \tilde{R} = 0, \quad F = \lambda_2, \quad L = \mu_2,$$

в которых λ_2 и μ_2 – коэффициенты Ламе упругой фазы. При этих условиях $V_1^2 = P/\rho_s$, $V_2 = 0$, $A_1 = \alpha/(\alpha-1) > 1$, $A_2 = 0$, $P = \lambda_2 + 2\mu_2$, а потенциалы в упругой среде представятся соотношениями

$$\begin{aligned} &\phi_2(t) = \tilde{B}_2 f_2(t)/(3P), \\ &\phi_2(t) = -\tilde{B}_4 f_4(t)(F + 2L/3)/P, \end{aligned} \tag{2.14}$$

относящимися к источникам типа центров давления и расширения. Первые равенства (2.13) и (2.14) совпадают с выражениями работы [1], где было построено поле от источников центра давления в упругой и жидкой средах.

В формулах (2.10) плотности ρ_{11}, ρ_{22} и ρ_{12} могут быть заменены коэффициентами закона Гука с помощью равенств

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_{22} + \rho_{12}A_{2,1}}{V_{1,2}^2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)} = \frac{MA_{2,1} + \tilde{R}}{P\tilde{R} - M^2}, \\ &\frac{\rho_{11}A_{2,1} + \rho_{12}}{V_{1,2}^2(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)} = \frac{PA_{2,1} + M}{P\tilde{R} - M^2}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

С учетом соотношений (2.15) функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$, определяющие волновое поле от источника второго рода и типа центра давлений, представятся формулами

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{(PA_2+M)\tilde{B}_1 f_1(t) - (MA_2+\tilde{R})\tilde{B}_2 f_2(t)}{3(A_2-A_1)(P\tilde{R}-M^2)}, \\ F_2(t) &= -\frac{(PA_1+M)\tilde{B}_1 f_1(t) - (MA_1+\tilde{R})\tilde{B}_2 f_2(t)}{3(A_2-A_1)(P\tilde{R}-M^2)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Если в равенствах (2.16) положить $f_1(t) = f_2(t)$, $\tilde{B}_1 = -3\varepsilon/(4\pi)$, $\tilde{B}_2 = -3(1-\varepsilon)/(4\pi)$, то получим выражения, характеризующие волновое поле от сосредоточенного источника типа центра давлений, заданного в правых частях уравнений [6].

Волновые поля от обоих источников второго рода могут быть также выражены в цилиндрических координатах. Используя формулы (1.6), (2.2) и (2.10), представим поле источника типа центра давлений соотношениями (1.21), в которых

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{3(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}\times \\ &\times\left\{\frac{e^{-k|z|\alpha_1}}{V_1^2\alpha_1}\left[(\rho_{11}A_2+\rho_{12})\tilde{B}_1G_1-(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\tilde{B}_2G_2\right]-\right. \\ &\left.-\frac{e^{-k|z|\alpha_2}}{V_2^2\alpha_2}\left[(\rho_{11}A_1+\rho_{12})\tilde{B}_1G_1-(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\tilde{B}_2G_2\right]\right\}, \\ Z_2 &= \frac{1}{3(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}\times \\ &\times\left\{\frac{e^{-k|z|\alpha_1}}{V_1^2\alpha_1}A_1\left[(\rho_{11}A_2+\rho_{12})\tilde{B}_1G_1-(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\tilde{B}_2G_2\right]-\right. \\ &\left.-\frac{e^{-k|z|\alpha_2}}{V_2^2\alpha_2}A_2\left[(\rho_{11}A_1+\rho_{12})\tilde{B}_1G_1-(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\tilde{B}_2G_2\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

В аналогичной форме может быть представлено также поле источника типа центра расширения, однако для краткости изложения эти выражения не приводятся.

§ 3. Проверка принципа Сен-Венана для модели Био

В настоящем параграфе покажем, что волновое поле от точечного источника типа центра давлений в среде Био представляется в виде наложения волновых полей, возбужденных парой точечных источников в виде вертикальных сил и источника, состоящего из радиальных касательных сил. Такая задача в случае упругой трансверсально-изотропной среды была решена в работе [1], и ее решение соответствует принципу Сен-Венана. Эти результаты предполагаются обобщить на среду Био и для нее проверить принцип Сен-Венана.

