## О НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

И. З. Голубчик

Основным результатом данной работы является описание нормальных делителей ортогональной группы над коммутативным кольцом. Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с инволюцией $*$. Обозначим через $L$ множество двусторонних идеалов кольца $R$, устойчивых относительно инволюции. Назовем $R$ инволютивно простым, если $L = \{\{0\}, R\}$. Для $n > 1$ $R_n$ — кольцо матриц над $R$, $l_{ij}$ — матричные единицы и $GL(n, R)$ — полная линейная группа. Определим унитарную группу $U(\varepsilon, n, R)$. Пусть $\varepsilon$ — элемент из центра кольца $R$ и $\varepsilon\varepsilon^* = 1$. Положим $f = \sum_{i=1}^{n} (l_{i,\, i+n} + \varepsilon l_{i+n,\, i}) \in GL(n, R)$. Тогда $U(\varepsilon, n, R) = \{A \in GL(n, R) \mid AfA^* = f\}$. Для $J \in L$ через $E(\varepsilon, n, R)$ обозначим подгруппу группы $U(\varepsilon, n, R)$, порожденную элементами $1 + \lambda l_{ij} - \lambda^* l_{j+n,\, i+n}$, $1 + \lambda l_{i,\, j+n} - \varepsilon^*\lambda^* l_{j,\, i+n}$ и $1 + \lambda l_{i+n,\, j} - \varepsilon\lambda^* l_{j+n,\, i}$, где $\lambda \in J$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Ортогональной группой $O(\varepsilon, n, R)$ назовем подгруппу группы $U(\varepsilon, n, R)$, для которой $E(\varepsilon, n, R) \subseteq O(\varepsilon, n, R) \subseteq U(\varepsilon, n, R)$. Ниже группа $O(\varepsilon, n, R)$ фиксирована. Для $J \in L$ положим

$$C(\varepsilon, n, J) = \{A \in O(\varepsilon, n, R) \mid AX - XA \in J_{2n},\ X \in R_{2n}\},$$

где $J_{2n}$ — кольцо матриц над $J$. Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть $R$ — коммутативное кольцо с инволюцией $*$ и $n \geqslant 3$. Тогда если $N$ — подгруппа ортогональной группы $O(\varepsilon, n, R)$, нормализуемая подгруппой $E(\varepsilon, n, R)$, то $E(\varepsilon, n, F) \subseteq N \subseteq C(\varepsilon, n, F)$ для некоторого однозначно определенного идеала $F \subseteq L$.*

Для полной линейной группы $GL(n, R)$ аналогичный результат приведен в [3]. Пусть $\mathscr{E}$ — множество колец с инволюцией такое, что кольцо $R \in \mathscr{E}$, если для любой нецентральной подгруппы $N$ группы $U(\varepsilon, n, R)$ $(n \geqslant 3)$, нормализуемой подгруппой $E(\varepsilon, n, R)$, следует, что группа $N \supseteq E(\varepsilon, n, F)$, где $F$ — ненулевой идеал, $F \in L$.

Теорема 2. *Пусть $R$ — кольцо с инволюцией. В каждом из следующих случаев кольца $R \in \mathscr{E}$: 1) $R$ — нётерово кольцо; 2) $R$ — $PI$ алгебра; 3) $R$ — область Оре (т. е. $R$ обладает классическим кольцом частных).*

Из определения множества $\mathscr{E}$ вытекает

Предложение 1. *Пусть $R \in \mathscr{E}$ и $n \geqslant 3$. Тогда $R$ — инволютивно простое кольцо, если и только если группа $E(\varepsilon, n, R)/\mathfrak{Z}$ — простая, где $\mathfrak{Z}$ — центр группы $E(\varepsilon, n, R)$.*

В статье [2] определены группы $E(\varepsilon, \Lambda, n, R)$, причем $E(\varepsilon, n, R) \subseteq E(\varepsilon, \Lambda, n, R)$ и взаимный коммутант групп $[E(\varepsilon, n, R), E(\varepsilon, \Lambda, n, R)] = E(\varepsilon, \Lambda, n, R)$.

Из предложения 1 легко получается

Предложение 2. *Пусть $R$ — инволютивно простое кольцо, $R \in \mathscr{E}$ и $n \geqslant 3$. Тогда группа $E(\varepsilon, \Lambda, n, R)/\mathfrak{Z}$ — простая.*

Предложение 2 обобщает известные результаты для тел. Для колец со стабильным рангом, не превосходящим $n$, оно доказано в [2]. В случае стабильных групп А. В. Михалёв и Л. Н. Васерштейн в статье [1] доказали предложения 1 и 2 для произвольных колец с инволюцией. Автор благодарен А. В. Михалёву за постановку задач и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Михалёв, Л. Н. Васерштейн, О нормальных подгруппах ортогональной группы над кольцом с инволюцией, Алгебра и логика 9 (1970), 5.

[2] Л. Н. Васерштейн, Стабилизация унитарных и ортогональных групп над кольцом с инволюцией, Матем. сб. 81 (123):3 (1970).

[3] И. З. Голубчик, О полной линейной группе над ассоциативным кольцом, УМН 28:3 (1973), 179—180.

Поступило в Правление общества 1 декабря 1974 г.