Пусть в цилиндрической системе координат r, z, θ задана однородная изотропная среда Био и рассмотрим в этой среде действие двух вспомогательных источников, приложенных к плоскости $z = 0$. Первый источник в виде распределенного нормального давления задан соотношениями при $z = 0$

$$\begin{aligned}&[\sigma_{zz}^{(2)}] = \frac{\bar{B}_2}{2\pi} f_2(t) \tilde{F}_n(r), \quad [\sigma^{(1)}] = \frac{\bar{B}_1}{2\pi} f_1(t) \tilde{F}_n(r),\\ &[\sigma_{rz}^{(2)}] = 0, \quad [u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_r^{(2)}] = 0,\end{aligned} \tag{3.1}$$

в которых символ [ ] выражает скачки функций на плоскости $z = 0$, а функция $\tilde{F}_n(r)$ имеет выражение

$$\tilde{F}_n(r) = \frac{n^2}{(1 + n^2 r^2)^{3/2}} \tag{3.2}$$

и удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty \tilde{F}_n(r) r\, dr = 1. \tag{3.3}$$

Согласно равенствам (3.1) и (3.3), суммарные силы, действующие на первую и вторую фазы в плоскости $z = 0$, равны соответственно $B_1 f_1(t)$ и $B_2 f_2(t)$, при этом параметр n определяет распределенность этих сил и при $n = \infty$ силы оказываются приложенными в начале координат. Хотя источник в виде неравномерного нормального давления на жидкость является неестественным, рассмотрение этого источника производится только для общности постановки задачи. Второй источник, содержащий тангенциальные давления, определяется граничными условиями при $z = 0$

$$\begin{aligned}&[\sigma_{rz}^{(2)}] = \frac{\bar{B}}{2\pi} f(t) \phi_n(r), \quad [\sigma_{zz}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0,\\ &[u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_r^{(2)}] = 0,\end{aligned} \tag{3.4}$$

в которых

$$\phi_n(r) = \frac{3n^4 r}{2(1 + n^2 r^2)^{5/2}} = -\frac{1}{2} \tilde{F}'_n(r). \tag{3.5}$$

В равенствах (3.1) и (3.4) B_1, B_2 и B – заданные коэффициенты, а известные функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и $f(t)$, характеризующие временную зависимость источников, определены только при $t \geqslant 0$.

Входящие в условия (3.1) и (3.4) смещения и напряжения выражаются равенствами

$$
\begin{aligned}
&u_z^{(2)} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r},\\
&u_z^{(1)} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}\right),\\
&u_r^{(2)} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial z},\\
&\sigma^{(1)} = \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},\\
&\sigma_{zz}^{(2)} = \rho_{11}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + 2L\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\\
&\sigma_{rz}^{(2)} = L\left(2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r^2}\right)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

через потенциалы φ_1, φ_2 и ψ, которые удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{gathered}
P\Delta\varphi_2 + M\Delta\varphi_1 = \rho_{11}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},\\
M\Delta\varphi_2 + \tilde{R}\Delta\varphi_1 = \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},\\
\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{\rho_{22}L}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

При нахождении этих потенциалов полезно всю область разделить на два полупространства и снабдить потенциалы в полупространстве $z > 0$ значком "$-$", а в полупространстве $z < 0$ значком "$+$". В случае обоих вспомогательных источников указанные потенциалы будем искать в виде интегралов Фурье–Бесселя и Меллина

$$
\varphi_1^+ = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(X_1^+ e^{kz\alpha_1} + X_2^+ e^{kz\alpha_2})e^{kt\eta}d\eta,
$$

$$
\varphi_2^+ = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(A_1X_1^+ e^{kz\alpha_1} + A_2X_2^+ e^{kz\alpha_2})e^{kt\eta}d\eta,
$$

$$
\begin{aligned}
\psi^+ &= -\int_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y^+ e^{kt\eta+kz\beta} d\eta, \\
\varphi_1^- &= \int_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (X_1^- e^{-kz\alpha_1} + X_2^- e^{-kz\alpha_2}) e^{kt\eta} d\eta, \\
\varphi_2^- &= \int_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (A_1 X_1^- e^{-kz\alpha_1} + A_2 X_2^- e^{-kz\alpha_2}) e^{kt\eta} d\eta, \\
\psi^- &= -\int_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y^- e^{kt\eta-kz\beta} d\eta.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Коэффициенты A_1, A_2 и радикалы α_1, α_2, представляются попрежнему формулами (1.11) и (1.20), а радикал β выражается соотношениями

$$
\beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{V_3^2}}, \qquad V_3 = \sqrt{\frac{\rho_{22} L}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}}. \tag{3.9}
$$

Для нахождения полей смещений и напряжений необходимо выразить величины X_1^+, X_2^+, Y^+, X_1^-, X_2^- и Y^- через функции, определяющие источники. С этой целью представим правые части условий (3.1) и (3.4) также в виде интегралов Фурье–Бесселя и Меллина, используя соотношения

$$
\tilde{F}_n(r) = \int_0^\infty J_0(kr) e^{-\frac{k}{n}} dk,
$$

$$
\tilde{\phi}_n(r) = \frac{1}{2} \int_0^\infty J_0(kr) e^{-\frac{k}{n}} k\, dk,
$$

$$
G(k\eta) = \int_0^\infty f(t) e^{-k\eta t} dt, \qquad G_i(k\eta) = \int_0^\infty f_i(t) e^{-k\eta t} dt \, (i = 1, 2). \tag{3.10}
$$

После решения системы уравнений, записанных на основании граничных условий (3.1) и (3.4), приходим к выражениям

$$
X_1^- = -X_1^+ = \frac{(\rho_{11} A_2 + \rho_{12}) \bar{B}_1 G_1 - (\rho_{12} A_2 + \rho_{22}) \bar{B}_2 G_2}{4\pi\eta^2 (A_2 - A_1)(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)},
$$

$$
\begin{aligned}
&X_2^- = -X_2^+ = -\frac{(\rho_{11}A_1+\rho_{12})\bar{B}_1G_1-(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\bar{B}_2G_2}{4\pi\eta^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
&Y^- = Y^+ = \frac{\rho_{22}\bar{B}_2G_2-\rho_{12}\bar{B}_1G_1}{4\pi\eta^2\beta(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)};
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&X_1^- = X_1^+ = \frac{(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\bar{B}kG}{4\pi\alpha_1\eta^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
&X_2^- = X_2^+ = -\frac{(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\bar{B}kG}{4\pi\alpha_2\eta^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
&Y^- = -Y^+ = -\frac{k\bar{B}\rho_{22}G}{4\pi\eta^2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

относящимся соответственно к источникам (3.1) и (3.4) и определяющим поля потенциалов по формулам (3.8). В равенствах (3.11) и (3.12) совершен предельный переход при $n\to\infty$, после которого $e^{-k/n}=1$.

Рассмотрим теперь третий вспомогательный источник, представляющий собой пару равных, но противоположно направленных сил, приложенных к точкам $r=0$, $z=-R_0$ и $r=0$, $z=R_0$. Этот источник задается граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&[\sigma_{zz}^{(2)}] = \pm\frac{\bar{B}_2}{4\pi R_0}\,f_2(t)\tilde{F}_n(r),\\
&[\sigma^{(1)}] = \pm\frac{\bar{B}_1}{4\pi R_0}\,f_1(t)\tilde{F}_n(r),\\
&[\sigma_{rz}^{(2)}] = 0,\quad [u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_r^{(2)}] = 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

при $z=\pm R_0$ и $n\to\infty$. Вследствие сходства первого и третьего вспомогательных источников получим выражения для потенциалов поля третьего источника, используя выражения для потенциалов первого источника. Если обозначить потенциалы в случае первого вспомогательного источника через $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ и $\psi(z)$, то потенциалы полей от третьего источника представляется соответственно выражениями

$$
\frac{\varphi_i(z-R_0)-\varphi_i(z+R_0)}{2R_0}\ (i=1,2),\qquad \frac{\psi(z-R_0)-\psi(z+R_0)}{2R_0}. \tag{3.14}
$$

После предельного перехода при $R_0\to 0$ выражения (3.14) заменяются соответственно выражениями

$$
-\varphi_i'(z)\quad (i=1,2),\qquad -\psi'(z). \tag{3.15}
$$

Поле потенциалов от третьего вспомогательного источника после предельного перехода $R_0 \to 0$ также представится формулами (3.8), в которых

$$
\begin{aligned}
X_1^- &= X_1^+ = k\alpha_1 \frac{(\rho_{11}A_2+\rho_{12})\bar{B}_1G_1-(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\bar{B}_2G_2}{4\pi\eta^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
X_2^- &= X_2^+ = -k\alpha_2 \frac{(\rho_{11}A_1+\rho_{12})\bar{B}_1G_1-(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\bar{B}_2G_2}{4\pi\eta^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
Y^- &= -Y^+ = k\frac{\rho_{22}\bar{B}_2G_2-\rho_{12}\bar{B}_1G_1}{4\pi\eta^2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Рассмотрим теперь случай, когда среда одновременно возбуждается вторым и третьим вспомогательными источниками. Сложение соответствующих выражений (3.12) и (3.16) приводит к формулам

$$
\begin{aligned}
X_1^- &= X_1^+ = k\frac{(\rho_{12}A_2+\rho_{22})(\bar{B}G-\bar{B}_2G_2\alpha_1^2)+(\rho_{11}A_2+\rho_{12})\bar{B}_1G_1\alpha_1^2}{4\pi\alpha_1\eta^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
X_2^- &= X_2^+ = -k\frac{(\rho_{12}A_1+\rho_{22})(\bar{B}G-\bar{B}_2G_2\alpha_2^2)+(\rho_{11}A_1+\rho_{12})\bar{B}_1G_1\alpha_2^2}{4\pi\alpha_2\eta^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
Y^- &= -Y^+ = k\frac{\rho_{22}(\bar{B}_2G_2-\bar{B}G)-\rho_{12}\bar{B}_1G_1}{4\pi\eta^2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Волновое поле, определенное соотношениями (3.8) и (3.17), сравним со сферическим симметричным полем источника второго рода и типа центра давлений. Чтобы волновое поле обладало бы сферической симметрией, необходимо удовлетворить условию $\psi = 0$, которое приводит к соотношениям

$$
\bar{B}_2G_2 = \bar{B}G, \qquad \bar{B}_1G_1 = 0. \tag{3.18}
$$

С учетом равенств (3.18) формулы (3.17) представляются в виде

$$
\begin{aligned}
X_1^- &= X_1^+ = -k\frac{(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\bar{B}_2G_2}{4\pi\alpha_1V_1^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)},\\
X_2^- &= X_2^+ = k\frac{(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\bar{B}_2G_2}{4\pi\alpha_2V_2^2(A_2-A_1)(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Если в формулах (2.17) положить

$$
\tilde{B}_1 = 0, \qquad \tilde{B}_2 = 3\bar{B}_2/(4\pi), \tag{3.20}
$$

то соотношения (2.17) и (3.19) будут описывать одинаковые волновые поля. Таким образом, источник второго рода типа центра давлений эквивалентен паре соответствующих вертикальных сил и некоторому источнику типа центра касательных давлений при условии, что все указанные источники действуют непосредственно только на упругую фазу. Если вместо второй формулы (2.8) записать соотношение $[\sigma_{RR}^{(2)}] = 3\tilde{B}_2 f_2(t)/\ (4\pi R_0^3)$, показывающее, что скачок давления обратно пропорционален объему шара, на границе которого приложено воздействие, то вместо соотношений (3.20) будем иметь $\tilde{B}_1 = 0$, $\tilde{B}_2 = \bar{B}_2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–05–9961) и фонда Сороса (R5Y000 и 269_s).

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об источниках типа центра давлений в изотропной и трансверсально-изотропной средах.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн XXV. Л, 1986, с. 76–85.
2. R. Burridge, C. A. Vargas, *The fundamental solution in dynamic poroelasticity.* — Geophys. J. Roy. Astr. Soc. **58** (1979), 61–90.
3. A. N. Norris, *Radiation from a point source and scattering theory in a fluid – saturated porous solid.* — J. Acoust. Soc. Am. **77** **No. 6** (1985), 2012–2023.
4. G. Bonnet, *Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range.* — J. Acoust. Soc. Am. **82** **No. 5** (1987), 1758–1762.
5. C. Boutin, G. Bonnet, and P. Y. Bard, *Green functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media,.* — Geophys. J. R. Astr. Soc. **90** (1987), 521–550.
6. N. Dai, A. Vafidis, and E. R. Kanasewich, *Wave propagation in heterogeneous porous media: A velocity-stress, finite-difference method.* — Geophysics **60** **No. 2** (1995), 327–340.
7. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био.* Настоящий сборник.
8. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28** **No. 2** (1956), 168–178.
9. Г. Бейтман, А. Эрдейи, *Таблица интегральных преобразований.* т. 2, М, 1970, с. 327.

Molotkov L. A., Bakulin A. V. Centers of compression and dilatation sources in Biot model. For the homogeneous isotropic Biot model of porous media the wave fields of spherically symmetric point sources have been derived. It has been shown that under certain conditions the center of compression source may by replaced by two sources. First one is a pair of oppositely directed vertical forces, second one is a center of radially directed tangential forces.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 августа 1995 г.